

时空非对称光脉冲在饱和自聚焦 克尔介质中的传输^{*}

李建庆¹⁾²⁾³⁾ 周国生¹⁾ 杨伯君²⁾ 徐大雄³⁾

1)(山西大学电子信息技术系,太原 030006)

2)(北京邮电大学基础科学部,北京 100876)

3)(北京邮电大学电子工程系,北京 100876)

(1997 年 1 月 20 日收到;1997 年 3 月 7 日收到修改稿)

综合考虑了在 $(2+1)$ 维饱和自聚焦克尔介质中空间和时间非对称光脉冲的传输问题.利用变分法得到了光脉冲在传输中的准动量、能量守恒律.利用数值法研究了初始不对称光脉冲饱和和强度、耦合强度对其束宽、脉冲宽度的影响.

PACC: 4265

1 引 言

对光脉冲在负色散克尔介质中的传输问题已作过大量研究,这类问题由非线性薛定谔方程描述^[1].当光束的自聚焦作用与衍射作用正好抵消时,光束会在介质中传播很长距离而其直径没有任何变化,即光的自陷.在 $(1+1)$ 维(t 和 z 方向)情形下,理论上已获得稳定解,实验上已在光纤中观察到孤子的存在.理论研究发现,在横向多于一维的情形下,当非线性的作用很强时,在负色散克尔介质中可能会引起光束的强烈压缩而崩塌^[1].由于饱和效应,可能在崩塌前光脉冲会形成“光弹”^[2],这引起人们极大的兴趣.但这种理论预计是假定光脉冲在时间和空间有对称解并采用柱坐标形式^[3].事实上,时间和空间对称这一条件十分苛刻,在通常情况下不易满足.本文将采用变分法和数值法对时空非对称的初始光脉冲在饱和克尔介质中的传输作一般性研究.用自相似假定,以高斯型光脉冲作为特例研究在传输过程中脉冲宽度和束宽随传输距离的变化.

2 光脉冲传输的一般描述

在下面的分析讨论中,我们假定折射系数具有如下形式:

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

$$n^2 = n_0^2 + \frac{n_0 n_2 |E|^2}{1 + n_0 n_2 / (n_{\text{sat}}^2 - n_0^2) |E|^2}, \quad (1)$$

其中 E 定义为包络电场, n_{sat} 为饱和系数, n_2 为非线性克尔系数. 很多物质都具有这种饱和和折射系数. 例如稀薄的气体、某种条件下的平面波导、高非线性系数的酸性玻璃^[3]. 考虑到饱和效应, 修正的薛定谔方程为^[3]

$$iU_z + \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{tt}) + \frac{UU^*}{1 + \beta UU^*} U = 0. \quad (2)$$

在方程(2)的推导中, 我们假定纳秒量级或皮秒量级的光脉冲在平板波导中传输, 其中归一化慢变包络振幅 $U^2 = (n_2/n_0) E^2$, 饱和常数 $\beta = n_0^2 / (n_{\text{sat}}^2 - n_0^2)$, 归一化时间 $t \propto \left(t_1 - \frac{z_1}{v_g}\right)$, 传输方向和横向的归一化坐标分别为 $z \propto z_1$ 和 $x \propto x_1$, v_g 是群速度色散,

t_1 , x_1 , z_1 分别是时间和空间坐标. 由(2)式可得在传输过程中准粒子数(I), 正则动量($\mathcal{P}$)和准粒子总能量(H)是恒定的, 它们分别为

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} UU^* dx dt, \quad (3)$$

$$\mathcal{P} = \iint_{-\infty}^{\infty} p dx dt, \quad (4)$$

$$H = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} \nabla U \cdot \nabla U^* + F \right] dx dt, \quad (5)$$

其中

$$p = \frac{i}{2} [(UU_x^* - U^* U_x) x + (UU_t^* - U^* U_t) t], \quad (6)$$

$$F = \int_0^{UU^*} \frac{\eta}{1 + \beta \eta} d\eta. \quad (7)$$

上述公式中 $\nabla = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}$, x 和 t 分别代表这两个方向上的单位矢量. $f(x, t, z)$ 为任意函数, 定义

$$\langle f \rangle = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} U^* f U dx dt}{I}, \quad (8)$$

