

车辆从车道进入与转出的一维多速随机 交通流模型的研究^{*}

李华兵 陈若航 刘慕仁 孔令江

(广西师范大学物理与电子科学系, 桂林 541001)

(1997 年 11 月 26 日收到; 1998 年 4 月 29 日收到修改稿)

应用平均场理论, 研究了有车辆进入车道和从车道转出的一维多速随机交通流模型, 给出了车流达到稳定时的密度分布概率和平均交通流量与几种随机因素的解析结果. 并利用一维元胞自动机模型进行了模拟. 实验模拟与理论计算结果符合.

PACC: 0540

1 引 言

1992 年 Biham 提出了元胞自动机 (cellular automaton, 简称 CA) 交通流模型^[1], 用以研究城市交通网络中的堵塞现象. 文献[2—12]利用这一模型对二维交通流问题和一维交通流 (高速公路的交通流) 问题进行了较深入的研究. 文献[12]着重探讨了有注入和取出的一维车流达到稳定时的自组织临界点和堵塞间隔满足有限尺寸标度形式的分布函数. 他们都得出了许多有意义的结果. 此外, 文献[13, 14]用 PCA 模型对环形单一车道上的交通流性质进行了研究, 分析了在车辆初始分布密度不变的条件下, 车辆运行过程中的随机因素对车辆速度和流量的影响, 得出的理论解析结果和实验模拟结果与实际的交通流状况符合得较好. 然而, 这些研究与实际高速公路的交通流状况还有一定的差距. 为了更好地描述多种因素对高速公路上交通流状况的影响, 本文研究有车辆从车道进入和转出的多速随机交通流模型.

2 模型与演化步骤

2.1 模型

将一维车道等距离地划分为 N 个格点, 格点上为空的或被一车辆占据, 车辆的速度为 $V=0, 1, 2, \dots, V_{\max}$. 车辆的运动满足非对称排斥模型^[1]的要求, 即如果车辆 a 的前方有另一辆车 b , 虽然在同一时步里 b 可能会向前开动, 但 a 车辆不能在同一时步前往占据 b 车辆原来的位置, 以及此位置前方的位置, 这就需要 a 车辆适当地进行减速. 在一定条

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 19462001) 及广西壮族自治区自然科学基金 (批准号: 9613005) 资助的课题.

件下,车辆还可以加速、转入和转出,这些过程必须按一定规则进行,以描述高速公路上车辆的运行情况.

2.2 演化规则

产生阶段:以概率 I_α ($\alpha=0, 1, \dots, V_{\max}$) 在空格点产生不同速度的车辆,相当于不同速度的车辆进入车道占据不同的空格子;

加速阶段:如果车辆速度小于 $V_{\max}$, 则车速加 1, $V' = V + 1$;

减速阶段:如果一辆车到它前面最近邻的另一辆车的距离 Δ 小于或等于 V ($\Delta \leq V$), 则车子减速为 $V' = \Delta - 1$ ($\Delta = i - i'$);

随机减速阶段:如果一辆车车速 $V > 0$, 则以概率 P 将车速减 1, $V' = V - 1$;

转出阶段:如果车辆的车速为零, 则以一定的概率 δ 消失, 它代表车辆的转出;

运动阶段:各车辆以自己的速度向前运动 V_i 个格子.

以上演化步骤作为一个周期反复进行下去, 它实际上描述了较为接近实际的高速公路上车辆的运动状况.

3 模型的理论分析

这里应用平均场理论研究模型的性质. 用 $c_\alpha(i, t)$ 表示 t 时刻 i 格点处车速为 α 的车辆密度分布概率, $c(i, t)$ 表示 t 时刻 i 格点处车辆总的密度分布概率, $d(i, t)$ 表示 t 时刻 i 格点为空的分布概率, 则

$$c(i, t) = \sum_{\alpha=0}^{V_{\max}} c_\alpha(i, t), \quad (1)$$

$$d(i, t) = 1 - c(i, t). \quad (2)$$

以 I_α , P , δ 分别表示产生、随机减速、转出的概率, 则可得出密度分布概率随时间演化的链方程为:

1) 产生阶段

$$c_\alpha(i, t_1) = c_\alpha(i, t) + I_\alpha d(i, t); \quad (3)$$

2) 加速阶段

$$c_0(i, t_2) = 0, \quad (4a)$$

$$c_\alpha(i, t_2) = c_{\alpha-1}(i, t_1) \quad 0 < \alpha < V_{\max}, \quad (4b)$$

$$c_{V_{\max}}(i, t_2) = c_{V_{\max}}(i, t_1) + c_{V_{\max}-1}(i, t_1); \quad (4c)$$

