第 47 卷 第 12 期 1998 年 12 月
1000-3290/98/47(12)/1937-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 47, No. 12, December, 1998

推广的 Painlevé 展开及 KdV 方程的非标准截断解*

楼森岳
(宁波大学数学物理研究所, 宁波 315211)

(1998 年 2 月 13 日收到;1998 年 8 月 10 日收到修改稿)

利用奇性流形的任意性,选用不同的展开函数及非标准截断展开于 KdV 方程,得到了许多用复杂隐函数表示的精确解.

PACC: 0340K; 0230Jr; 0365Ge

1 引 言

在非线性物理问题的可积性及精确解的研究中,由 Weiss, Tabor 和 Carnevale (WTC)[1]建立的 Painlevé 分析方法是众多方法中最有用的方法之一.将 WTC 方法应用到非线性偏微分方程中,我们不仅可以得到可积模型的 Painlevé 性质,Lax 对,双线性形式,Bäcklund 变换等性质,而且也可以得到无论是可积模型还是不可积模型的精确解.

在文献[2]中,Conte 提出了一种 WTC 方法的简化形式.在 Conte 的展开式中,所有的展开系数都是共形不变的(即在 Möbious 变换下不变的).在 Conte 方法中的标准截断展开相应于 WTC 法中的一种非截断展开.Pickering[3]利用 Conte 方法提出了一种非标准截断展开法.如果在通常的 WTC 法中,存在两种以上的展开,则用 Pickering 的非标准截断展开法可以得到新的精确解[3].

由于通常的 WTC 法中的奇性流形的任意性,我们可以有许多其它不同形式的 Painlevé 展开.这些不同形式的展开可能并不简化 Painlevé 性质检验的计算.但对这些展开作非标准截断有可能得到不同形式的精确解.

2 Painlevé 展开的推广形式

对于一个给定的偏微分方程

$$F(t, x_1, x_2, \cdots, x_n, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \cdots) \equiv F(u) = 0, \tag{1}$$

通常的 Painlevé 展开为

* 国家自然科学基金(批准号:19975025)和浙江省自然科学基金(批准号:196003)资助的课题.

$$u = \phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_j' \phi^j, \tag{2}$$

其中 $\phi \equiv \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0$ 是任意的奇性流形. 由于 ϕ 的任意性, Conte[2] 取

$$\chi \equiv \left(\frac{\phi_x}{\phi} - \frac{\phi_{xx}}{2\phi_x}\right)^{-1} \qquad (x \equiv x_1) \tag{3}$$

作一个新的展开函数使得新的展开式

$$u = \chi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_j \chi^j \tag{4}$$

中的展开系数 u_j 是在 Möbious 变换

$$\phi \to \frac{a\phi + b}{c\phi + b} \qquad (ad \neq cb) \tag{5}$$

下不变的.

将(3)式分别对 x 和 t 求微分, 可得下述两个恒等式:

$$\chi_x = 1 + \frac{1}{2} S\chi^2, \tag{6}$$

$$\chi_t = - C + C_x \chi - \frac{1}{2}(C_{xx} + CS)\chi^2, \tag{7}$$

其中

$$S \equiv \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x}\right)^2, \tag{8}$$

$$C \equiv - \frac{\phi_t}{\phi_x}. \tag{9}$$

S 和 C 都是在 Möbious 变换下不变的. (6)和(7)式的自洽条件($\chi_{xt} = \chi_{tx}$)为

$$S_t + C_{xxx} + 2C_x S + CS_x = 0. \tag{10}$$

将(8)和(9)式代入(10)式可知, (10)式也是恒等式.

Conte 的上述方法也可以按下述方式理解: 任意的展开函数 ϕ 被 χ 所替代. 虽然 χ 要满足两个方程(6)和(7), 但是它的任意性仍然被保持. 这是因为(6)和(7)式中包含了两个函数 S 和 C, 而这两个函数仅需满足一个条件(10)式. 即两个函数中有一个是任意的. 而(8)和(9)式是满足(10)式的一种包含一个任意函数 ϕ 的解.