可得

$$\frac{d}{dz} \langle f \rangle = \langle f_z \rangle + \iint_{-\infty}^{\infty} p \cdot \nabla f dx dt. \quad (9)$$

令 $f = x^2$ 和 t^2 , 通过一系列运算可得

$$\frac{d^2}{dz^2} \langle x^2 \rangle = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \left(U_x U_x^* - UU^* \frac{UU^*}{1 + \beta UU^*} + F \right) dx dt, \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \langle t^2 \rangle = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \left(U_t U_t^* - UU^* \frac{UU^*}{1 + \beta UU^*} + F \right) dx dt. \quad (11)$$

只要慢变包络近似是正确的, 不管 U 的波形如何, 上述方程都是精确的.

3 光脉冲传输的势阱描述和数值模拟

我们感兴趣的是光脉冲在饱和自聚焦克尔介质中传输时,脉冲宽度和束宽的传输规律.为了研究光脉冲的脉冲宽度和束宽的传输特性,必须假定 U 为具体的尝试函数,这是变分法最关键的一步,因为近似解的精确程度完全取决于尝试函数的近似程度.选取尝试函数的优点是能得到某些物理量的具体特性,缺点是不能说明脉冲形状类型的变化.如果我们用高斯型的尝试函数,则在光脉冲的传输过程中,脉冲的振幅、脉冲宽度和束宽可以变化,但脉冲的波形始终为高斯型,这就是自相似假定.如果尝试函数和精确解的波形类型相差较大,则自相似假定就不适用.我们假定光脉冲在时间和空间上都是高斯型的.这不是唯一的选择,但这种选择不仅对于研究光脉冲的传输特性近似程度非常好而且能简化计算^[1,3].设输入光脉冲由

$$U_0 = A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{W_0^2} + i q_0 x^2 - \frac{t^2}{T_0^2} + i b_0 t^2\right) \quad (12)$$

表示,在传输过程中由

$$U = A(z) \exp\left[-\frac{x^2}{W^2(z)} + i q(z) x^2 - \frac{t^2}{T^2(z)} + i b(z) t^2 + i \phi(z)\right] \quad (13)$$

表示,(13)与(12)式相似,其中 $W(z)$, $T(z)$ 分别代表束宽和脉冲宽度的变化.定义 $\alpha = W/T$ 为非对称比,则 $\alpha_0 = W_0/T_0$ 为初始非对称比.下面的讨论假定 $\alpha_0 > 1$, $T_0 = 1$, 当 $\alpha_0 < 1$ 时,脉冲宽度和束宽规律互换.把(13)式代入(10), (11)式中可得

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = \frac{4}{W^3} + \frac{4}{\beta^2 C} T[\ln(1+K) - l(K)], \quad (14)$$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{4}{T^3} + \frac{4}{\beta^2 C} W[\ln(1+K) - l(K)], \quad (15)$$

其中 $K = \beta A^2$ 定义为饱和强度,则 $K_0 = \beta A_0^2$ 为初始饱和强度; $C = 2I/\pi$ 定义为耦合强度; $l(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+\xi)}{\xi} d\xi$. (14) 和 (15) 式积分一次相加可得 W 和 T 的二维势阱描述

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dz}\right)^2 + \Pi(W, T) = 0, \quad (16)$$

其中

$$\Pi(W, T) = F(W, T) - F(W_0, T_0), \quad (17)$$

$$F(W, T) = 4\left(\frac{1}{W^2} + \frac{1}{T^2}\right) + \frac{8}{\beta^2 C} W T l(K). \quad (18)$$

$F(W_0, T_0)$ 是假定在 $z=0$, $W=W_0$, $T=T_0$, $\frac{dW}{dz}\Big|_{z=0} = \frac{dT}{dz}\Big|_{z=0} = 0$ 时的积分常数.显然 $\Pi(W, T)$ 在 $z=0$ 处有一个零点.如果 W 和 T 趋于无穷时 $\Pi(W, T) > 0$, 则 $\Pi(W, T)$ 有其它零点, $\Pi(W, T)$ 将成为一个势阱,脉冲宽度 $T(z)$ 和束宽 $W(z)$ 将在这些零点之间振荡.如果 W 和 T 趋于无穷时, $\Pi(W, T) < 0$, 则 $\Pi(W, T)$ 将没有其他零点. $\Pi(W, T)$ 是否有其他零点的判据是

$$\lim_{W, T \rightarrow \infty} \Pi(W, T) = 0,$$

即在 K_0 - C 平面上由

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_0} + \alpha_0 \right) \frac{K_0^2}{K_0 - l(K_0)} \equiv C_{0p} \quad (19)$$

决定的曲线, 在图 1 中为曲线 2. $C > C_{0p}$, 脉冲宽度和束宽将振荡. $C < C_{0p}$, 脉冲宽度和束宽将单调展宽.