3) 减速阶段

$$c_0(i, t_3) = c_0(i, t_2) + c(i+1, t_2) \sum_{\beta=1}^{V_{\max}} c_\beta(i, t_2), \quad (5a)$$

$$c_\alpha(i, t_3) = c(i + \alpha + 1, t_2) \prod_{j=1}^{\alpha} d(i + j, t_2) \sum_{\beta=\alpha+1}^{V_{\max}} c_\beta(i, t_2) + c_\alpha(i, t_2) \prod_{j=1}^{\alpha} d(i + j, t_2) \quad 0 < \alpha < V_{\max}, \quad (5b)$$

$$c_{V_{\max}}(i, t_3) = \prod_{j=1}^{V_{\max}} d(i+j, t_2) c_{V_{\max}}(i, t_2); \quad (5c)$$

4) 随机减速阶段

$$c_0(i, t_4) = c_0(i, t_3) + P c_1(i, t_3), \quad (6a)$$

$$c_\alpha(i, t_4) = (1 - P) c_\alpha(i, t_3) + P c_{\alpha+1}(i, t_3) \quad 0 < \alpha < V_{\max}, \quad (6b)$$

$$c_{V_{\max}}(i, t_4) = (1 - P) c_{V_{\max}}(i, t_3); \quad (6c)$$

5) 转出阶段

$$c_0(i, t_5) = (1 - \delta) c_0(i, t_4), \quad (7a)$$

$$c_\alpha(i, t_5) = c_\alpha(i, t_4) \quad 1 \leq \alpha \leq V_{\max}; \quad (7b)$$

6) 运动阶段

$$c_0(i, t+1) = c_0(i, t_5), \quad (8a)$$

$$c_\alpha(i, t+1) = c_\alpha(i-\alpha, t_5). \quad (8b)$$

当 $t \rightarrow \infty$, 车辆密度分布概率趋于稳定, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} c_\alpha(i, t+1) = c_\alpha(i-\alpha, t)$ 成立.

在两种速度的情况下, $V=0, 1$, 则上述演化步骤的密度分布概率方程具体列出为

$$c_0(i, t_1) = c_0(i, t) + I_0 d(i, t), \quad (9a)$$

$$c_1(i, t_1) = c_1(i, t) + I_1 d(i, t); \quad (9b)$$

$$c_0(i, t_2) = 0, \quad (10a)$$

$$c_1(i, t_2) = c_1(i, t_1) + c_0(i, t_1); \quad (10b)$$

$$c_0(i, t_3) = c_0(i, t_2) + c(i+1, t_2) c_1(i, t_2), \quad (11a)$$

$$c_1(i, t_3) = d(i+1, t_2) c_1(i, t_2); \quad (11b)$$

$$c_0(i, t_4) = c_0(i, t_3) + P c_1(i, t_3), \quad (12a)$$

$$c_1(i, t_4) = (1 - P) c_1(i, t_3); \quad (12b)$$

$$c_0(i, t_5) = (1 - \delta) c_0(i, t_4), \quad (13a)$$

$$c_1(i, t_5) = c_1(i, t_4); \quad (13b)$$

$$c_0(i, t+1) = c_0(i, t_5), \quad (14a)$$

$$c_1(i, t+1) = c_1(i-1, t_5). \quad (14b)$$

反复应用链方程, 依次将 $t_1, \dots, t+1$ 的过程叠代, 可得

$$c_0 = (1 - \delta) \{ (1 - P) [c + I(1 - c)]^2 + P [c + I(1 - c)] \}, \quad (15)$$

其中

$$I = I_0 + I_1,$$

$$c_1 = (1 - P) [1 - c - I(1 - c)] [c + I(1 - c)]. \quad (16)$$

将(15)和(16)式代入(1)式, 得

$$c = (1 - \delta) \{ (1 - P) [c + I(1 - c)]^2 + P [c + I(1 - c)] \} \\ + (1 - P) [1 - c - I(1 - c)] [c + I(1 - c)],$$

然后解方程, 得

$$c = A \{ [(1 - \delta P - A)^2 + 4AI\delta B]^{1/2} - (\delta P + A - 1) \} / 2\delta B - AI, \quad (17)$$

