

介观电容耦合电路的量子涨落^{*}

王继锁[†] 韩保存 孙长勇

(聊城师范学院物理系, 聊城 252059)

(1997 年 8 月 25 日收到; 1997 年 11 月 3 日收到修改稿)

从无耗散的电容耦合电路的经典运动方程出发, 分别研究了这一耦合电路在任一本征态下和在压缩真空态下电荷、电流的量子涨落. 结果表明, 两个回路中的量子噪声是相互关联的.

PACC: 7335; 4250

1 引 言

随着纳米技术和纳米电子学的飞速发展^[1,2], 电路及器件小型化的趋势越来越强烈, 近年来已达到原子尺度^[3]; 当电子的输运尺度达到电子两次非弹性碰撞之间的尺度时, 必须考虑器件和电路的量子效应^[4]. 1973 年, Louisell 研究了 LC 电路的量子效应, 并给出了在真空态下这一电路的量子噪声^[5]. 最近, 我们研究了在压缩真空态下介观 LC 电路中电荷、电流的量子涨落^[6], 由于真空态可视为其压缩参数为零的压缩真空态, 因此研究介观电路在压缩真空态下电荷、电流的量子涨落将会更带有普遍性. 本文给出了无耗散介观电容耦合电路中, 在其任一本征态下各个回路的电荷、电流的量子涨落, 讨论了在压缩真空态下这种耦合电路中电荷、电流的量子涨落问题.

2 任一本征态下介观电容耦合电路的量子涨落

对于一个无耗散的由电感电容组成的电容耦合电路(其中一个回路中有电源 $\epsilon(t)$), 按照 Kirchhoff 定律, 其经典运动方程可写为

$$L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C} = \epsilon(t), \quad L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} - \frac{q_1 - q_2}{C} = 0, \quad (1)$$

式中 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 为两个 LC 型电路中的电荷, L_i ($i=1, 2$) 为两个回路中的电感, C_1 为回路 1 中的电容, C 为两个回路的耦合电容. 若 $\epsilon(t) = 0$, 则可把该运动方程写成简单的哈密顿形式

^{*} 山东省自然科学基金资助的课题(批准号: Y97A08013).

[†] 中国高等科学技术中心(世界实验室)协联成员.

$$H = \frac{p_1^2}{2L_1} + \frac{p_2^2}{2L_2} + \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C}, \quad (2)$$

式中 $p_i = L_i \frac{dq_i}{dt}$ ($i=1, 2$) 为 q_i 的共轭变量. 按照通常的正则量子化方法, 一对可观测量 q_i 和 p_i 写成一对线性厄密算符 $\hat{q}_i$ 和 $\hat{p}_i$, 并且它们之间满足下列对易关系:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i\hbar. \quad (3)$$

这样就把无耗散电容耦合电路量子化. 若对量子化后的哈密顿量作下列电荷和电流的线性变换^[7]:

$$q'_1 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/4} q_1 \cos \frac{\varphi}{2} - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/4} q_2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (4)$$

$$q'_2 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/4} q_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/4} q_2 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (5)$$

$$p'_1 = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/4} p_1 \cos \frac{\varphi}{2} - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/4} p_2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (6)$$

$$p'_2 = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/4} p_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/4} p_2 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (7)$$

并取

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{L_1 L_2}}{L_2(1 + C/C_1) - L_1}, \quad (8)$$

则量子化后体系的哈密顿量可写成

$$\hat{H} = \frac{1}{2\sqrt{L_1 L_2}} (p_1'^2 + p_2'^2) + \frac{\alpha}{2} q_1'^2 + \frac{\beta}{2} q_2'^2, \quad (9)$$

式中

$$\alpha = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \frac{1}{C} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi}{C}, \quad (10)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \frac{1}{C} \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi}{C}. \quad (11)$$

易见, (9)式即为两个独立的量子力学谐振子的哈密顿量的代数和. 这两个简谐振子的频率分别为

$$\omega_1 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{L_1 L_2}} \right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{\beta}{\sqrt{L_1 L_2}} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

因此, 当 $\epsilon(t) = 0$ 时, 该耦合电路的能谱为

$$E_{n_1, n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_2 \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

其本征矢量为

$$|\psi_{n_1, n_2}\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

式中 $|n_1\rangle$ 和 $|n_2\rangle$ 分别为频率 ω_1 和 ω_2 的单个简谐振子的本征矢量.