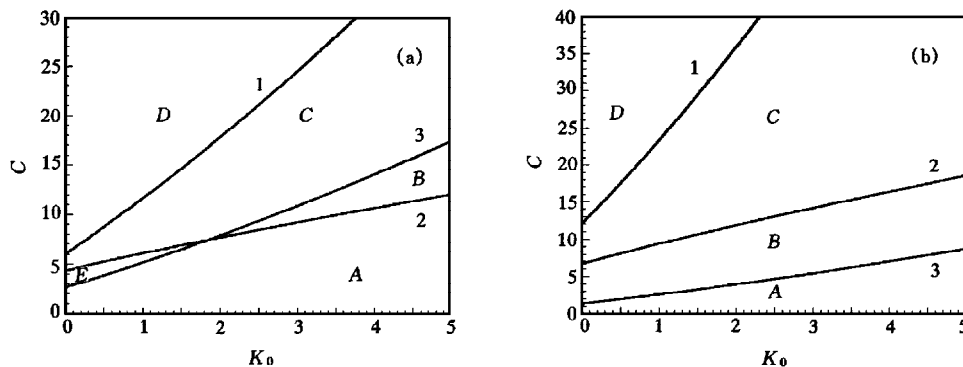


图 1 在 K_0 - C 平面上不同的区域 (a) 为 $\alpha_0 = 1.5$, (b) 为 $\alpha_0 = 3$

我们感兴趣的是光脉冲压缩的可能性, 研究光脉冲脉冲宽度和束宽的初始变化趋势是非常重要的. 根据 $\frac{d^2 W}{dz^2}$ 和 $\frac{d^2 T}{dz^2}$ 初始值的正负可知光脉冲脉冲宽度和束宽初始变化趋势是增大还是减小. 在图 1 中曲线 1 和曲线 3 分别是在 $z=0$ 处由 $\frac{d^2 W}{dz^2} = 0$ 和 $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$ 在 K_0 - C 平面上决定的曲线, 即由

$$C = \frac{1}{\alpha_0} \frac{K_0^2}{l(K_0) - \ln(1 + K_0)} \equiv C_{0w} \quad (20)$$

和

$$C = \alpha_0 \frac{K_0^2}{l(K_0) - \ln(1 + K_0)} \equiv C_{0T} \quad (21)$$

所决定的曲线. 当 $C > C_{0w}$ 时, 则开始时 W 减小; 当 $C < C_{0w}$ 时, 则开始时 W 增大. 对于 C_{0T} 有同样的结论. 显然, 一般情况下 $\alpha \neq \alpha_0$. 只有当 $W_0 = T_0$ 时, $\alpha_0 = 1$, $\alpha = \alpha_0$ 初始光脉冲时间和空间对称, (20) 和 (21) 式相同, 脉冲宽度和束宽变化规律相同, 在 K_0 - C 平面上就变成一条曲线, K_0 - C 平面分成三个不同的区^[3]. 随着 α_0 比值的增大将是两条逐渐分开的曲线. 当 α_0 比值较小时, 如 $\alpha_0 = 1.5$, 在 K_0 - C 平面上分成五个区, 如图 1(a) 所示. 当 α_0 比值较大时, 如 $\alpha_0 = 3$, 在 K_0 - C 平面上可分成四个区, 如图 1(b) 所示. 在各个区中, 脉冲宽度和束宽的总体变化趋势和初始变化趋势是不同的.

我们用计算机数值求解 (14) 和 (15) 式, 在计算过程中用 (16) 式来检验计算精度, 使计算误差小于 1%. 在图 1(a) 和图 1(b) 中各区分别取一组数据, 为使数据有代表性, 在图 1(a) 中

取数据尽量使 C 不变而 K_0 变, 对于 E 区只能取不同的 C , 在图 1(b) 中则尽量使 K_0 不变而 C 变. 高斯型的尝试函数, 当 $K < 100$ 时, 变分解和数值解符合得很好^[3]. 我们所取的数据在计算过程中远远满足 $K < 100$. 所得结果如图 2、图 3 和表 1、表 2 所示.