根据上述观点, 我们可以选择其它函数作为新的展开变量. 其中新的展开变量可以满足几个限制方程. 在限制方程中包含一些其它函数并要求所有限制方程的自洽条件数少于所包含的函数个数. 从而可保持新的展开函数的任意性.

例如, 可以选择满足下述条件:

$$\xi_x = \sum_{j=0}^{N} S_j \xi^j, \tag{11}$$

$$\xi_t = \sum_{j=0}^{N} Y_j \xi^j \tag{12}$$

的 ξ 作为新的展开函数. 在(11)和(12)式中包含了 $2N+2$ 个函数 S_i 和 Y_i. 不难证明(11)和(12)式的自洽条件仅有 $2N-1$ 个

$$S_{nt} - Y_{nx} + \sum_{j=1}^{n+1} j(S_j Y_{n+1-j} - Y_j S_{n+1-j}) = 0 \qquad n = 0, 1, \cdots, N, \tag{13}$$

$$\sum_{j=n+1-N}^{N} j(S_j Y_{n+1-j} - Y_j S_{n+1-j}) = 0 \qquad n = N+1, N+2, \cdots, 2N-2. \tag{14}$$

所以至少有三个任意函数包含于(11)和(12)式中.从而展开函数 ξ 的任意性被保持.然而,除了 $N=2$ 的 Conte 的情况外,现在的展开函数 ξ 与通常 WTC 法中的 ϕ 的联系还是不清楚的.

虽然,这种方法不一定能简化 Painlevé 性质的检验,我们相信这种方法对寻求精确解将是有用的.为了对上述方法有更具体的了解,以 KdV 方程为例先用新方法重新检验 KdV 方程的 Painlevé 性质,然后列出一些在不同 N 情况下的精确解.

3　KdV 方程的 Painlevé 性质

为了更具体起见,在(11)和(12)式中限制 $N=3$,即

$$\xi_x = S_0 + S_1\xi + S_2\xi^2 + S_3\xi^3, \tag{15}$$

$$\xi_t = Y_0 + Y_1\xi + Y_2\xi^2 + Y_3\xi^3, \tag{16}$$

其中自洽条件为

$$Y_3 = S_3 Y_2 / S_2, \tag{17}$$

$$S_{1t} = -2S_2Y_0 + Y_{1x} + 2Y_2S_0, \tag{18}$$

$$S_{2t} = -S_2Y_1 + S_1Y_2 + Y_{2x} + 3Y_3S_0 - 3S_3Y_0, \tag{19}$$

$$S_{3t} = 2S_1Y_3 - 2S_3Y_1 + Y_{3x}, \tag{20}$$

$$S_{0t} = Y_{0x} + Y_1S_0 - S_1Y_0 = 0. \tag{21}$$

显然,对 8 个函数 $S_0, S_1, S_2, S_3, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3$ 仅有五个限制条件.

将展开式

$$u = \xi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j \xi^j \tag{22}$$

代入 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{23}$$

并利用(11)和(12)式可得

$$\alpha = -2,\ u_0 = -2S_0^2, \tag{24}$$

$$(j+1)(j-4)(j-6)u_j = f_j(u_k, k = 0, 1, 2, \cdots, j-1) \equiv f_j, \tag{25}$$

其中 f_j 是 $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{j-1}$ 及 S_i, Y_i 的函数.从(25)式可知同通常的 WTC 方法一样,$j=-1, 4$,和 6 是 KdV 方程的共振点.在 $j=-1$ 的共振点相应于展开函数的任意性.而在 $j=4, 6$ 的共振点应该有两个共振条件.如果这两个共振条件是恒满足的,则 KdV 方程的 Painlevé 性质在新的框架下被重新证明.对于 $j=1, 2, 3$,有

