

中等半径比反向旋转圆 Couette 系统流动 稳定性的实验和数值研究^{*}

何钰泉 梁宝社 刘书声

(天津大学应用物理学系, 天津 300072)

(1997 年 12 月 16 日收到; 1998 年 4 月 3 日收到修改稿)

圆 Couette 系统已成为研究从层流转换为湍流以及有限几何尺寸对图案选择影响的范例. 本文以实验和计算机模拟方法研究中等半径比圆 Couette 系统的稳定性. 考察同轴独立旋转圆筒之间的粘性不可压缩流体运动, 推广了经典的 Rayleigh 离心不稳定性理论, 导出稳定性判据, 用来定量地确定稳定界限. 实验采用了流动显示和激光散射技术. 仪器有半径比 $\eta = 0.699$, 形状比 $\Gamma = 18$. 流动状态相图中的显著特征是新的首次失稳态: 当外筒静止或反向旋转时, 首次失稳出现具有非零方位角波数的螺旋涡流, 在轴向和方位角方向为行进波, 而并非与时间无关的 Taylor 涡. 初步实验所得的转换 Reynolds 数与数值计算结果一致. 实验室和数值实验显示出半径比对图案形成和转换序列的影响.

PACC: 4720; 4730; 0545

1 引 言

圆 Couette 系统, 也称 Couette-Taylor 同轴独立旋转圆筒系统, 是可通过精确观测, 研究流体中从分岔到混沌、直至发达湍流的少数典型非线性系统之一. 随着计算机技术和非线性动力学系统理论的发展, 国外自 80 年代至今, 开展了用流动显示方法, 激光多普勒测速观测流体状态的转变. 从实验时间序列重建动力学系统的相图, 计算分维数, Lyapunov 指数等动力学不变量, 刻画奇怪吸引子, 探索步入混沌的道路. 从总体上来说, 关于圆 Couette 系统的研究迄今已发表论文 2000 余篇, 国际上学术交流极为活跃和频繁, 几乎每两年在世界不同的国家或地区召开一次有关的工作会议. 鉴于圆 Couette 系统在理解流体动力学稳定性、图案形成和湍流方面的基础性, 国际上将它列为非线性科学范例之一, 誉称为流体力学的“氢原子”.

大量的研究工作积累了不少成果, 特别是 Andereck、刘书声和 Swinney 曾报道独立旋转圆 Couette 系统的流动状态相图^[1], 识别并发现了 15 种既丰富又复杂的流动图案, 这一开拓性的实验工作被许多作者引用^[2-4]. 值得指出, 依照非线性动力学的一般解释, 运动状态的分岔系指系统原有的某种稳定状态在控制参量变化到某个临界值时发生失稳而产生的其他稳定状态. 在轴向方向足够长的圆 Couette 系统中, 实验上可以控制的参量如

^{*} 国家基础研究“攀登计划”及国家自然科学基金(批准号: 19375034)资助的课题.

下:(1) 内圆筒的角速度;(2) 外圆筒的角速度;(3) 内筒与外筒半径比.在实际实验工作中,前两个参量容易改变,后一个参量可以改变,但付出的代价是重新加工建立一个实验装置.考虑到流动状态的转变序列似对几何控制参数敏感,而现有的实验结果和理论分析大多集中在两旋转圆筒壁之间的距离与半径相比足够小的情况,即接近窄间隙条件.本文报道以实验和计算机模拟方法研究中等半径比的圆 Couette 系统在反向旋转情况下的流动稳定性.

2 广义 Rayleigh 稳定条件

Rayleigh 首先研究了旋转流体的稳定性问题,他忽略了粘性,导出了由旋转轴对称扰动引起不稳定的条件^[5,6].现在我们研究两无限长的同心旋转圆筒之间的粘性不可压缩流体运动,分析广义的 Rayleigh 稳定性条件.系统由下列控制参数表征:半径比 $\eta = r_1/r_2$, r_1 和 r_2 分别是内外筒半径,间隙宽度 $d = r_2 - r_1$;内筒 Reynolds 数 $R_1 = r_1 \Omega_1 d/\nu$, 外筒 Reynolds 数 $R_2 = r_2 \Omega_2 d/\nu$, Ω_1 和 Ω_2 分别是内外筒角速度, ν 是运动粘性系数. Navier-Stokes 方程和连续性方程可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \nu \nabla^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ρ 代表流体密度, $\mathbf{u}$ 和 p 分别为速度和压力场.采用如图 1 所示圆柱坐标 (r, θ, z) ,

