

一维元胞自动机随机交通流模型的理论分析与计算机实验^{*}

吕晓阳

(华南师范大学行政学院, 广州 510631)

刘慕仁 孔令江[†]

(广西师范大学物理与电子科学系, 桂林 541001)

(1997 年 11 月 26 日收到; 1998 年 4 月 29 日收到修改稿)

在一维局部作用元胞自动机(CA)交通流模型中, 引入刹车噪声与产生、消失概率, 得到一个完全随机的 CA 交通流模型. 利用平衡自旋理论对该模型的研究表明, 当 $P_{in} = P_{out} \neq 0$ 时, 初始密度分布不影响系统的最终状态, 求得 $\rho_t = 0.5$; 当满足条件 $P_{in} + P_b = 1$ 与 $P_{in} = P_{out}$ 时, 得到简单的“线性”模型, 该模型在条件 $|1 - 2P_{in}| = 1$ 下, 表现出长程相关, 导致严重交通“阻塞”的出现. 理论结果与计算机实验一致.

PACC: 0540

1 引 言

近来, 一维元胞自动机(cellular automaton, 简称 CA)交通流模型得到了较深入的研究^[1-3]. Nagatani 对存在有随机“注入”与“抽出”一粒子(车辆)的一维 CA 交通流模型中的“阻塞间距”分布进行了讨论, 得到了满足有限尺寸标度形式的分布函数^[4]. 接着又在引入“开放”边界条件下, 随机地指定一运行车辆的“刹车”, 得到了相同形式的多个标度公式^[5]. 这些结果都从一定程度上反应了“刹车”和车辆“进出”轨道诸多因素对高速公路运作状态的影响.

本文对交通流中的所有车辆都引入刹车概率 P_b , 同时引入局部条件下的产生与消失概率, 即当出现局部阻塞时, 车辆以 P_{out} 的概率消失, 而出现空隙地段时, 则以 P_{in} 的概率产生一车辆, 这样我们定义了一个完全随机的一维 CA 交通流模型. 利用平衡自旋理论对该模型进行的分析表明, 概率 P_b , P_{in} , P_{out} 对交通状态起决定性的作用.

2 CA 随机交通流模型

2.1 确定性 CA 交通流模型

考虑具有 L 个格点的一维直线链, 其上随机地分布 N 个粒子(车辆), 平均密度 $\rho =$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:19462001)及广西壮族自治区自然科学基金(批准号:9613005)资助的课题.

[†] 通讯联系人.

N/L , 每个粒子只与左右近邻的粒子发生相互作用, 每个格点在时刻 t 要么空着, 要么被一粒子占领, 用布尔变量 e_i^t 表示第 i 个格点 t 时刻的状态, $e_i^t = 1$ 表示有粒子, $e_i^t = 0$ 表示无粒子. 每个粒子根据与邻居的相互作用情况分别处在自左向右运动或静止状态中, 运动规则如下:

1) 在任意时刻, 若该粒子的最邻近前方(右方)格点是空的, 则该粒子向前移动一格.

2) 在任意时刻, 若该粒子的最邻近前方格点存在另一粒子, 则该粒子保持不动, 而不管另一粒子在同一时刻是否向前移动.

3) 所有粒子在同一时刻按规则 1)2) 同步运动, 这种运动是一个时步一个时步不连续地完成的.

若用 e_i^t 和 e_i^{t+1} 分别表示 t 与 $t+1$ 时刻格点 i 的粒子占领状态, 则存在如下演化方程:

$$e_i^{t+1} = e_i^t e_{i+1}^t + e_{i-1}^t \overline{e_i^t}, \quad (1)$$

其中 $\overline{e_i^t} = 1 - e_i^t$ 为布尔变量的补运算. 1)–3) 与 (1) 式定义了一维单速确定性 CA(DCA) 交通流模型, 对应于 Wolfram 的二值三邻居 CA184 号规则^[6]. 在 DCA 交通流模型中, 主要讨论以下两个问题:

1) 系统的粒子在 t 时刻的平均速度 V_t 与粒子密度 ρ 的关系. V_t 定义为 t 时刻移动的粒子数所占有总粒子数的比例: $V_t = N_{\text{move}}/N$, N_{move} 可表示为 $\sum_{i=1}^L (e_i^{t+1} - e_i^t)^2/2$, 于是得到

$$V_t = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^L (e_i^{t+1} - e_i^t)^2. \quad (2)$$

2) 系统的粒子流量与粒子密度 ρ 的关系. 粒子流量(交通流)定义为 $J_t = \rho V_t$. 对于一维单速 DCA 交通流模型, 文献[8]作了较为详细的讨论.

2.2 随机刹车效应

引入随机布尔变量 η_i^t , 取值 1 的概率为 P_b ($0 \leq P_b \leq 1$), 表示 t 时刻格点 i 的移动粒子以 P_b 的概率刹车. 系统的状态方程为

$$e_i^{t+1} = e_i^t e_{i+1}^t + e_i^t \overline{e_{i+1}^t} \eta_i^t + e_{i-1}^t \overline{e_i^t} \overline{\eta_{i-1}^t}, \quad (3)$$

平均速度为

$$V_t = (1 - P_b) \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle, \quad (4)$$

平均粒子流量为

$$J_t = (1 - P_b) \rho - (1 - P_b) \langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle, \quad (5)$$

其中 $\langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle$ 为系统的二点等时关联函数.

刹车概率的引入, 降低了系统的平均速度, 在低密度时也会形成局部的阻塞现象. 图 1 为一组实验结果, 其中刹车概率 $P_b = 0.1$.

2.3 粒子的产生与消失

引入随机布尔变量 δ_i^t 与 ξ_i^t , 分别代表粒子的消失与产生, $\delta_i^t = 1$ 的概率为 P_{out} , $\xi_i^t = 1$

的概率为 P_{in} . 演化规则为

$$\begin{aligned} (011) &\xrightarrow{\delta_i^t} (001), & (111) &\xrightarrow{\delta_i^t} (101), \\ (001) &\xrightarrow{\xi_i^t} (011), & (000) &\xrightarrow{\xi_i^t} (010). \end{aligned} \quad (6)$$

系统的状态方程为

$$e_i^{t+1} = e_i^t e_{i+1}^t \overline{\delta_i^t} + e_{i-1}^t \overline{e_i^t} + e_{i-1}^t \overline{e_i^t} \xi_i^t. \quad (7)$$

粒子的消失与产生可以改善交通状况, 当存在局部阻塞时, 粒子消失相当于车辆从车道转出, 缓解了阻塞, 而当出现局部的空隙地段时, 粒子的产生相当于车辆进入车道而提高了交通流量.

2.4 完全随机模型

同时考虑刹车, 粒子的产生与消失, 定义

下面 8 个概率变量:

$$\begin{aligned} (111) &\xrightarrow{Z} (111), & (011) &\xrightarrow{Y_1} (011), \\ (000) &\xrightarrow{X} (010), & (001) &\xrightarrow{V_2} (011), \\ (101) &\xrightarrow{Y_0} (011), & (100) &\xrightarrow{V_1} (010), \\ (110) &\xrightarrow{Y_2} (110), & (010) &\xrightarrow{V_0} (010). \end{aligned}$$

这 8 个变量与刹车概率 P_b , 产生与消失概率 P_{in} , P_{out} 的关系为

$$\begin{aligned} Z &= 1 - P_{out}, & Y_1 &= 1 - P_{out}, & X &= P_{in}, & V_2 &= P_{in}, \\ Y_0 &= 1 - P_b, & V_1 &= 1 - P_b, & Y_2 &= P_b, & V_0 &= P_b, \\ Z &= Y_1, & X &= V_2, & Y_0 &= V_1, & Y_2 &= V_0, & Y_0 + Y_2 &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