为了求解在任一本征态矢即在(14)式下该耦合电路中电荷、电流的量子涨落, 对于上

述两个独立的量子力学简谐振子,引入升降算符

$$a_i = \left(\frac{\omega_i \sqrt{L_1 L_2}}{2 \hbar} \right)^{1/2} \left(q_i' + \frac{i}{\omega_i \sqrt{L_1 L_2}} p_i' \right) \quad (i = 1, 2), \quad (15)$$

$$a_i^\dagger = \left(\frac{\omega_i \sqrt{L_1 L_2}}{2 \hbar} \right)^{1/2} \left(q_i' - \frac{i}{\omega_i \sqrt{L_1 L_2}} p_i' \right) \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

由 $[q_i, p_i] = i \hbar$ 不难得到 $[a_i, a_i^\dagger] = 1$; 另有 $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j^\dagger] = 0 (i \neq j)$. 由 (15) 和 (16) 式可得

$$q_i' = \left(\frac{\hbar}{2 \omega_i \sqrt{L_1 L_2}} \right)^{1/2} (a_i^\dagger + a_i) \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

$$p_i' = i \left(\frac{\hbar \omega_i \sqrt{L_1 L_2}}{2} \right)^{1/2} (a_i^\dagger - a_i) \quad (i = 1, 2). \quad (18)$$

由此可求出在态 (14) 式下 q_i' 和 p_i' 的平均值和方均值分别为

$$\langle q_i' \rangle = \langle p_i' \rangle = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

$$\langle q_i'^2 \rangle = \frac{1}{\omega_i \sqrt{L_1 L_2}} \frac{\hbar}{2} (2 n_i + 1) \quad (i = 1, 2), \quad (20)$$

$$\langle p_i'^2 \rangle = \omega_i \sqrt{L_1 L_2} \frac{\hbar}{2} (2 n_i + 1) \quad (i = 1, 2). \quad (21)$$

由 (4) — (7) 式和 (19) — (21) 式可求得在态 (14) 式下, 介观电容耦合电路中各个回路的电荷、电流的平均值和方均值分别为

$$\langle q_i \rangle = \langle p_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (22)$$

$$\langle q_1^2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{L_1} \left[\frac{1}{\omega_1} (2 n_1 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\omega_2} (2 n_2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right], \quad (23)$$

$$\langle q_2^2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{L_2} \left[\frac{1}{\omega_1} (2 n_1 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\omega_2} (2 n_2 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right], \quad (24)$$

$$\langle p_1^2 \rangle = \frac{\hbar}{2} L_1 \left[\omega_1 (2 n_1 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_2 (2 n_2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right], \quad (25)$$

$$\langle p_2^2 \rangle = \frac{\hbar}{2} L_2 \left[\omega_1 (2 n_1 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_2 (2 n_2 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right], \quad (26)$$

式中 ω_1, ω_2 和 φ 值分别由 (12) 和 (8) 式给出. 由此可见, 在量子化后的电容耦合电路中, 未接通电源时, 在其任一本征态下, 每个电路中的电荷、电流的平均值均为零, 但它们的方均值均不为零, 即在每个回路中电荷、电流均存在量子涨落; 另外, 由 (22) — (26) 式, 并考虑到 (8) 和 (10) — (12) 式, 易见这时在每个回路中电荷、电流量子涨落的大小不仅与体系所处的状态和回路自身的器件有关, 而且还与耦合电容的大小以及另一个回路的器件有关, 亦即在这一耦合电路中, 两个回路的电荷、电流的量子涨落是相互关联的.