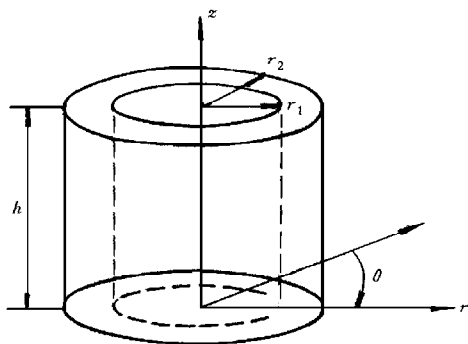


图 1 圆 Couette 系统的坐标系

令速度矢量 $\mathbf{u} = (u, v, w)$, 方程(1)有定常层流解, 流体在两上圆筒间沿方位角方向运动, 速度剖面仅依赖于径向坐标 r , 这就是所谓 Couette 流:

$$v = Ar + B/r, \quad u = w = 0, \quad (2a)$$

$$p = p_0 + \int_{r_1}^r \rho \frac{v^2(r)}{r} dr, \quad (2b)$$

系数 A 和 B 由无滑移边界条件确定

$$A = \Omega_1 \frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2}, \quad B = \Omega_1 r_1^2 \frac{1 - \mu}{1 - \eta^2}, \quad (3)$$

其中 $\mu = \Omega_2 / \Omega_1$. 当两圆筒以相反方向旋转时, 取 $R_1 > 0$ 和 $R_2 < 0$, 存在速度为零的节面

$$r_n = r_2 \sqrt{\frac{R_1 - \eta R_2}{R_1 - R_2 / \eta}}, \quad (4)$$

在平衡状态下, 径向压力梯度所提供的向心力迫使流体作定常圆周运动. 假设有单位质量的流体微团本来在位置 r , 有角动量 $H(r)$, 现在由于某一扰动而以速度 $u_r = \delta r / \delta t$ 快速移动到同一水平面上的近邻位置 $r + \delta r$, 不发生粘性耗散, 这样产生的能量变化即为动能变化

$$\delta E_k = - \frac{(\delta r)^2}{r^3} \frac{d}{dr} H^2(r). \quad (5)$$

在一级近似下, 作用在位移流体微团的恢复力可写成

$$dF = \Phi(r) \delta r + o(\delta r^2), \quad (6)$$

其中

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (Ar^2 + B)^2 \quad (7)$$

也叫做 Rayleigh 判别式. 若压力梯度和“离心力”之间不平衡, 将使流体微团抛到更外面的地方. 计及粘性效应后, 有阻碍微团位移的趋势, 同时, 粘性造成微团与近邻流体层交换角动量, 使不平衡扩散开. 粘滞耗损为粘滞力乘以位移,

$$\delta E_v = \left(\frac{\nu}{L^2} \frac{\delta r}{\delta t} \right) \delta r, \quad (8)$$

其中 L 代表流体微团典型尺寸. 由(5)式和(8)式导出:

$$\left[\frac{2}{1 + \eta} (\eta R_1 - R_2) \right]^2 \left[\frac{r_n^2}{r^2} - 1 \right] - \left(\frac{d}{L} \right)^4 = 0. \quad (9)$$

这就是所谓广义的 Rayleigh 稳定条件, 给出稳定界线 $R_1(R_2)$ 的隐式关系, 不难用对分法求解. (9)式包含了唯一的待定参数 L , 可以借助线性稳定性分析, 在外筒固定时 ($R_2 = 0$) 计算出的临界 Reynolds 数 $R_1(0)$ 来确定.

线性稳定性分析实际上是解决如下常微分方程复数特征值 λ 的特征值问题:

$$\hat{L}(r, \partial/\partial r, m, k; R_1, R_2, \eta) \Psi = \lambda M \Psi, \quad (10)$$

其中 $\hat{L}$ 代表线性算符, Ψ 为四个分量的矢量场, M 为常数矩阵, k 和 m 分别称为轴向和方位角波数, $\hat{L}$ 具体表达式参见附录. 解决上述特征值问题的实际计算, 经历了一个相当长的时间, 已发展了很多利用电子计算机的数值解法^[2,7]. 我们采用打靶法求解非线性边值问题的 Newton-Fox 算法^[8], 输入 R_2 值, 运用黄金分割搜索程序^[9]求解 R_1 对 k 极小值问题. 再对可能的 m 值寻求最小的 R_1 临界值, 完成中性曲线的计算.