$$u_0 = -2S_0^2, \tag{26}$$

$$u_1 = 2S_{0x} - 2S_0S_1, \tag{27}$$

$$u_2 = \frac{1}{6S_0^2}(-8S_0^3S_2 + 2S_{0x}S_0S_1 - S_0^2S_1^2 - 4S_0S_{0xx} + 4S_0^2S_{1x} + 3S_{0x}^2 - S_0Y_0), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} u_3 = \frac{1}{6S_0^4}(&2S_0^4S_{2x} + S_0^2S_{0xxx} - S_0^3S_{1xx} - S_0^2Y_{0x} + 2S_0^2S_{0t} - 2S_0^3Y_1 \\ &- 6S_0^5S_3 + 2S_0^3S_{0x}S_2 + 3S_{0x}^3 - S_0Y_0S_{0x} + 2S_0^2Y_0S_1 - S_0S_1S_{0x}^2 \\ &+ S_1S_0^2S_{0xx} + S_0^2S_{0x}S_{1x} - S_0^3S_{1x}S_1 - 4S_0S_{0x}S_{0xx}). \end{aligned} \tag{29}$$

将(26)—(29)式代入 $j=4$ 的共振条件并作简化可得

$$\begin{aligned} &2Y_{0xx} + 4S_0Y_{1x} + 2S_{0t}S_1 - 2S_0S_{1t} - 2S_{0tx} + 4S_0^2Y_2 + 2S_1^2Y_0 \\ &- 2Y_0S_{1x} - 4S_1Y_{0x} - 4S_0S_2Y_0 - 2S_0Y_1S_1 + 2Y_1S_{0x} = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

再将 S_i 和 Y_i 应满足的自洽条件(18),(21)式代入(30)式后可知,$j=4$ 的自洽条件是恒满足的. u_5 可以在(24)式中令 $j=5$ 得到

$$\begin{aligned} u_5 = \frac{-1}{6S_0^3 + 6u_0S_0}(&-6u_1^2S_3 + 3u_{3x}S_{0x} + 6u_{4x}S_0^2 - 3u_{1xx}S_2 + 6u_4u_{0x} - 6u_{0x}S_{3x} \\ &+ 6u_{0x}S_2^2 + 6u_1u_{3x} + 6u_0u_{4x} + 6u_2u_{2x} + 6u_3u_{1x} + u_3S_{0xx} - u_1S_{2xx} \\ &- 3u_{1x}S_{2x} - 2u_0S_{3xx} - 6u_{0xx}S_3 + 3u_{3xx}S_0 + u_{2t} + u_{2xxx} - u_1Y_2 - 2u_0Y_3 \\ &+ u_3Y_0 + u_1S_{2x}S_1 + 3u_{3x}S_1S_0 + 2u_3S_{1x}S_0 + 8u_0S_{1x}S_3 + 3u_{1x}S_0S_3 \\ &+ 3u_{1x}S_1S_2 + 12u_{0x}S_1S_3 + 3u_1S_{0x}S_3 + 2u_1S_{1x}S_2 + 6u_0S_{2x}S_2 + 4u_0S_{3x}S_1 \\ &+ 6u_4S_{0x}S_0 + u_3S_1S_{0x} - 6u_1S_1S_3S_0 - 12u_2u_0S_3 + 6u_2u_3S_0 + 6u_1u_4S_0 \\ &- 6u_0S_1S_2^2 - 6u_0u_3S_2 - 6u_2u_1S_2 + 6u_4S_1S_0^2 - 20u_0S_0S_2S_3 + u_3S_1^2S_0 \\ &- 8u_0S_1^2S_3 + 2u_3S_2S_0^2 - 2u_1S_0S_2^2 - u_1S_1^2S_2). \end{aligned} \tag{31}$$