其中

$$A = (1 - I)^{-1}, \quad B = 1 - P.$$

定义平均流量

$$f = \sum_{a=0}^{V_{\max}} \alpha c_a,$$

对于 $V=0, 1$ 的情况

$$f = c_1. \quad (18)$$

(17)和(18)式给出了 $V=0, 1$ 情况的密度分布概率和流量与各种随机因素的关系. 采用同样的方法, 可以得出对于三种速度 $V=0, 1, 2$ 情况下的密度分布概率与各种随机因素关系的解析表示:

$$c_0 = \frac{\beta E^2 + \beta PE(1 - E)[c + (I - I_0)(1 - c)] + \beta(1 - E)PI_0(1 - c)}{1 + \beta PE(1 - E) - \beta(1 - E)P}, \quad (19)$$

$$c_1 = (1 - P)E(1 - E)F + (1 - P)(c_0 + I_0 d)(1 - E) + P(1 - E)^2 F, \quad (20)$$

$$c_2 = (1 - P)(1 - E)^2 F, \quad (21)$$

其中

$$\beta = 1 - \delta,$$

$$E = (1 - I)c + I,$$

$$F = c - c_0 + (I - I_0)(1 - c).$$

把(19)–(21)式及(1)式组成方程组, 然后解得

$$c = 1 - \frac{2 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{h}{2} \left(-\frac{g^3}{27} \right)^{-1/2} \right] + \frac{4\pi}{3} \right\} \sqrt{-\frac{g}{3}}}{1 - I} - \frac{w_1}{3(1 - I)}, \quad (22)$$

其中

$$g = w_2 - \frac{w_1^2}{3},$$

$$h = w_0 + \frac{2w_1^2}{27} - \frac{w_1 w_2}{3},$$

$$w_0 = \delta(1 - I) / [P(1 - \delta I_0 + \delta)],$$

$$w_1 = \delta(2IP + 1 - I - 2P) / [P(I + \delta I_0 - 2\delta I_0 + \delta)],$$

$$w_2 = (2\delta I + \delta P - I - \delta PI - 2\delta) / [P(I + \delta I_0 - 2\delta I_0 + \delta)],$$

从而流量为

$$f = c_1 + 2c_2. \quad (23)$$

4 结果与讨论

利用(17), (18), (22)和(23)式, 可以得出 c, f 随 I, P, δ 变化的理论曲线(见图 1 至

图 6). 为了便于与理论结果进行比较, 我们用 CA 模型进行模拟, 模拟时格点数 N 取 5000, 初始态密度为 0.3 的均匀分布, 宏观量取达到稳定态后的 200 个状态进行平均. 实验表明, 初始态的分布对稳定后的状态没有影响, 它只影响从初始态演化达到稳定态的运行时间, CA 模型模拟的结果示于相应的图中. 图 1 和图 2 给出 $\delta = P = 0.5$ (对于 $V_{\max} = 1$

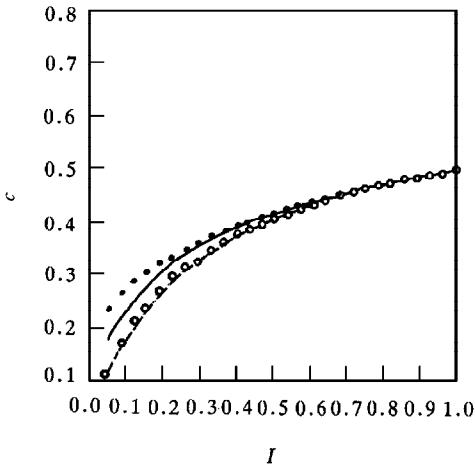


图 1 c 随 I ($\delta = P = 0.5$) 的变化曲线 ---和——分别为 $V_{\max} = 1$ 和 $V_{\max} = 2$ 的理论计算曲线; $\circ$ 和 $\bullet$ 分别为 $V_{\max} = 1$ 和 $V_{\max} = 2$ 的 CA 模型实验模拟曲线