3 实验结果和讨论

在我们所使用的实验装置中, 内外圆筒同轴放置, 分别由两台直流电机驱动, 其中上

下边界为镶嵌在外筒内壁上的尼龙环.几何控制参量如下:内筒半径 $r_1=4.175\text{ cm}$,外筒半径 $r_2=5.970\text{ cm}$,半径比 $\eta=0.699$;液体高度 $h=32\text{ cm}$,形状比 $\Gamma=h/d=18$.工作流体是蒸馏水中加入 2% 到 5% (体积比)的 Kalliroscope AQ1000 显示液.由光电转速传感器、脉冲整形、计数、译码控制几部分构成转速测量电路,经微机实时读取 Reynolds 数.由于流体状态的形成与 Reynolds 数的历史进程有关,依照通常的约定,在每一实验流程中首先将外筒转速从零开始缓慢加速至所需设定值,然后内筒按准静态加速方式从静止加速到所需转速,内筒角加速度的平均值 $\leq 0.1\text{ rad/min}^2$.观察方法是利用流动显示技术和激光散射的功率谱分析,实验的细节参见文献[1, 10, 11].

根据本文的方法,计算了实验所用的圆 Couette 系统在两圆筒反向旋转情况下的稳定性边界,结果如图 2 所示.为比较起见,实验数据和线性分析所得中性曲线也画在图中.由图 2 可以看出,广义 Rayleigh 条件所得结果与实验数据十分吻合,线性分析所得的中性曲线却又明显低于实验结果.

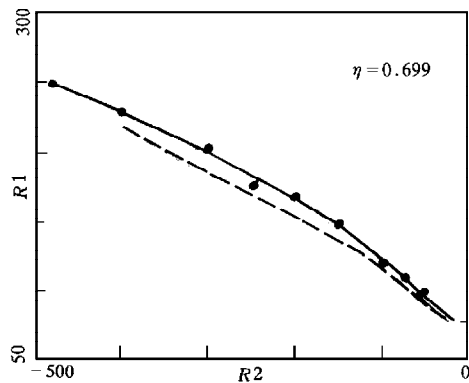


图 2 圆 Couette 系统 ($\eta=0.699$) 流动稳定性的实验与计算结果 圆点代表实验结果,实线是广义 Rayleigh 条件的计算值,虚线是线性稳定性分析的计算值

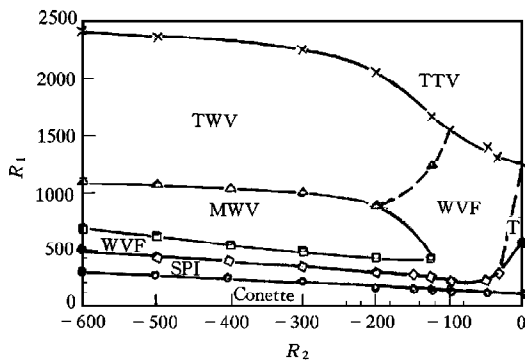


图 3 流动状态相图 Couette 区为 Couette 流态, SPI 区为螺旋涡流态, WVF 区为波动涡流态, T 区为 Taylor 涡流态, MWV 区为调制波动涡流态, TWV 区为湍流波动涡流态, TTV 区为湍流 Taylor 涡流态

在我们的实验中,曾采取以下两种方式比较系统地研究了流动状态及其转变序列:
(1) 外筒静止;(2) 内外筒反向旋转.在第一种情况下,当内筒 Reynolds 数小于某一临界值 $R_{1c}=95\pm 3$ 时,系统处于水平层流状态(Couette 流).当 $R_1\approx R_{1c}$ 时,流动经历第一次失稳,进入螺旋(spiral)涡流状态(缩写为 SPI).随着 R_1 增加,依次进入螺旋涡流与 Taylor 涡流共存态,单纯 Taylor 涡以及湍流 Taylor 涡(TTV)状态.在第二种情况下,流动状态的

相图如图 3 所示. 螺旋涡流、螺旋-Taylor 涡和 Taylor 涡这三种失稳态在内外筒转速不高时都存在, 从流动显示上看与外筒静止时的相应状态类似, 而且螺旋涡流态也是作为首次失稳态出现. 这一特征与迄今在文献中报道的窄间隙圆 Couette 系统典型相图^[1,11]有明显不同. 当外筒转速较高时, 随着内筒 Reynolds 数逐渐增加, 观察到复杂的转变序列, 包括螺旋涡流(SPI)、波动涡流(WVF)、调制(modulated)波动涡流(MWV)、湍流波动涡流(TWV)、湍流 Taylor 涡流(TTV)状态.