将(26)—(29)和(31)式代入 $j=6$ 的共振条件后,结果为

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_0S_2^2}(&-2Y_1S_0^2S_3S_2^2 + 4Y_2S_0^2S_{3x}S_2 + 4S_0^2S_3Y_{2x}S_2 - 4Y_2S_0^2S_3S_{2x} + 2S_0^2S_1S_3Y_2S_2 \\ &- 3S_0S_2^2Y_0S_{3x} - S_0^2S_2^2S_{3t} - S_{2t}S_{0x}S_2^2 - S_2^3Y_1S_{0x} - S_0S_2^3Y_{1x} - S_0S_{2x}Y_1S_2^2 \\ &+ Y_2S_1S_{0x}S_2^2 - 3S_3Y_0S_{0x}S_2^2 - 3S_0S_3Y_{0x}S_2^2 + Y_{2x}S_{0x}S_2^2 + S_0Y_{2xx}S_2^2 \\ &+ Y_2S_0S_{1x}S_2^2 - S_0S_{2tx}S_2^2 + 6Y_2S_0S_3S_{0x}S_2 + S_0S_1Y_{2x}S_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

不难验证,由于(17)—(21)式,$j=6$ 的共振条件(32)式也是恒满足的.从而 KdV 方程的 Painlevé 性质在新的框架下得到了重新证明.当然仅是为了证明非线性模型的 Painlevé 性质,原有的 WTC 方法就足够.下面采用非标准截断法给出 KdV 方程的一些精确解.

4　KdV 方程的非标准截断解

在传统 Painlevé 分析的标准截断法中,对于 KdV 方程应取 $u_j=0,\ j\geqslant 2$. 在新的 Painlevé 分析法中,不但可以采用标准截断 $u_j=0,\ j\geqslant 2$, 也可以采用非标准截断 $u_j=0$, $j>\beta$, 其中 $\beta>3$. 当 ξ 由(11),(12)式给定时,要求 KdV 方程(23)的色散项中 ξ 的最高幂次和非线性项中 ξ 的最高幂次相互抵消得 $\beta=2N$, 即

$$u=\sum_{j=0}^{2N}u_j\xi^{j-2}\qquad(u_0\neq 0,\ u_{2N}\neq 0).\tag{33}$$

将非标准截断展开(33)式代入 KdV 方程(23)得到决定 u_i, S_i 和 Y_i 的复杂方程组

$$\begin{aligned}&u_{j-3,t}+u_{j-3,xxx}+\sum_{k=0}^{N}(j-k-4)(Y_ku_{j-k-2}+u_{j-k-2,xx}S_k+(2u_{j-k-2,x}S_k+u_{j-k-2}S_{kx})_x)\\&+\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}(j-k-l-m-2)(j-l-m-3)(j-m-4)u_{j-k-l-m}S_kS_lS_m\\&+\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}(j-k-l-3)(j-l-4)((2u_{j-k-l-1,x}S_k+u_{j-k-l-1}S_{kx})S_l+(u_{j-k-l-1}S_kS_l)_x)\\&-\sum_{k=0}^{2N}(3u_{j-k-1}u_k)_x-3\sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{2N}(j-l-4)u_{j-k-l}u_kS_l=0\qquad(j=0,1,2,\cdots,5N).\end{aligned}\tag{34}$$

在上式中规定当 $j<0$ 及 $j>2N$ 时 $u_j=0$. 要给出(34)及(13),(14)式的一般解几乎是不可能的. 象其它截断展开法一样,仅给出(34),(13),(14)式的常数解. 当取 S_j 和 Y_j 为常数时,由(13),(14)式知,可取

$$S_j=ks_j,\ Y_j=k_0s_j.\tag{35}$$

将上式代入(34)式后,利用计算机代数(如 Mathematica 或 Maple),对于确定的较小的 N,不难求得(34)式的所有解. 如对于 $N=3$, 将(34)式的常数解代入(11),(12),(33)式后得

$$\xi_x=k_1(-16+6\xi+9\xi^2+\xi^3),\tag{36}$$

$$\xi_t=k_0(-16+6\xi+9\xi^2+\xi^3),\tag{37}$$

$$u=512\frac{k_1^2}{\xi^2}-192\frac{k_1^2}{\xi}-186k_1^2+\frac{k_0}{6k_1}-16\xi k_1^2+264k_1^2\xi^2+96k_1^2\xi^3+8k_1^2\xi^4,\tag{38}$$

其中 k_1 和 k_0 为任意常数.

