

位移二项式态与位移负二项式态的性质 及其与二能级原子的相互作用^{*}

王晓光¹⁾²⁾ 于荣金²⁾ 李 文³⁾

1)(中国科学院物理研究所, 北京 100080)

2)(中国科学院长春物理研究所激发态物理开放研究实验室, 长春 130021)

3)(长春大学机械工程学院, 长春 130022)

(1998 年 3 月 6 日收到)

提出并研究两种新的量子光场态: 位移二项式态和位移负二项式态. 讨论了两种量子态的光子数分布、亚泊松分布特性. 结果表明: 位移二项式态是介于相干态与位移粒子数态之间的一种量子中间态, 在不同参数下可表现亚泊松分布和超泊松分布; 位移负二项式态是介于相干态与位移 Susskind-Glogower 位相态之间的量子中间态, 它只表现超泊松分布. 研究了它们与二能级原子在强度耦合情况下相互作用原子反转的动力学演化.

PACC: 4250

1 引 言

自从理论上引入二项式态^[1] (binomial states) 和负二项式态^[2] (negative binomial states) 之后, 人们对它们的性质进行了仔细的研究^[1-9]. 特别是 1987 年 Dattoli 等人提出二项式态在自由电子激光中的产生机制^[2]; 1992 年 Agarwal^[7] 和最近 Fu^[9] 等人提出负二项式态的产生机制. 这更增加了人们对这两种量子态的兴趣.

二项式态的定义^[1] 为

$$\begin{aligned} |\eta; M\rangle &= \sum_{n=0}^M C_n |n\rangle, \\ C_n &= \binom{M}{n}^{1/2} \eta^n (1-\eta^2)^{(M-n)/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 η 为实数 ($0 < \eta^2 < 1$), M 为正整数 (对负二项式态 η 和 M 也满足同样的性质). 其光子数分布为概率论中的二项式分布^[10], 始终表现为亚泊松分布. 负二项式态定义为^[9]

$$|\eta; M\rangle^- = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- |n\rangle,$$

^{*} 中国科学院“九五”重大项目基金(批准号: 980810)和吉林省教育委员会青年科学基金(批准号: 9615)资助的课题.

$$C_n = \binom{M+n-1}{n}^{1/2} \eta^n (1-\eta^2)^{M/2}, \quad (2)$$

其光子数分布为概率论中的负二项式分布, 表现为超泊松分布.

Joshi 等人研究了压缩二项式态和压缩负二项式态^[2], 其中压缩二项式态是介于压缩相干态与压缩粒子数态之间的一种量子中间态. 本文提出并研究位移算符 $D(\alpha)$ ($D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$) 作用在二项式态(负二项式态)所得到的位移二项式态(位移负二项式态)的特性. 由于位移任意量子态 $D(\alpha)|\psi\rangle$ 与量子态 $|\psi\rangle$ 正交算符压缩特性相同^[11], 所以我们只研究其亚泊松分布特性. 因为二项式态和负二项式态原则上可以产生, 而变换 $D(\alpha)$ 又很容易由受迫谐振子系统来实现^[12], 故而原则上可以产生这两种新的量子态.

2 位移二项式态与位移负二项式态

位移二项式态可定义为

$$|\alpha, M, \eta\rangle = D(\alpha) \sum_{n=0}^M C_n |n\rangle. \quad (3)$$

为讨论问题方便, 设 α 为实数. 由于二项式态在不同极限下趋近于粒子数态和相干态^[1], 所以易知位移二项式态是介于相干态与位移粒子数态之间的一种量子中间态.

进一步, 将位移二项式态写成如下形式:

$$|\alpha, M, \eta\rangle = \sum_{n=0}^M C_n D(\alpha) |n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^M C_n D_{mn}(\alpha) \right) |m\rangle, \quad (4)$$

其中

$$D_{mn}(\alpha) = \langle m | D(\alpha) | n \rangle = \frac{(-1)^n \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \alpha^{m+n}}{\sqrt{m! n!}} {}_2F_0\left(-m, -n; -\frac{1}{\alpha^2}\right) \quad (5)$$

是位移算符在粒子数态之间的矩阵元, 其中

$$\begin{aligned} {}_2F_0(\alpha, \beta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!} z^n, \\ (\lambda)_0 &= 1, \\ (\lambda)_n &= \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1) \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (6)$$

为广义超几何函数^[13]. 这种新的广义超几何函数表达的矩阵元可以利用位移算符的因子化形式计算出来. 它较之以往分两步表达的广义拉盖尔函数表达方式^[4]更简洁, 而且易于数值计算. 众所周知, 压缩算符在粒子数态之间的矩阵元也可以用超几何函数来表达. 这样, 这些矩阵元就统一地用超几何函数表达出来.