状态演化方程为

$$e_i^{t+1} = e_i^t e_{i+1}^t \overline{\delta_i^t} + e_{i-1}^t \overline{e_i^t} \eta_{i-1}^t + e_{i-1}^t \overline{e_i^t} \xi_i^t + e_i^t e_{i+1}^t \eta_i^t. \quad (9)$$

3 CA 随机交通流模型状态演化分析

3.1 平均场近似

若将状态“1”对应于自旋 1, 状态“0”对应于自旋 -1, 则(8)式确定的 8 个随机变量及演化规则与 Georges 的自旋模型完全对应^[7]:

$$\begin{aligned} Z &= P(1/1, 1, 1), & X &= P(1/-1, -1, -1), \\ Y_1 &= P(1/-1, 1, 1), & V_1 &= P(1/1, -1, -1), \\ Y_0 &= P(1/1, -1, 1), & V_0 &= P(1/-1, 1, -1), \end{aligned}$$

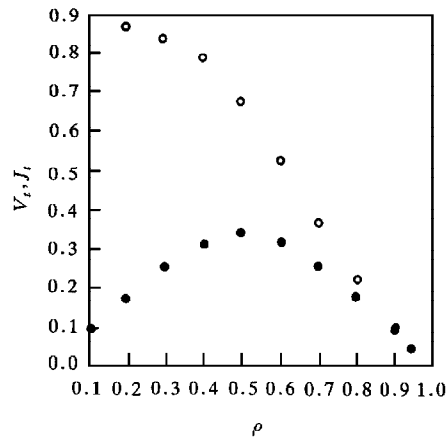


图 1 有刹车 ($P_b=0.1$) 时, V_t , J_t 随 ρ 的变化曲线

○为 V_t ; ●为 J_t

$$Y_2 = P(1/1, 1, -1), \quad V_2 = P(1/-1, -1, 1), \quad (10)$$

其中 $P(e_i^{t+1}/e_{i-1}^t, e_i^t, e_{i+1}^t)$ 为条件概率. 于是可以用处理 Ising 模型的平衡统计力学方法来讨论各种随机因素对一维交通流的影响.

按文献[7]将条件概率写为

$$\begin{aligned} P(e_3/e_0, e_1, e_2) &= \frac{1}{2} [1 \pm e_3 (V \pm T_1 e_2 \pm T_2 e_1 \pm T_0 e_0 \pm U_1 e_0 e_2 \\ &\quad \pm U_0 e_1 e_2 \pm U_2 e_0 e_1 \pm W e_1 e_0 e_2)] \\ &= \frac{1}{2} [1 \pm e_3 F((e_j))], \end{aligned} \quad (11a)$$

其中

$$F((e_j)) = V \pm T_1 e_2 \pm T_2 e_1 \pm T_0 e_0 \pm U_1 e_0 e_2 \pm U_0 e_1 e_2 \pm U_2 e_0 e_1 \pm W e_1 e_0 e_2. \quad (11b)$$

根据(8)式, 各种参数计算结果如下:

$$\begin{aligned} V &= (P_{in} - P_{out})/2, \quad W = 0, \\ T_0 &= (2P_b - P_{out} - P_{in})/2, \quad U_0 = 0, \\ T_1 &= (1 - P_{in} - P_b)/2, \quad U_1 = (1 - P_{out} - P_b)/2, \\ T_2 &= (1 - P_{out} - P_b)/2, \quad U_2 = (P_{in} + P_b - 1)/2, \\ \sum_{i=0}^2 T_i &= (1 - P_{out} - P_{in}), \quad \sum_{i=0}^2 U_i = (P_{in} - P_{out})/2. \end{aligned} \quad (12)$$