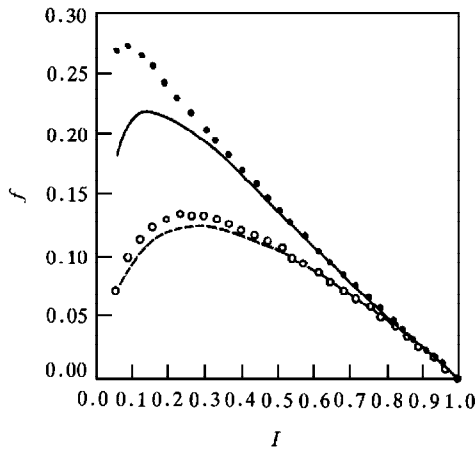


图 2 f 随 I ($\delta = P = 0.5$) 的变化曲线 曲线说明同图 1

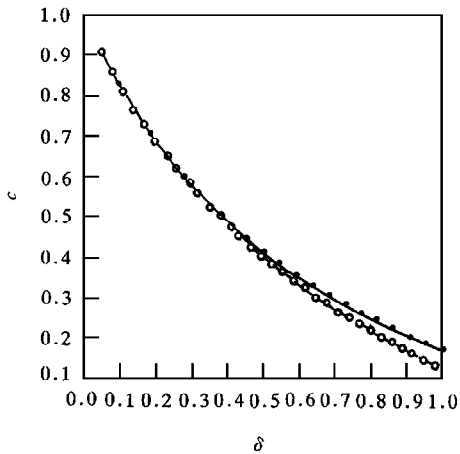


图 3 c 随 δ ($I = P = 0.5$) 的变化曲线 曲线说明同图 1

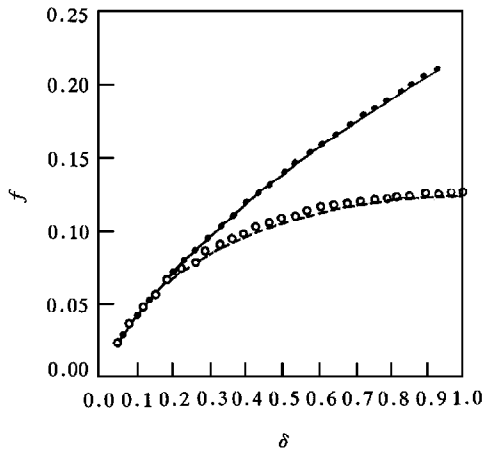


图 4 f 随 δ ($I = P = 0.5$) 的变化曲线 曲线说明同图 1

的情况, I_0 和 I_1 简并, 只需总产生概率 I 就可完全描述车辆的转入情况; 对于 $V_{\max} = 2$ 的情况, I_1 和 I_2 简并, 只需 I_0 和 I 就可完全描述车辆的转入情况. 本文中取 $I_0 = 0.02$, 研究 c, f 随 I 的变化) 时, 密度 c 和流量 f 随产生概率 I 的变化关系. 图 3 和图 4 给出 $I = P = 0.5$ 时, c, f 随取出概率 δ 的变化关系. 图 5 和图 6 给出 $I = \delta = 0.5$ 时, c, f 随随机减

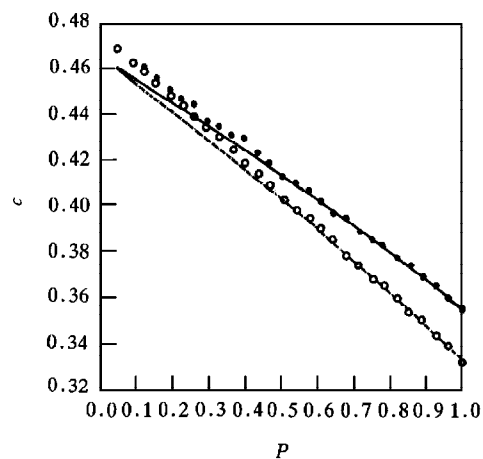


图 5 c 随 $P(I = \delta = 0.5)$ 的变化曲线 曲线说明同图 1

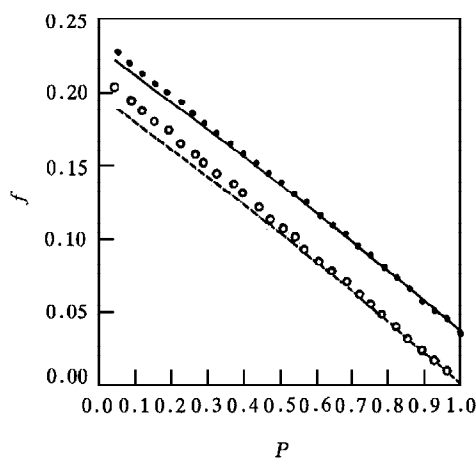


图 6 f 随 $P(I = \delta = 0.5)$ 的变化曲线 曲线说明同图 1

速概率 P 的变化关系.从图中可以看出:

1. c 随 I 的增大而增大,当 $I=1$ 时, c 的最大值为 $1/2$ (见图 1). 流量 f 随 I 的增加将达到一个最大值,此后流量减少 (见图 2), 它们反映车道上随车辆的增加,道路的堵塞状况恶化,当 c 达到 $1/2$ 时, $f=0$, 道路全部堵塞.