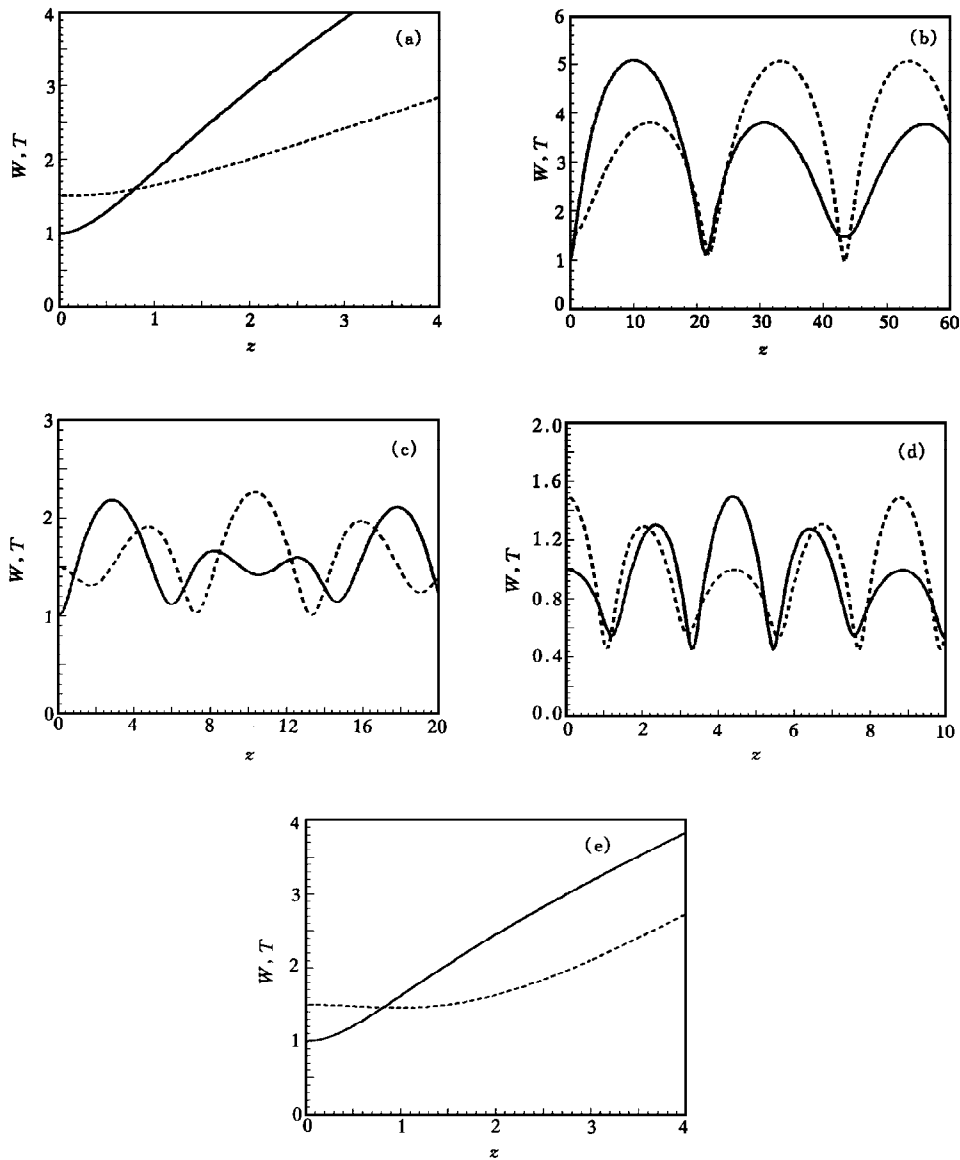


图 2 脉冲宽度 T (实线)和束宽 W (虚线)随传输距离 z 的变化 ($\alpha_0 = 1.5$) (a) 为 $C = 10, K_0 = 4$; (b) 为 $C = 10, K_0 = 3$; (c) 为 $C = 10, K_0 = 2$; (d) 为 $C = 10, K_0 = 0.5$; (e) 为 $C = 4.5, K_0 = 0.5$