综上所述可以看到, 圆 Couette 系统的图案形成和转变序列依赖于两圆筒半径比. 本文提出的中等半径比圆 Couette 系统流动状态相图中的显著特征是新的首次失稳态; 当外筒静止或反向旋转时, 首次失稳出现具有非零方位角波数的螺旋涡流, 在轴向和方位角方向为行进波, 而并非与时间无关的 Taylor 涡. 至于如何计算在实验上可控制的三个参量空间中的稳定边界, 并且进一步揭示圆 Couette 系统流动状态转变过程与半径比的关系, 还是一个有待解决的问题.

附录 A 相反方向旋转的圆 Couette 系统线性特征值问题

在两圆筒相反旋转的圆 Couette 系统, 假定 $R_1 > 0$ 和 $R_2 < 0$. 采用圆柱坐标系, 长度以 $d = r_2 - r_1$ 标度, 速度以内圆筒速度 $r_1 \Omega_1$ 标度, 时间以 $\frac{d^2}{\nu}$ 标度, 不可压缩流体 Navier-Stokes 方程和连续性方程可写成无量纲形式

$$\mathbf{u}_t = \nabla^2 \mathbf{u} - R_1 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A1})$$

其中 $\mathbf{u}$ 和 p 分别为速度和压力场, (A1) 式的基本流动解:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c &= (0, v_c(r), 0), \quad p = p_c(r), \quad v_c(r) = A_c + B_c/r, \\ A_c &= -\frac{\eta^2 - \mu}{\eta(1 + \eta)}, \quad B_c = \frac{\eta(1 - \mu)}{(1 - \eta)(1 - \eta^2)}, \quad p_c(r) = R_1 \int \frac{v_c^2}{r} dr, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

其中 $\eta = r_1/r_2$, $\mu = \Omega_2/\Omega_1$. 要分析这一流动状态是否稳定, 我们给它以很小的扰动, 考察这些扰动是否一直很小. 即令

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}', \quad p = p_c + p', \quad (\text{A3})$$

代入方程组 (A1), 去掉 $\mathbf{u}_c$ 和 p_c 满足方程组的那些项, 只剩下 $\mathbf{u}'$ 和 p' 满足的扰动方程, 再略去扰动量及其导数二阶以上的小量, 就得到线性稳定性问题的方程. 为了书写方便起见, 在所得的方程中去掉各量上的一撇, 于是得到

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \left(\frac{2}{r^2} \right) v_\theta - p_r + 2C(r)v - C(r)u_\theta, \\ v_t &= \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \left(\frac{2}{r^2} \right) u_\theta - \left(\frac{1}{r} \right) p_\theta + 2Du - C(r)v_\theta, \\ w_t &= \nabla^2 w - p_z - C(r)w_\theta, \\ u_r + \left(\frac{1}{r} \right) u + \left(\frac{1}{r} \right) v_\theta + w_z &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

其中系数 $C(r)$ 和 D 为

$$\begin{aligned} D &= -R_1 A = (\eta R_1 - R_2)/(1 + \eta), \\ C(r) &= R_1(A + B/r^2) = -D + \frac{\eta(R_1 - \eta R_2)}{(1 - \eta)(1 - \eta^2)r^2}, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

(A4) 的稳定性取决于 (A4) 式右端所定义的算符的特征值, 可以设

$$\begin{aligned} u &= U(r) \exp[i(kz + m\theta) + \lambda t], \\ v &= V(r) \exp[i(kz + m\theta) + \lambda t], \\ w &= W(r) \exp\left[i\left(kz + \frac{\pi}{2} + m\theta\right) + \lambda t\right], \\ p &= P(r) \exp[i(kz + m\theta) + \lambda t]. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

其中 λ 代表特征值,可能为复数, k 和 m 分别称为轴向和方位角波数, m 可以取零(轴对称情况)或正整数(非轴对称).为了使 $m=0$ 时扰动的模均为实函数,在(A6)式的 w 分量中引入相移($\pi/2$).将(A6)式代入(A4)式,可得下列常微分方程组:

$$\begin{aligned}\lambda U &= U'' + (1/r) U' - [(1 + m^2)/r^2 + k^2] U + 2C(r) V - P' - im[(2/r^2) V + C(r) U], \\ \lambda V &= V'' + (1/r) V' - [(1 + m^2)/r^2 + k^2] V + 2DU - (im/r) P + im[(2/r^2) U - C(r) V], \\ \lambda W &= W'' + (1/r) W' - (m^2/r^2 + k^2) W - kP - imC(r) W, \\ U' + (1/r) U + (im/r) V - kW &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A7})$$