2. 图 3 和图 4 表明,随取出概率的增大,车辆密度分布概率下降,相应的车辆运动状况得到改善,从而使流量增大.

3. 图 5 和图 6 表明随机减速概率增大时,取出的可能性随之增大,车辆密度降低,同时,由于随机减速概率增大,使得车辆堵塞的可能性增大,因而流量下降.

4. 在相同的 I, δ, P 下, $V_{\max}=2$ 时车辆的流量大于 $V_{\max}=1$ 时车辆的流量 (极限情况下相等), 说明提高车速上限能改善道路上车辆的运动状况.但同时从图 2 可看出,在这种情况下流量最大值所对应的 I 值减小了: $V_{\max}=1$ 时, $I_c=0.25$, $V_{\max}=2$ 时,理论上 $I_c=0.175$, 实验上 $I_c=0.097$. 因此车速上限提高以后,应当减少车辆的转入,这样才能防止交通堵塞.

5. 从图 2 还可看出,对于 $V_{\max}=2$ 的情况,在 $I<0.3$ 时,理论计算值与实验模拟值的差别较大.这是由于采用了平均场理论,忽略了短程关联而引起.如果把相邻的两个粒子或者三个粒子 (相应地考虑了最近邻相互作用和次近邻相互作用) 作为一个集团进行计算,结果会更好一些^[4].

6. 文献[15]研究的模型与本文研究的模型相近,且都采用平均场近似,确定各种随机因素对交通流的影响.但在具体处理方法上有所不同:(1)文献[15]用布尔变量表示车辆的占有状态,利用平衡自旋理论及系综平均确定各种随机因素对车辆的平均密度的影响,本文则引入各种不同速度车辆密度分布概率 c_α , 直接根据演化规则用各种随机因素表示出来.(2)文献[15]先定义车辆的平均速度 V_t , 然后定义平均流量 $J_t = \rho_t V_t$, 本文只定义车辆的密度分布概率,至于平均流量 f 、平均速度 V_t (在本文中未讨论)很容易求

出来,即

$$f = \sum_{\alpha=0}^{V_{\max}} \alpha c_{\alpha}, \quad V_t = \sum_{\alpha=1}^{V_{\max}} c_{\alpha} / \sum_{\alpha=0}^{V_{\max}} c_{\alpha}.$$

从两篇文章的结果和讨论可以看出,随机因素对交通流的影响定性上一致.

- [1] O. Biham, A. A. Middleton, D. Levine, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), R6124.
- [2] T. Nagatani, *Physica*, **A198**(1993), 108.
- [3] T. Nagatani, T. Seno, *Physica*, **A207**(1994), 574.
- [4] G. Q. Gu, K. H. Chung, P. M. Hui, *Physica*, **A217**(1995), 339.
- [5] T. Nagatani, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**(1993), L781.
- [6] T. Nagatani, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**(1993), L1015.
- [7] Lü Xiao-yang *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 435(in Chinese).
- [8] B. H. Wang, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**(1996), L31.
- [9] L. G. Brunnet, *Physica*, **A237**(1997), 59.
- [10] T. Nagatani, *Physica*, **A218**(1995), 145.
- [11] K. Nagel, H. J. Herrmann, *Physica*, **A199**(1993), 254.
- [12] G. Csányi, J. Kertész, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(1995), L427.
- [13] L. C. Q. Vilar, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **211**(1994), 84.
- [14] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel *et al.*, *Phys. Rev.*, **E51**(1995), 2939.
- [15] Lü Xiao-yang, Liu Mu-ren, Kong Ling-jiang, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 1761(in Chinese).

INVESTIGATION OF A 1D MULTI-SPEED STOCHASTIC MODEL FOR TRAFFIC FLOW WITH INJECTION AND EXTRACTION*

LI HUA-BING CHEN RUO-HANG LIU MU-REN KONG LING-JIANG

(Department of Physics and Electronic Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004)

(Received 26 November 1997; revised manuscript received 29 April 1998)

ABSTRACT

We investigate a 1D multi-speed stochastic model for traffic flow with injection and exfraction, and get the analytical results of the dependence of the car probability and traffic flow on the stochastic factors when the traffic flow is stationary. Then a 1D cellular automation model is used to simulate the model, the theoretic analytical results agree with the simulation.

PACC: 0540

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19462001) and by the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region (Grant No. 9613005), China.