3 压缩真空态下介观电容耦合电路的量子涨落

不接电源时, 若假定上述耦合电路处于压缩真空态 $|0, 0\rangle_{r_1, r_2}$, 其在粒子数表象中可

表示为^[8]

$$\begin{aligned} |0,0\rangle_{r_1,r_2} &= |0\rangle_{r_1} \otimes |0\rangle_{r_2} \\ &= \text{sech}^{1/2}(r_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e^{i\theta_1} \text{th } r_1)^n [(2n)!]^{1/2}}{n! 2^n} |2n\rangle_1 \\ &\quad \otimes \text{sech}^{1/2}(r_2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-e^{i\theta_2} \text{th } r_2)^m [(2m)!]^{1/2}}{m! 2^m} |2m\rangle_2, \end{aligned} \quad (27)$$

式中 r_i ($i = 1, 2$) 为压缩参数的模值 (决定压缩程度的压缩因子), θ_i ($i = 1, 2$) 为压缩参数的幅角 (决定压缩方向的相位角). 由 (17), (18) 和 (27) 式, 可求出 q'_i 和 p'_i 在态 (27) 式下的平均值和方均值分别为

$$r_{1,2} \langle 0,0 | q'_i | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} = r_{1,2} \langle 0,0 | p'_i | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} r_{1,2} \langle 0,0 | q_i'^2 | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\omega_i \sqrt{L_1 L_2}} \\ &\quad \times \text{sech}(r_i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n + 2(2n+1)\cos\theta_2 \text{th } r_i] \text{th}^{2n} r_i}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &\quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} r_{1,2} \langle 0,0 | p_i'^2 | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} &= \frac{\hbar}{2} \omega_i \sqrt{L_1 L_2} \\ &\quad \times \text{sech}(r_i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n - 2(2n+1)\cos\theta_2 \text{th } r_i] \text{th}^{2n} r_i}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &\quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (30)$$

由以上各式和 (4) — (7) 式, 可得到在态 (27) 式下, 介观电容耦合电路中各个回路的电荷、电流的平均值和方均值分别为

$$r_{1,2} \langle 0,0 | q_i | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} = r_{1,2} \langle 0,0 | p_i | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} r_{1,2} \langle 0,0 | q_1^2 | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{L_1} \left\{ \frac{1}{\omega_1} \text{sech}(r_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n + 2(2n+1)\cos\theta_1 \text{th } r_1] \text{th}^{2n} r_1}{(n!)^2 2^{2n}} \right. \\ &\quad \times \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\omega_2} \text{sech}(r_2) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n + 2(2n+1)\cos\theta_2 \text{th } r_2] \text{th}^{2n} r_2}{(n!)^2 2^{2n}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \Big\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} r_{1,2} \langle 0,0 | q_2^2 | 0,0 \rangle_{r_1,r_2} &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{L_2} \left\{ \frac{1}{\omega_1} \text{sech}(r_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n + 2(2n+1)\cos\theta_1 \text{th } r_1] \text{th}^{2n} r_1}{(n!)^2 2^{2n}} \right. \\ &\quad \times \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\omega_2} \text{sech}(r_2) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n + 2(2n+1)\cos\theta_2 \text{th } r_2] \text{th}^{2n} r_2}{(n!)^2 2^{2n}} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \Big\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
r_1, r_2 \langle 0, 0 | p_1^2 | 0, 0 \rangle_{r_1, r_2} = & \frac{\hbar}{2} L_1 \left\{ \omega_1 \operatorname{sech}(r_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n - 2(2n+1)\cos\theta_1 \operatorname{th} r_1] \operatorname{th}^{2n} r_1}{(n!)^2 2^{2n}} \right. \\
& \times \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_2 \operatorname{sech}(r_2) \\
& \times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n - 2(2n+1)\cos\theta_2 \operatorname{th} r_2] \operatorname{th}^{2n} r_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(n!)^2 2^{2n}} \right\},
\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
r_1, r_2 \langle 0, 0 | p_2^2 | 0, 0 \rangle_{r_1, r_2} = & \frac{\hbar}{2} L_2 \left\{ \omega_1 \operatorname{sech}(r_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n - 2(2n+1)\cos\theta_1 \operatorname{th} r_1] \operatorname{th}^{2n} r_1}{(n!)^2 2^{2n}} \right. \\
& \times \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_2 \operatorname{sech}(r_2) \\
& \times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! [1 + 4n - 2(2n+1)\cos\theta_2 \operatorname{th} r_2] \operatorname{th}^{2n} r_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{(n!)^2 2^{2n}} \right\},
\end{aligned} \quad (35)$$