位移二项式态的光子数分布为

$$P(m) = \left| \sum_{n=0}^M C_n D_{mn}(\alpha) \right|^2. \quad (7)$$

图 1 为位移二项式态的光子数分布情况. 当 $\eta=0.1$ 时, 二项式态趋近于真空态, 位移二项式态的光子数分布趋近于相干态的泊松分布(图 1 曲线 a); 当 $\eta=0.99$ 接近于 1

时,二项式态趋近于 Fock 态 $|2\rangle$, 此时位移二项式态的光子数分布趋近于位移粒子数态 $D(\alpha)|2\rangle$ (图 1 曲线 c), 有三个峰值, 这与以前的结果一致^[11] (位移粒子数态 $D(\alpha)|M\rangle$ 有 $M+1$ 个峰值). 如果 $\eta=0.8$, 还可以看到三个起伏, 但比之 $D(\alpha)|2\rangle$, 左边的两个起伏较低 (图 1 曲线 b). 可见, 位移二项式态的光子数分布是介于相干态和位移粒子数态之间的一种分布.

由 (7) 式可得以下平均值:

$$\langle a^+ a \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m P(m), \quad \langle (a^+ a)^2 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P(m) \quad (8)$$

和 Mandel Q 参数^[12]

$$Q = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle} - 1. \quad (9)$$

图 2 为位移二项式态的 Q 参数随 α 的变化情况. 当 $\eta=0.01$ 时 (图 2 曲线 c), Q 参数曲线为一条直线, $Q \approx 0$, 非常接近于泊松分布; 当 $\eta=0.5$ 时 (图 2 曲线 d), 位移二项式态始终为亚泊松分布; 当 $\eta=0.8$ 和 $\eta=0.99$ 时 (图 2 曲线 b 和 a), 位移二项式态在 α 较小时为亚泊松分布, 当 α 变大时为超泊松分布.

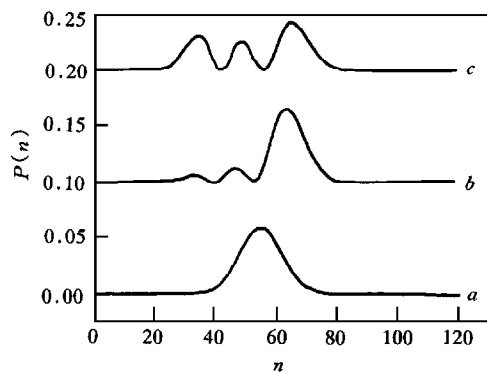


图 1 位移二项式态的光子数分布 ($\alpha=7$, $M=2$)
曲线 a: $\eta=0.1$; 曲线 b: $\eta=0.8$; 曲线 c: $\eta=0.99$

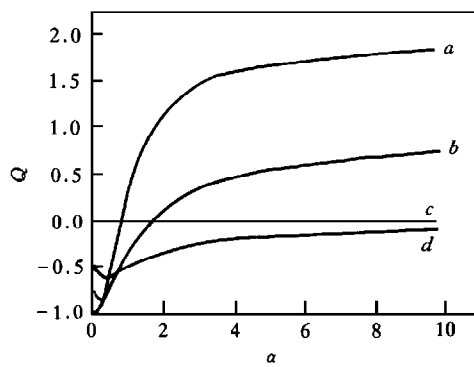


图 2 位移二项式态的 Q 参数 ($M=1$) 曲线 a: $\eta=0.99$; 曲线 b: $\eta=0.8$; 曲线 c: $\eta=0.01$; 曲线 d: $\eta=0.5$

位移负二项式态定义为

$$|\alpha, M, \eta\rangle^- = D(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- |n\rangle. \quad (10)$$

由于负二项式态在不同极限下趋近于真空态和 Susskind-Glogower 位相态^[14], 所以位移负二项式态是介于相干态与位移位相态之间的一种中间态. 将位移负二项式态写成如下形式:

$$|\alpha, M, \eta\rangle^- = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- D(\alpha) |n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n^- D_{mn}(\alpha) \right) |m\rangle, \quad (11)$$

位移负二项式态的光子数分布为

$$P(m) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- D_{mn}(\alpha) \right|^2. \quad (12)$$

图 3 为在不同参数 α 时位移负二项式态的光子数分布情况. 由图 3 可知, 随 α 的增加, 位移负二项式态的平均光子数增加, 曲线向右移动, 分布变宽, 峰值高度变低.

图 4 为位移负二项式态的 Q 参数随 α 的变化情况. 由图 4 可见, 位移负二项式态和负二项式态一样, 都为超泊松分布. 当 η 增大时, Q 值增加.