将(11a)式等号两边同时乘以 e_3 , 然后对 e_3 求和, 得

$$\sum_{e_3=\pm 1} e_3 P(e_3/(e_j)) = F((e_j)), \quad (13)$$

再将(13)式对整个时空求平均, 则得到粒子密度的系综平均值为

$$\rho(t+1) = \langle e_i^{t+1} \rangle = \langle F((e_j^t)) \rangle. \quad (14)$$

在粒子密度较低情况下, 经过长时间演化, 引入平均场近似, 代入(11b)式, 得

$$\rho(t+1) = V + \left(\sum_{i=0}^2 T_i \right) \rho(t) + \left(\sum_{i=0}^2 U_i \right) \rho^2(t) + W \rho^3(t). \quad (15)$$

将(12)式各种参数代入, 得

$$\rho(t+1) = \frac{1}{2} (P_{in} - P_{out}) + (1 - P_{out} - P_{in}) \rho(t) + \frac{1}{2} (P_{in} - P_{out}) \rho^2(t),$$

$t \rightarrow \infty$ 时, $\rho(t+1) = \rho(t)$, 由上式求得

$$\rho(t) = \frac{(P_{out} + P_{in}) \pm 2\sqrt{P_{out} P_{in}}}{P_{in} - P_{out}}, \quad (16)$$

其中“ $\pm$ ”的选取要保证 $-1 \leq \rho(t) \leq 1$, 即只能取“-”号.

讨论:

1)(16)式中不出现 P_b , 说明刹车噪声不影响粒子的平均密度;

2)(16)式与初始密度无关, 表示存在产生与消失概率时, 初始密度对最终状态无影响;

3) 当 $P_{in}=0, 0 < P_{out} \leq 1$ 时, $\rho(t) = -1$, 即粒子的平均密度 $\bar{\rho}_t = 0$, 此时全路段出现空闲状态. 当 $P_{out}=0, 0 \leq P_{in} \leq 1$ 时 $\bar{\rho}_t = 1$, 即所有格点均被车辆占据, 此时出现完全堵塞情况;

4) 当 $P_{in} = P_{out} \neq 0$ 时, $\rho_t = 0$, 即粒子的平均密度 $\bar{\rho}_t = 0.5$.

3.2 线性模型

考虑一种特殊概况, 令

$$P_{in} = P_{out}, \quad P_b + P_{in} = 1, \quad (17)$$

将(12)式代入(11b)式, 得

$$F((e_j)) = T_1 e_2 + T_2 e_1 + T_0 e_0. \quad (18)$$

(18)式即为一特殊的 CA“线性”随机模型, 其等时关联函数可求得为^[7]

$$\langle e_i(t) e_{i+R}(t) \rangle \sim \exp\left(-\left(\frac{\Delta}{c}\right)^{1/2} R\right) \sim \exp\left(-\frac{R}{\xi_{\perp}}\right), \quad (19)$$

其中

$$\Delta = \ln\left(\sum_j T_j\right)^2, \quad c = \frac{1 - (y_1 - y_2)}{1 + (y_1 - y_2)} = 1, \quad (20)$$

关联长度

$$\xi_{\perp} \sim \Delta^{-\frac{1}{2}} \sim \Delta^{-V_{\perp}}, \quad V_{\perp} = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

当 $\sum_j T_j \rightarrow \pm 1$ 时, 关联长度发散, 出现长程相关. 此时有

$$1 - 2P_{in} = \pm 1. \quad (22)$$

讨论:

1) 取 $P_{in}=0, P_b=1$, 由(8)式和演化方程得出 Wolfram 的 204 号规则, 该规则下所有的粒子都处在静止状态, 即发生“严重阻塞”;

2) 取 $P_{in}=1, P_b=0$, 得出 Wolfram 的 51 号规则, 该规则下粒子的行为仍是一幅交替的静止图像;

3) 由(22)式只能得出两种极端情况, 在各种情况下, 都没有出现初始密度因子, 因此, 粒子的初始分布不影响系统的最终状态, 这是与 DCA 交通流模型的最大区别.