方程组(36),(37)可以用隐函数积出为

$$\frac{(\xi-1)^2(\xi+8)}{(\xi+2)^3}=c_1e^{54\eta},\ \eta=k_1x+k_0t.\tag{39}$$

对于更大的 N,(34)式可能有多组常数解. 下面再列出 $N=4,5,6$ 的一些结果.

4.1　N=4

对于 $N=4$ 存在两个独立解:

1. 第一种类型解的 ξ 函数由下述常微分方程给定:

$$\xi_\eta = s_0 + s_1\xi + s_2\xi^2 + s_3\xi^3 + s_4\xi^4,\ \eta = k_1 x + k_0 t, \tag{40}$$

其中 $s_0=-243$，$s_1=120$，$s_2=106$，$s_3=16$，$s_4=1$. 而 KdV 方程的相应解为

$$u = 18\Big(\xi^6 + 24\xi^5 + 252\xi^4 + 1256\xi^3 + 2598\xi^2 - 216\xi - \frac{5324}{3} + \frac{k_0}{108k_1^3} - \frac{3240}{\xi} + \frac{6561}{\xi^2}\Big)k_1^2. \tag{41}$$

(40)式的一般解为

$$(-1+\xi^2)(\xi^2+14\xi+81) - c_1(\xi+3)^4 e^{768\eta} = 0. \tag{42}$$

2. 对于第二种类型的解,(40)式中的 $s_0=-27$，$s_1=24$，$s_2=66$，$s_3=16$，$s_4=1$，从而 ξ 由下式给出：

$$(\xi^2+6\xi-3)^2 - c_1(\xi+9)(1+\xi)^3 e^{192\eta} = 0. \tag{43}$$

相应的 KdV 方程的解为

$$u = \Big(18\xi^6 + 432\xi^5 + 3672\xi^4 + 12816\xi^3 + 14796\xi^2 - 432\xi - 2280 + \frac{k_0}{6k_1^3} - \frac{1296}{\xi} + \frac{1458}{\xi^2}\Big)k_1^2. \tag{44}$$

4.2 N=5

在 N=5 的情况，(34)式有 5 个实解. 当常数 S_j 和 u_j 给定时，ξ 函数由求解下式决定：

$$\xi_n = s_0 + s_1\xi + s_2\xi^2 + s_3\xi^3 + s_4\xi^4 + s_5\xi^5, \tag{45}$$

相应的 KdV 方程的解为

$$u = \sum_{j=0}^{10} u_j' k_1^2 \xi^{j-2} \qquad (u_j = u_j' k_1^2). \tag{46}$$

1. N=5 的第一种解为 $s_0=-46656$，$s_1=21870$，$s_2=29305$，$s_3=3645$，$s_4=150$，$s_5=2$，从而(45)式的积分为

$$(\xi+32)(2\xi^2+28\xi-27)^2 - c_1(\xi+27)^2(\xi+2)^3 e^{168750\eta} = 0. \tag{47}$$

相应的(46)式的系数 u_j' 为

$$u_{10}' = 128,\ u_9' = 15360,\ u_8' = 733440,\ u_7' = 17646080,\ u_6' = 222091680,$$
$$u_5' = 1351876992,\ u_4' = 2955429920,\ u_3' = -170061120,$$
$$u_2' = \frac{k_0}{6k_1^3} - 1743289290,\ u_1' = -2040733440,\ u_0' = 4353564672. \tag{48}$$