由上所述, 我们感兴趣的是脉冲压缩的可能性. 当 $\alpha_0 > 1$ 时, 束宽 W 比脉冲宽度 T 先被压缩. 当 W 第一次达到最小值时, W 的大小我们称之为最佳压缩束宽 (W_m), 此时

的传输距离我们称之为最佳压缩距离(z_m).最佳压缩距离、最佳压缩束宽与耦合强度 C 的关系曲线分别如图 4(a)中曲线 1 和曲线 2.最佳压缩距离、最佳压缩束宽与初始饱和强

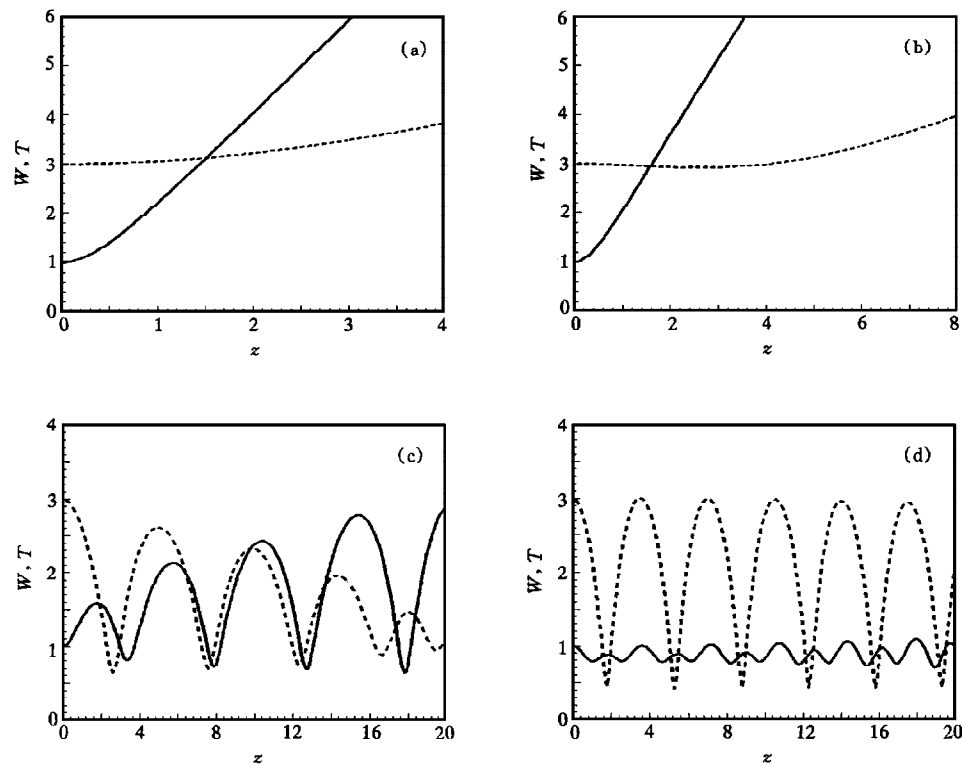


图 3 脉冲宽度 T (实线)和束宽 W (虚线)随传输距离 z 的变化($\alpha_0=3, K_0=1.5$) (a)为 $C=1$; (b)为 $C=5$; (c)为 $C=20$; (d)为 $C=35$

度 K_0 的关系曲线分别如图 4(b)中曲线 1 和曲线 2.由图 1—图 4 及表 1、表 2 可以看出:耦合强度越大,非线性效应越明显,束宽被压缩越快;饱和强度越强,非线性效应越弱,束宽被压缩越慢.由图 4 可以看出,最佳压缩距离有一个极值.这个结论有利于克尔镜锁模腔的设计.由这些数值,可以决定压缩的最佳条件及最佳压缩脉冲宽度及束宽.

表 1 不同初始饱和强度和耦合强度下脉冲宽度和束宽变化趋势表($C=10, \alpha_0=1.5$)

区域	饱和强度	总体变化趋势 (脉冲宽度、束宽)	初始变化趋势		图号(图 2)
			脉冲宽度	束 宽	
A	4.0	展宽	增大	增大	(a)
B	3.0	振荡	增大	增大	(b)
C	2.0	振荡	增大	减小	(c)
D	0.5	振荡	减小	减小	(d)
E*	0.5	展宽	增大	减小	(e)

* $C=4.5$.