其中用一撇表示对 r 求导数.借助经典的技巧定义新的变量

$$X = U' + (1/r) U - P, \quad (\text{A8})$$

可以从(A7)式中消去压力 P .引入变量

$$Y = V' + (1/r) V, \quad Z = W'. \quad (\text{A9})$$

将(A7)式化为一阶常微分方程组:

$$\begin{aligned}U' &= -(1/r) U + kW - (im/r) V, \\ V' &= -(1/r) V + Y, \\ W' &= Z, \\ X' &= \lambda U + (m^2/r^2 + k^2) U - 2C(r) V + im[(2/r^2) V + C(r) U], \\ Y' &= \lambda V + \left(\frac{2m^2}{r^2} + k^2\right) V - 2DU + im\left(\frac{-2}{r^2} U + C(r) V + \frac{k}{r} W - \frac{1}{r} X\right), \\ Z' &= \lambda W + \left(\frac{m^2}{r^2} + 2k^2\right) W - (1/r) Z - kX + im[-(k/r) V + C(r) W].\end{aligned}\quad (\text{A10})$$

满足的边界条件

$$U = V = W = 0, \quad \text{在 } r = \eta/(1 - \eta), \quad 1/(1 - \eta). \quad (\text{A11})$$

为了考察中性稳定性,我们只需注意特征值 $\lambda=0$ 或 $\lambda=i\omega$ (纯虚数).特征值问题的数值解法自然分为两种情况:
 $m=0$,扰动的模为实函数(轴对称),固定 $\lambda=0$; $m>0$,扰动的模为复函数(非轴对称),令 $\lambda=i\omega$,这里 ω 代表方位角波速.我们采用打靶法求解非线性边值问题的 Newton-Fox 算法,对于固定的半径比 η 值,输入 R_2 值,运用黄金分割搜索程序求解 R_1 对 k 极小值问题.再对可能的 m 值寻求最小的 R_1 临界值,完成中性稳定曲线的计算.

- [1] C. D. Andereck, S. S. Liu, H. L. Swinney, *J. Fluids Mech.*, **164**(1986), 155.
- [2] W. F. R. Langford *et al.*, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 776.
- [3] R. Tagg, *Nonlin. Sci. Today*, **4**(1994), 1.
- [4] P. Chossat and G. Iooss, *The Couette-Taylor Problem*, Springer-Verlag, 1994.
- [5] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge Univ. Press, Cambridge), 1981.
- [6] D. Lortz, *Z. Naturforschung.*, **A48**(1993), 703.
- [7] A. A. Kolyshkin *et al.*, *Phys. Fluids*, **9**(1997), 910.
- [8] K. Kubicek *et al.*, *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures* (Springer-Verlag, New York), 1983.
- [9] W. H. Press *et al.*, *Numerical Recipes in C* (Cambridge Univ. Press, Cambridge), 1992.
- [10] Liu Shusheng *et al.*, *Chinese Phys. Lett.*, **5**(1988), 485.
- [11] Liu Shusheng *et al.*, *Chinese Phys. Lett.*, **8**(1991), 9.

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL STUDY ON THE STABILITY OF COUNTER-ROTATING CIRCULAR COUETTE SYSTEM WITH THE INTERMEDIATE RADIUS RATIO *

HE YU-QUAN LIANG BAO-SHE LIU SHU-SHENG

(*Department of Applied Physics, Tianjin University, Tianjin 300072*)

(Received 16 December 1997; revised manuscript received 3 April 1998)

ABSTRACT

Circular Couette System has served as a paradigm for studying complex transitions to turbulence, the influence of finite geometry on pattern-selection mechanisms. In this paper stability of a circular Couette system with the intermediate radius ratio is investigated through laboratory experiments and computer simulation. The classical Rayleigh centrifugal instability theory is extended to general viscous, incompressible fluid between concentric independently rotating cylinders. A criterion of stability is formulated to quantitatively determine the stability boundary. The laboratory experiments employ the techniques of the laser light scattering and the flow visualization. The apparatus has a radius ratio of $\eta=0.699$ and an aspect ratio of $\Gamma=18$. A striking feature in phase diagram of flow states is the novel primary instability; when the outer cylinder is at rest, or counterrotating, instability occurs first for nonzero azimuthal wave number. Instead of time-independent Taylor vortex flow, the resulting flow is spiral vortices which are traveling waves in both the axial and azimuthal directions. Preliminary experimental measurements of transition Reynolds numbers presented here are in agreement with those obtained numerically. Laboratory and numerical experiments have revealed the effects of radius ratio on pattern formation, the sequence of transitions.

PACC: 4720; 4730; 0545

* Project supported by the National Climbing Program and by the National Natural Science Foundation of China.