2. 如果取 $s_0=-995328$，$s_1=183060$，$s_2=41715$，$s_3=2385$，$s_4=75$，$s_5=1$，即得 N=5 时的第二种解. (45)式的解为

$$(\xi-3)^2(\xi^3+66\xi^2+1827\xi+27648) - c_1(\xi+12)^5 e^{1012500\eta} = 0, \tag{49}$$

及(46)式的系数为

$$u_{10}' = 32,\ u_9' = 3840,\ u_8' = 207360,\ u_7' = 6635520,\ u_6' = 131245920,$$
$$u_5' = 1520581248,\ u_4' = 8401812480,\ u_3' = -2373857280,$$
$$u_2' = -49774982760 + \frac{k_0}{6k_1^3},\ u_1' = -364409487360,\ u_0' = 1981355655168. \tag{50}$$

3. 对于第三种解,

$$s_0 = 102036672,\ s_1 = -1355940,\ s_2 = -251910,\ s_3 = -990,\ s_4 = 75,\ s_5 = 1,$$
$$u_{10}' = 32,\ u_9' = 3840,\ u_8' = 63360,\ u_7' = 11508480,\ u_6' = -472042080,$$
$$u_5' = 5820709248,\ u_4' = 444256332480,\ u_3' = -101016305280,$$
$$u_2' = \frac{k_0}{k_1^3} - 33965648510760,\ u_1' = -276711210063360,$$
$$u_0' = 20822964865671168, \tag{51}$$

且 ξ 由

$$\frac{(\xi - 48)(\xi + 27)^4}{(\xi - 18)^3(\xi^2 + 114\xi + 4374)} = c_1 e^{27337500\eta} \tag{52}$$

决定.

4. 第四和第五种解更为复杂,

$$s_0 = \frac{\pm 2656\sqrt{2} - 3168\sqrt{3}}{78125},\ s_1 = \frac{\pm 128\sqrt{2} + 141\sqrt{3}}{625},\ s_2 = \frac{\pm 877\sqrt{2} + 969\sqrt{3}}{50},$$
$$s_3 = \pm 167\sqrt{2} + 273\frac{\sqrt{3}}{2},\ s_4 = \ s_5 = \pm 500\sqrt{2} + 375\sqrt{3}, \tag{53}$$
$$u_{10}' = 500000(\pm 24\sqrt{6} + 59),\ u_9' = 800000(\pm 24\sqrt{6} + 59),$$
$$u_8' = 24000(1291 \pm 526\sqrt{6}),\ u_7' = 640(16481 \pm 6741\sqrt{6}),$$
$$u_6' = \frac{8}{5}(1207847 \pm 496092\sqrt{6}),\ u_5' = \frac{96}{625}(1150669 \pm 468784\sqrt{6}),$$
$$u_4' = \frac{8}{3125}(2384477 \pm 905022\sqrt{6}),\ u_3' = -\frac{16}{78125}(25637 \pm 10407\sqrt{6}),$$
$$u_2' = -\frac{3}{3906250}(1971217 \pm 70912\sqrt{6}) + \frac{k_0}{6k_1^3},$$
$$u_1' = -\frac{64}{48828125}(20629 \pm 969\sqrt{6}),\ u_0' = \frac{2048}{6103515625}(43181 \mp 16434\sqrt{6}), \tag{54}$$

及决定 ξ 函数的式子为

$$\frac{(25\xi + 2 \pm 2\sqrt{6})^3(-25\xi - 7 \pm 3\sqrt{6})^2}{(1250\xi^2 + 700\xi \pm 75\xi\sqrt{6} \pm 96\sqrt{6} - 64)(-50\xi - 4 \pm \sqrt{6})^3} = c_1 e^{(3\sqrt{3})\eta}. \tag{55}$$