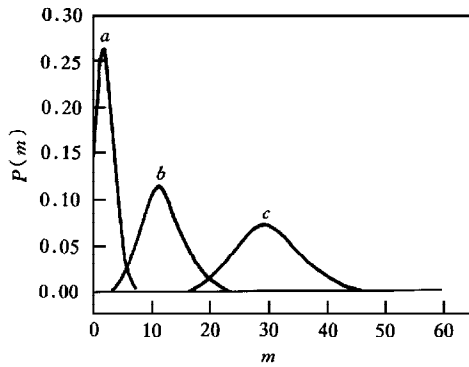


图 3 位移负二项式态的光子数分布 ($\eta=0.2$, $M=5$) 曲线 a: $\alpha=1.0$; 曲线 b: $\alpha=3.0$; 曲线 c: $\alpha=5.0$

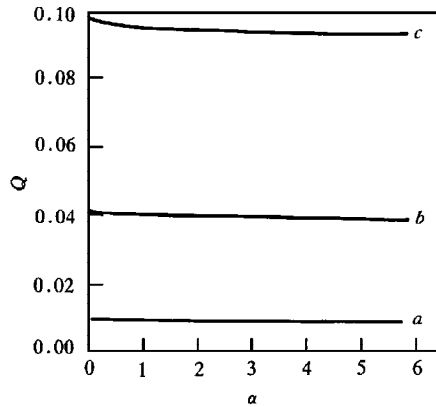


图 4 位移负二项式态的 Q 参数 ($M=5$) 曲线 a: $\eta=0.1$; 曲线 b: $\eta=0.2$; 曲线 c: $\eta=0.3$

3 位移二项式态和位移负二项式态与二能级原子的相互作用

选择强度耦合的情况, 在旋转波近似和偶极近似下, 原子与单模场强度耦合相互作用的哈密顿量为 ($\hbar=1$)^[15,16]

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_3 + g(\sigma_+ a \sqrt{a^\dagger a} + \sigma_- \sqrt{a^\dagger a} a), \quad (13)$$

σ_3 , $\sigma_\pm$ 为跃迁频率为 ω_0 的原子的赝自旋算符, a 和 $a^\dagger$ 分别为频率为 ω 的单模光场的湮没和产生算符, g 为原子与场的耦合常数.

设失谐量 $\Delta = \omega_0 - \omega = 0$ (共振情况), 原子初态为激发态, 光场初态为位移二项式态或位移负二项式态, 则可得原子反转为^[15-18]

$$\langle \sigma_3 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cos[2g(n+1)/t]. \quad (14)$$

图 5 为光场初态为位移二项式态时原子反转的演化. 当 $\eta=0.1$ 时, 原子反转的演化与光场初态为相干态 $|\alpha\rangle$ 时的演化类似, 可看见明显的周期性崩塌与复苏现象. 当 η 增加时, 崩塌区变窄, 复苏区变宽, 复苏区振荡加强, 第一复苏时间不变 (2π). 复苏区的激烈振荡是光子数分布有多个峰之故.

图 6 为光场初态为位移负二项式态不同 α 时原子反转的演化. 当 $\alpha=1.0$ 时, 崩塌与复苏现象不明显 (图 6 曲线 c). 当 α 增加时, 崩塌与复苏现象越来越明显, 且崩塌区变宽, 复苏区变窄, 第一复苏时间不变 (2π) (图 6 曲线 a 和 b).

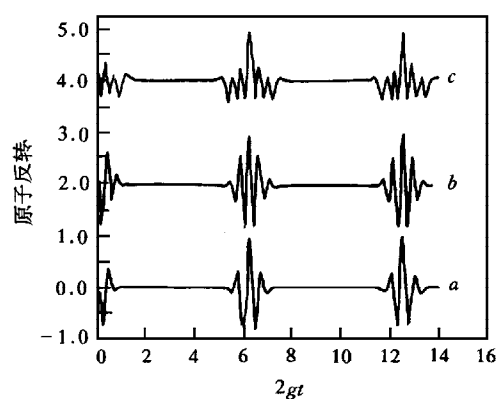


图5 光场初态为位移二项式态时原子反转的演化 ($\alpha=3, M=2$) 曲线 a: $\langle \sigma_3 \rangle, \eta=0.1$; 曲线 b: $\langle \sigma_3 \rangle + 2, \eta=0.5$; 曲线 c: $\langle \sigma_3 \rangle + 4, \eta=0.99$

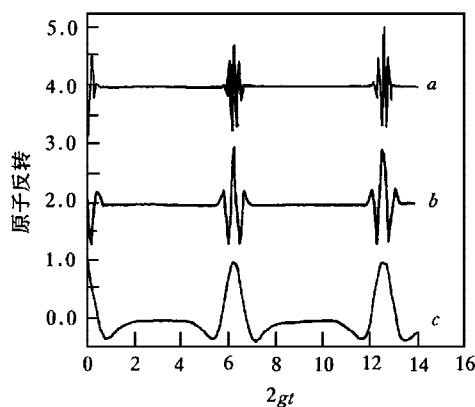


图6 光场初态为位移负二项式态时原子反转的演化 ($\eta=0.2, M=5$) 曲线 a: $\langle \sigma_3 \rangle, \alpha=5.0$; 曲线 b: $\langle \sigma_3 \rangle + 2, \alpha=3.0$; 曲线 c: $\langle \sigma_3 \rangle + 4, \alpha=1.0$