由(9)式还可以求得粒子的平均速度和交通流量与各概率参数的关系为

$$V_t = 1 - P_b - \frac{1 - P_{out} - P_b}{\rho_t} \langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle, \quad (23)$$

$$J_t = (1 - P_b) \rho_t - (1 - P_{out} - P_b) \langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle,$$

其中 ρ_t 由(16)式给出.

由上面的分析可知在 $P_{in} = P_{out} \neq 0$ 条件下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\rho \rightarrow 0.5$, 此时系统的关联 $\langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle$ 很小, 但不为零. 对于线性模型(17)式, 进一步得到

$$V_t = 1 - P_b, \quad J_t = (1 - P_b)/2. \quad (24)$$

4 实验结果

图 2 为考虑了存在刹车概率、产生与消失概率时系统的平均密度与初始密度的关系, 其中 $L=5000$ 个格点, $P_b=0.1$, $P_{in}=P_{out}=0.001$, $t=4000$ 时步, $\bar{\rho}_t$ 为后 2000 步的平均值, 在 $0 \leq P_b \leq 1$ 范围都得到几乎完全相同的结果: $\bar{\rho}_t \rightarrow 0.5$.

图 3 为当 $P_{in}=0.3$ 时, 密度随 P_{out} 的变化曲线, 可见计算机模拟值与 (16) 式一致.

图 4 为系统的平均速度与平均交通流量随刹车概率的变化, 其中 $L=5000$, $P_{in}=P_{out}=0.001$, $t=4000$ 时步, V_t 与 J_t 都是后 2000 步的平均值, 结果与粒子的初始分布无关. 值得注意的是, 即使 $P_b=1$, V_t 也不会为零, 在 P_{in} 较小时, 从图 5 可以看出 V_t 几乎随 P_{in}

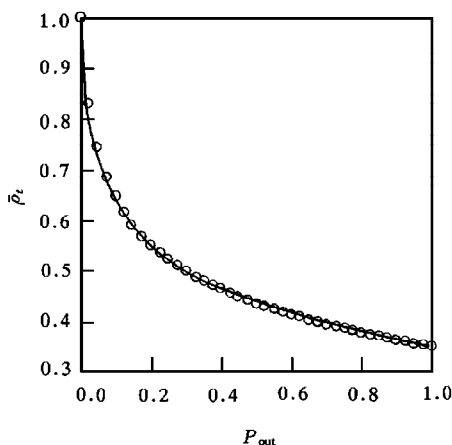
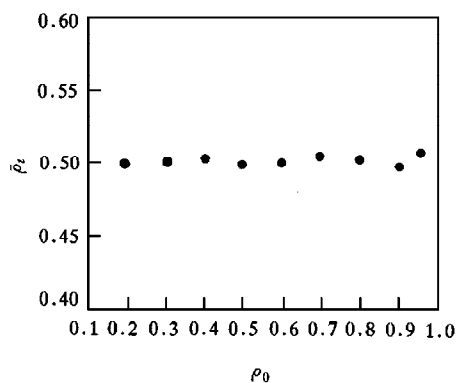