表2 不同耦合强度下脉冲宽度和束宽变化趋势表($K_0=1.5, \alpha_0=3$)

区域	耦合强度	总体变化趋势 (脉冲宽度、束宽)	初始变化趋势		图号(图3)
			脉冲宽度	束宽	
A	1	展宽	增大	增大	(a)
B	5	展宽	增大	减小	(b)
C	20	振荡	增大	减小	(c)
D	35	振荡	减小	减小	(d)

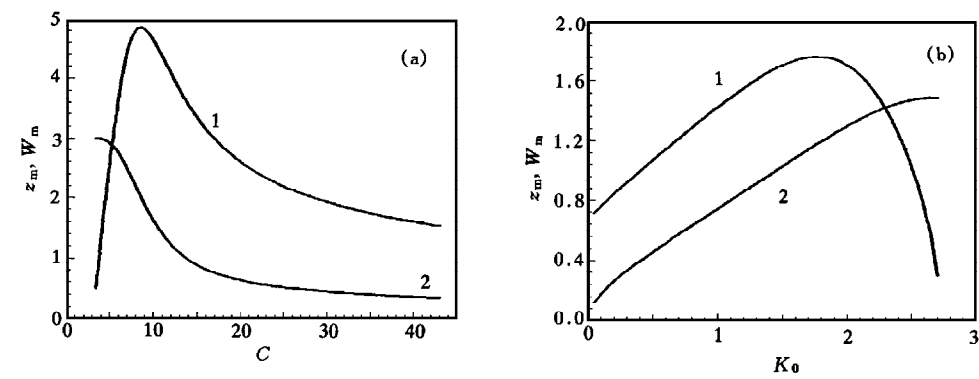


图4 (a)为最佳传输距离 z_m (曲线1)和最佳压缩束宽 W_m (曲线2)随耦合强度 C 的变化 $\alpha_0=3, K_0=1.5$;
(b)为最佳传输距离 z_m (曲线1)和最佳压缩束宽 W_m (曲线2)随初始的饱和强度 K_0 的变化 $\alpha_0=1.5, C=10$

4 结 论

本文研究了在(2+1)维饱和和自聚焦克尔介质中时间和空间非对称初始光脉冲的传输问题.利用变分法得到了光脉冲在传输中准动量、能量守恒律;利用数值法研究了能量不太高、传输距离不太长情况下高斯光束的传输规律.得到了以下结果:1)根据势阱零点,光脉冲脉冲宽度和束宽的总体变化趋势可分为单调展宽和振荡两种情形;根据 $\frac{d^2 W}{dz^2}$ 和 $\frac{d^2 T}{dz^2}$ 在 $z=0$ 时的零点可以看出脉冲宽度和束宽的初始变化趋势;根据三个零点所决定的曲线在 K_0-C 平面上可分为四个或五个区.2)耦合强度越强,非线性效应越明显;饱和强度越强,非线性效应越弱.3)最佳压缩距离有一个极值.

[1] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, *J. Opt. Soc. Am.*, **B8**(1991), 2082.
[2] N. Akhmediev, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 1358.
[3] M. Karlsson, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 2726.

PROPAGATION OF OPTICAL PULSE WITH TIME-SPACE ASYMMETRY IN SATURABLE SELF-FOCUSING KERR MEDIUM

LI JIAN-QING¹⁾²⁾³⁾ ZHOU GUO-SHENG¹⁾ YANG BO-JUN²⁾ XU DA-XIONG³⁾

1)(*Department of Electronics and Information Science, Shanxi University, Taiyuan 030006*)

2)(*Department of Basic Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876*)

3)(*Department of Electronic Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876*)

(Received 20 January 1997; revised manuscript received 7 March 1997)

ABSTRACT

The problem of propagation of $(2+1)$ -dimensional optical pulse with time-space asymmetry in a saturable Kerr medium is discussed. That pseudo-momentum and energy of the optical pulse keep conservative along propagation is obtained by using variational method. The impacts of initial asymmetry, saturable strength and coupling strength on pulse width and beam width are studied by using numerical method.

PACC: 4265