式中 ω_1, ω_2 和 φ 值分别由(12)和(8)式给出. 由(31)—(35)式可见, 在量子化后的电容耦合电路中, 未接通电源时, 与其在上述任一本征态下相类似, 在压缩真空态即态(27)式下, 每个回路中电荷、电流的平均值均为零, 但它们的方均值均不为零, 即在每个回路中电荷、电流也均存在量子涨落, 且这时在每个回路中电荷、电流量子涨落的大小, 不仅与压缩参数的模值 r_i ($i=1, 2$) 和幅角 θ_i ($i=1, 2$) 以及该回路自身的器件有关, 而且还与耦合电容的大小以及另一个回路的器件有关, 亦即在压缩真空态下电容耦合电路中两个回路的电荷、电流的量子涨落也是相互关联的.

4 结束语

本文从一个无耗散的由电感电容组成的电容耦合电路的经典运动方程出发, 分别研究了当体系处在其任一本征态下和在压缩真空态下, 这种耦合电路中两个回路的电荷、电流的量子涨落. 计算结果表明, 对于这种耦合电路, 不论体系是在其任一本征态下, 还是在压缩真空态下, 每个回路中电荷、电流均存在量子涨落, 且两个回路的电荷、电流的量子涨落是相互关联的, 即每个回路中电荷、电流的量子涨落的大小, 不仅与体系所处的状态以及该回路自身的器件有关, 而且还与耦合电容的大小以及另一个回路的器件有关. 另外需要指出的是, 研究一些介观电路的这种量子效应, 对于进一步设计微小电路、压低噪声影响, 将会有一定的指导意义. 我们认为, 这种效应在介观电路中将会普遍存在, 值得人们去深入广泛研究. 当然, 在介观电路中除考虑电路的量子效应外, 还应考虑电路元件本身的量子效应. 作为研究工作的初期, 首先考虑电路的量子效应也将会具有一定的实践意义.

- [1] Y. Srivastava, A. Widom, *Phys. Rep.*, **148**(1987), 1.
- [2] F. A. Buot, *Phys. Rep.*, **224**(1993), 73.
- [3] R. G. Garcia, *Appl. Phys. Lett.*, **60**(1992), 1960.
- [4] R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.*, **1**(1957), 223.

- [5] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley, New York, 1973), chapter 4.
- [6] J. S. Wang, C. Y. Sun, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 2007(in Chinese).
- [7] B. Chen, Y. Q. Li *et al.*, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 1275(in Chinese).
- [8] J. S. Peng, G. X. Li, *Introduction to Modern Quantum Optics* (Science Press, Beijing, 1996), p. 184(in Chinese).

QUANTUM FLUCTUATIONS IN MESOSCOPIC CAPACITANCE COUPLED CIRCUITS *

WANG JI-SUO HAN BAO-CUN SUN CHANG-YONG

(*Department of Physics, Liaocheng Teachers College, Liaocheng 252059*)

(Received 25 August 1997; revised manuscript received 3 November 1997)

ABSTRACT

Starting from the equation for the classical motion of a nondissipative mesoscopic capacitance coupled circuits with source, we have studied the quantum fluctuations of the charge and current in the eigenstate of the coupled circuits and in the squeezed vacuum state, respectively. The results show that the quantum fluctuations in the two circuits are correlated with each other.

PACC: 7335; 4250

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province under the Grant No. Y97A08013, China.