图 2 $\bar{\rho}_t$ 随 ρ_0 的变化曲线 $P_{in}=P_{out}=0.001$, $P_b=0.1$

图 3 $\bar{\rho}_t$ 随 P_{out} ($P_{in}=0.3$) 的变化曲线 $\circ$ 为模拟值, — 为理论值

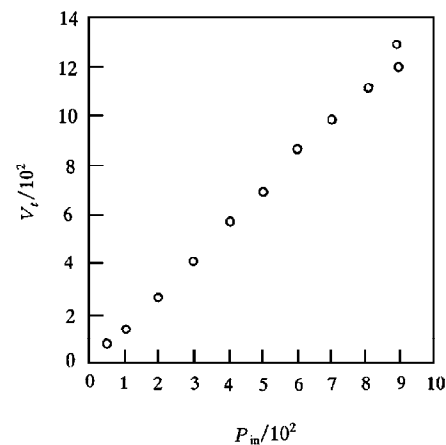
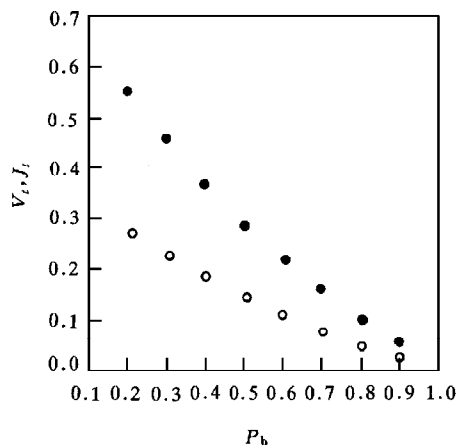


图 4 V_t, J_t 随 P_b 的变化曲线 $P_{in}=P_{out}=0.001$, $\rho_0=0.1$, $\bullet$ 为 V_t , $\circ$ 为 J_t

图 5 V_t 随 P_{in} 的变化曲线 $\rho_0=0.1$, $P_b=1$

线性增加,数值结果为 $V_t = 1.44 P_{in}$.

图 6 为平均速度与产生概率 P_{in} 的关系,它反映了在某个 P_b 下, P_{in} 对 V_t 与 J_t 的影响.

图 7 为“线性”模型中 V_t, J_t 随刹车概率 P_b 的变化,其中 $L=5000, P_{in}=P_{out}=1-P_b, t=4000$ 时步, V_t 与 J_t 都是后 2000 步的平均值,图 7 结果表明 $V_t > 1-P_b$, P_{out} 与 P_{in} 的存在,提高了粒子的平均速率,当改变初始密度 ρ_0 时,图 7 中 V_t, J_t 结果不变.

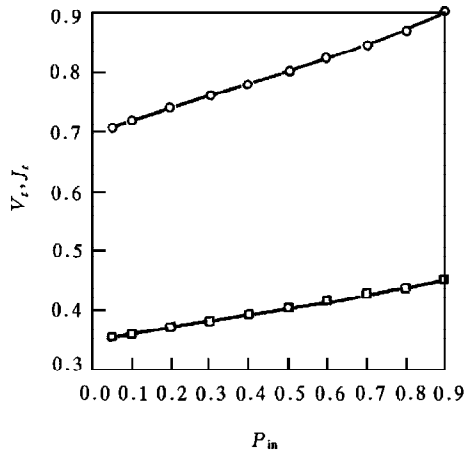


图 6 V_t, J_t 随 $P_{in}=P_{out}$ 的变化曲线 $P_b=0.1, \rho_0=0.1, \square$ 为 $J_t, \circ$ 为 V_t

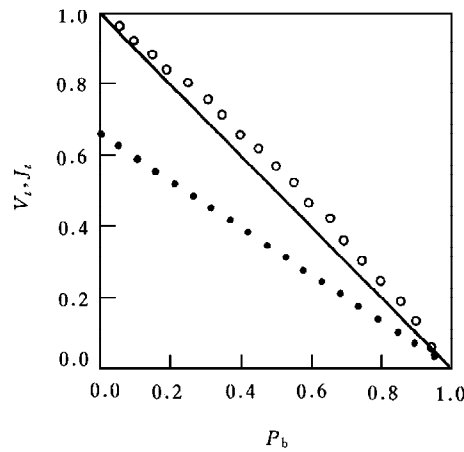


图 7 线性模型的 V_t, J_t 随 P_b 的变化曲线 $\rho_0=0.1, P_{in}=P_{out}=1-P_b, \bullet$ 为 $J_t, \circ$ 为 $V_t, \text{——}$ 为 $1-P_b$