4.3 N=6

随着 N 的增加,(34)式的独立解迅速增加.如,对于 N=6,可发现 10 个实解.由于这些解过于繁复,在这里仅写下一个最简单的解,

$$u_{12}' = 50,\ u_{11}' = 1000,\ u_{10}' = 8500,\ u_9' = 41000,$$
$$u_8' = 126750,\ u_7' = 264400,\ u_6' = 367000,$$

$$u_5' = 314000,\ u_4' = 132750,\ u_3' = -3000,\ u_2' = \frac{1}{6}\left(-29000 + \frac{k_0}{k_1^3}\right),$$

$$u_1' = -3000,\ u_0' = 1250, \tag{56}$$

$$\frac{(\xi^2 + 2\xi + 5)(\xi^2 + 4\xi - 1)^2}{(\xi + 5)(1 + \xi)^5} = c_1 e^{5320\eta}. \tag{57}$$

5 结语与讨论

利用通常的 Painlevé 分析法中的奇性流形的任意性,本文提出了一种新的 Painlevé 分析方法.在新的 Painlevé 分析法中展开函数的任意性被包含于三个其它函数中.虽然新的方法不一定对证明 Painlevé 性质有更好的效果,但是在新的方法中既可以采用标准的截断展开也可以采用非标准的截断展开来得到非线性方程的精确解.我们以 KdV 方程为例,用几种不同的展开方式得到了许多形式的非标准截断解.在得到本文的结果时,我们采用了计算机代数 Maple 求解以保证计算的正确性.本文使用的方法有相当的普遍性,可以用来求得许多非线性方程(无论是可积还是不可积)的精确解[4].

在本文中得到的所有非标准截断解通过一些中间变量与时空变量相联系.而这些中间变量的复杂的有理函数等于时空行波变量的指数函数.这些解相应于 KdV 方程的一般孤子解和一些奇性孤子解(有的文献也称之为反孤子解).如:与解(38)式相对应的 ξ 由(39)式确定.由(39)式可得,对于 $c_1<0$,

$$\xi_{\eta\to+\infty} \to -2 + 0^-,\ \xi_{\eta\to-\infty} \to -8 + 0^+. \tag{58}$$

将上式代入(38)式得

$$u_{\eta=\pm\infty} = 486\, k_1^2 + \frac{k_0}{6\, k_1}. \tag{59}$$

所以,当 $c_1<0$ 时,解(38)式表示了一个非零边界值的孤立子解.同样分析可知,对于 $c_1>0$,当 η 在$[-\infty, +\infty]$变化时,ξ 在$[-2, 1]$之间变化,从而 u 表示具有非零边界(59)式的奇性孤子解($\xi=0$ 时,$u=\infty$).一般地说,非标准截断解并没有通常孤子解的色散关系.仅当特定的边界条件给定时,才可能得到色散关系.如:要求 $u_{\eta=\pm\infty}=0$ 时,与(38)式相应的孤子解的色散关系为 $2916\, k_1^3 + k_0 = 0$.

在非标准截断解的求解过程中,我们仅限制于求解限制方程(13),(14)及(34)的常数解.是否可以在我们的新框架下求得有意义的非常数解有待于进一步研究.

[1] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, *J. Math. Phys.*, **24**(1983), 522.
[2] R. Conte., *Phys. Lett.*, **A140**(1989), 383.
[3] A. Pickering, *J. Phys.*, **A26**(1993), 4395.
[4] Lou S-y, *Z. Naturforsch*, **53a**(1998), 251.

EXTENTED PAINLEV腐 EXPANSION AND NONSTANDARD TRUNCATION SOLUTIONS OF THE KdV EQUATION *

LOU SEN-YUE

(*Insitute of Mathematical Physics, Ningbo University, Ningbo* 315211)

(Received 13 February 1998; revised manuscript received 10 August 1998)

ABSTRACT

In this paper, by means of the arbitrariness of the singularity, we have established a new approach of the Painlevé analysis developed by Weiss, Tabor and Carnevale, which is one of the powerful method to study the nonlinear partial differential equations. Selecting some different expansion functions and nonstandard truncations for the KdV equation, we obtained many exact solutions expressed by some complicated implicit functions.

PACC: 0340K; 0230Jr; 0365Ge

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975025) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. 196003), China.