4 结 论

本文提出了两种在物理上可以实现的量子光场态:位移二项式态和位移负二项式态. 它们都可以表达为位移粒子数态的叠加态. 位移二项式态是介于相干态与位移粒子数态之间的一种量子中间态, 所以可以很方便地研究相干态到位移粒子数态各种性质的连续变化. 随参数选择的不同, 它可以表现亚泊松分布和超泊松分布. 位移负二项式态是介于相干态和 Susskind-Glogower 位相态之间的一种量子态, 与负二项式态一样, 其始终表现为超泊松分布. 原子反转的动力学演化是由光子数分布来决定. 位移二项式态的光子数分布可以有多个波峰, 导致在动力学演化中, 原子反转呈现剧烈的振荡现象.

在位移负二项式态与二能级原子相互作用中, 当 α 较小时, 崩塌与复苏现象不明显; 当 α 增大时, 才出现明显的崩塌与复苏现象.

总之, 位移二项式态与位移负二项式态的提出, 有助于系统地研究从相干态到位移粒子数态、从相干态到位移 Susskind-Glogower 位相态的光子数分布情况, 以及光场性质的缓变过程.

作者之一(王晓光)感谢孙昌璞教授和付洪忱教授的鼓励与帮助.

- [1] D. Stoler, B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Opt. Acta*, **32**(1985), 345.
- [2] A. Joshi, S. V. Lawande, *J. Mod. Opt.*, **38**(1989), 2009.
- [3] G. Dattoli, J. Gallardo, A. Torre, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1987), 185.
- [4] A. V. Barranco, J. Roversi, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 5233.
- [5] A. Joshi, R. R. Puri, *J. Mod. Opt.*, **36**(1989), 557.
- [6] H. Y. Fan, S. C. Jing, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 1909.
- [7] G. S. Agarwal, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 1787.

- [8] R. D. Souza, A. P. Mishra, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 6925.
- [9] H. C. Fu, R. Sasaki, *J. Phys. Soc. Jap.*, **66**(1997), 1989.
- [10] W. Feller, *An Introduction to Probability: Theory and Its Applications*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1957), Vol. 1.
- [11] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 2645.
- [12] G. C. Guo, *Quantum Optics*(Advanced Education Publishing, Beijing, 1990)(in Chinese).
- [13] Z. X. Wang, D. Y. Gou, *Introduction to Special Functions*(Science Press, Beijing, 1979)(in Chinese).
- [14] L. Susskind, J. Glogower, *Physics*, **1**(1964), 49.
- [15] B. Buck, C. V. Sukumar, *Phys. Lett.*, **A81**(1981), 13222.
- [16] X. G. Wang, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 17.
- [17] X. G. Wang, R. J. Yu, *Acta Sinica Quantum Optica*, **3**(1997), 158(in Chinese).
- [18] X. G. Wang, R. J. Yu, *Acta Optica Sinica*, to be published(in Chinese).

THE PROPERTIES OF DISPLACED BINOMIAL STATES AND DISPLACED NEGATIVE BINOMIAL STATES AND THEIR INTERACTION WITH TWO-LEVEL ATOMS *

WANG XIAO-GUANG¹⁾²⁾ YU RONG-JIN²⁾ LI WEN³⁾

1)(*Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

2)(*Laboratory of Excited State Processes, Changchun Institute of Physics, Academia Sinica, Changchun 130021*)

3)(*College of Mechanical Engineering, Changchun University, Changchun 130022*)

(Received 6 March 1998)

ABSTRACT

In this article, we propose two new quantum field states, displaced binomial state and displaced negative binomial state. Their photon number distributions and sub-Poissonian properties are discussed. The results show that the displaced binomial state is a kind of intermediate quantum state between the coherent state and displaced number state and it may be sub-Poissonian and super-Poissonian at different parameters. The displaced negative binomial state is always super-Poissonian and is an intermediate state between coherent state and displaced Susskind-Glogower phase state. Finally, we study the dynamical evolution of atomic population inversion in the intensity-dependent interaction between these two states and two-level atoms.

PACC: 4250

* Project supported by the Science Foundation for Great Significant Items in the ninth "Five-Year Projects" from Chinese Academy of Sciences (Grant No. 980810) and by the Youth Science Foundation of the Education Commission of Jilin Province (Grant No. 9615), China.