5 讨 论

1. 本文提出的 CA 随机交通流模型引入了三个随机变量:刹车概率、产生概率与消失概率,这三种事件在实际车辆流动中是普遍存在的.当综合考虑三种因素时,得到了完全随机交通流模型.在该模型中车道上车辆数是变化的,我们利用平衡自旋理论讨论该模型,在平均场近似下,得到平均密度 $\bar{\rho}_t$ 仅与 P_{out}, P_{in} 有关(见(16)式).在 $P_{out}=P_{in} \neq 0$ 时,终状态与初始密度分布无关, $\bar{\rho}_t=0.5$;在 $P_{out}=P_{in}, P_{in}+P_b=1$ 的特殊“线性”模型中,存在着导致严重交通阻塞的“相变”现象,其关联长度指数 $V_L=1/2$,与平均场结果相同.

2. 在 CA 随机交通流模型中,除了研究 $\bar{\rho}_t$ 外,重要的是研究系统的平均速度 V_t , 平均流量 J_t .当用布尔变量 e_i^t 表示粒子占领状态,则 V_t 由(2)式定义.在 DCA 交通流模型中,得到了 V_t, J_t 的解析结果^[8].而在 CA 随机交通流模型中,得到了(4),(5),(23)式.从这些表达式可以看出 V_t, J_t 由 P_{out}, P_{in}, P_b 及系统的两点等时关联函数 $\langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle$ 决定.刹车增加了发生交通阻塞的可能性,当不存在产生与消失概率,即使初始密度较低,也会形成局部的阻塞(见图 1).解决局部阻塞的最好办法是允许车辆转变,消失概率担当了这一角色,它可以缓解阻塞的形成,提高系统的平均速度.而粒子的产生概率可提高系统的交通流量.在 CA 理论中,两点等时关联函数 $\langle e_i^t e_{i+1}^t \rangle$ 还没有严格的解析结果,它只有用

近似方法或数值模拟给出. 特别是如果粒子具有多种速度 ($V=0, 1, 2, \dots$), 粒子之间的关联将变得更加复杂, 处理起来十分困难.

3. 对于 CA“线性”随机交通流模型, (24)式与数值模拟结果有些偏离(见图 7). 因此对 V_i 仍需作进一步分析.

- [1] L. C. Q. Vilar *et al.*, *Physica*, **A211**(1994), 84.
- [2] K. Nagel *et al.*, *Phys. Rev.*, **E51**(1995), 2909.
- [3] G. Csanyi *et al.*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(1995), L427.
- [4] T. Nagatani, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(1995), L119.
- [5] T. Nagatani, *Physica*, **A218**(1995), 145.
- [6] S. Wolfran, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 601.
- [7] A. Georges, P. L. Doussal, *J. Statis. Phys.*, **54**(1989), 1011.
- [8] He Yun *et al.*, *J. Guangxi Normal University(Natural Science Edition)*, **15**(1)(1997), 49(in Chinese).

THEORETICAL ANALYSIS AND COMPUTER EXPERIMENTS FOR 1D RANDOM TRAFFIC FLOW MODELS *

L 绊 XIAO-YANG

(Administration Institute, South China Normal University, Guangzhou 510631)

LIU MU-REN KONG LING-JIANG

(Department of Physics and Electronics Science, Guangxi Normal University, Guilin 541001)

(Received 26 November 1997; revised manuscript received 29 April 1998)

ABSTRACT

In this paper we present an entirely random traffic flow model by introducing brake, creation and disappearance probabilities into 1D local interactive cellular automota. By means of equilibrium spin theory, we find that when $P_{in} = P_{out} \neq 0$, the final density of the model is $\bar{\rho}_i = 0.5$ and independent of initial density distribution. When the conditions $P_{in} + P_b = 1$ and $P_{in} = P_{out}$ are satisfied, we get a simple “linear” traffic flow model that displays long distance correlation under the condition $|1 - 2 P_{in}| = 1$ and leads to a serious traffic jam. The computer simulation results agree with the theoretical prediction.

PACC: 0540

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19462001) and by the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region (Grant No. 9613005), China.