第 47 卷 第 12 期 1998 年 12 月
1000-3290/98/47(12)/1946-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 47, No. 12, December, 1998

一类五阶非线性演化方程的新孤波解*

徐炳振 李悦科 阎循领
(山东省聊城师范学院光通信研究所, 聊城 252059)
(1998 年 3 月 27 日收到;1998 年 5 月 26 日收到修改稿)

利用齐次平衡法给出了一类较广泛的五阶非线性演化方程的孤波解,数学物理中著名的 Kaup-Kupershmidt 方程、Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera 方程和五阶 Korteweg-de-Vries 方程等都可作为该方程的特殊情形而得到相应的孤波解.

PACC: 0340K; 0220

1 引 言

从存在无限多个守恒量和无限多个对称的意义上来说,数学物理中许多重要的非线性演化方程都是完全可积的.如何寻找这些方程的解析解,特别是如何寻找这些方程的孤波解,长期以来一直是倍受数学家和物理学家格外关注的问题.人们研究发现,许多颇具物理意义的非线性演化方程,如 sin-Gordon 方程、Korteweg-de-Vries(缩写为 KdV)方程、非线性薛定谔方程、Kaup-Kupershmidt(缩写为 KK)方程、Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera(缩写为 CDGSK)方程等均具有孤波解.孤波正在流体物理、固体物理、等离子体物理、凝聚态物理和非线性光纤通信等许多科学技术领域中得到应用.寻找孤波解的方法也是多种多样的,如逆散射方法、贝科隆变换法、广田法等等.

本文利用文献[1]引入的齐次平衡法给出了一类较广泛的五阶非线性演化方程

$$u_t = \varepsilon u_{xxxxx} + a_1 u u_{xxx} + a_2 u_x u_{xx} + a_3 u^2 u_x \tag{1}$$

的孤波解,其中 ε, a_1, a_2 和 a_3 为常数.数学物理中著名的 KK 方程、CDGSK 方程和五阶 KdV 方程[2—7]等都可作为该方程的特殊情形.

2 非线性演化方程(1)的孤波解

设方程(1)的解具有下列形式:

$$u(x, t) = \alpha[f''(\varphi)\varphi_x^2(x, t) + f'(\varphi)\varphi_{xx}(x, t)] + \beta, \quad \varphi_t = V\varphi_x, \tag{2}$$

其中 f, φ 为待定函数, α, β, V 为待定常数,并假定 α 不等于零.由(2)式经繁琐而冗长的计算得到

$$u_5/\alpha = f_7\varphi_1^7 + 21 f_6\varphi_1^5\varphi_2 + 105 f_5\varphi_1^3\varphi_2^2 + 35 f_5\varphi_1^4\varphi_3 + 105 f_4\varphi_1\varphi_2^3$$

* 国家自然科学基金(批准号:69577009)和山东省自然科学基金(批准号:Y96G06105)资助的课题.

$$+210f_4\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3+35f_4\varphi_1^3\varphi_4+105f_3\varphi_2^2\varphi_3+70f_3\varphi_1\varphi_3^2$$
$$+105f_3\varphi_1\varphi_2\varphi_4+21f_3\varphi_1^2\varphi_5+35f_2\varphi_3\varphi_4+21f_2\varphi_2\varphi_5$$
$$+7f_2\varphi_1\varphi_6+f_1\varphi_7, \tag{3}$$

$$uu_3/\alpha=\alpha f_2f_5\varphi_1^7+10\alpha f_2f_4\varphi_1^5\varphi_2+15\alpha f_2f_3\varphi_1^3\varphi_2^2+10\alpha f_2f_3\varphi_1^4\varphi_3$$
$$+10\alpha f_2^2\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3+5\alpha f_2^2\varphi_1^3\varphi_4+\alpha f_1f_2\varphi_1^2\varphi_5+\alpha f_1f_5\varphi_1^5\varphi_2$$
$$+10\alpha f_1f_4\varphi_1^3\varphi_2^2+15\alpha f_1f_3\varphi_1\varphi_2^3+10\alpha f_1f_3\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3$$
$$+10\alpha f_1f_2\varphi_2^2\varphi_3+5\alpha f_1f_2\varphi_1\varphi_2\varphi_4+\alpha f_1^2\varphi_2\varphi_5+\beta f_5\varphi_1^5$$
$$+10\beta f_4\varphi_1^3\varphi_2+15\beta f_3\varphi_1\varphi_2^2+10\beta f_3\varphi_1^2\varphi_3+10\beta f_2\varphi_2\varphi_3$$
$$+5\beta f_2\varphi_1\varphi_4+\beta f_1\varphi_5, \tag{4}$$

$$u_1u_2/\alpha^2=f_3f_4\varphi_1^7+6f_3^2\varphi_1^5\varphi_2+3f_2f_3\varphi_1^3\varphi_2^2+4f_2f_3\varphi_1^4\varphi_3$$
$$+f_1f_3\varphi_1^3\varphi_4+3f_2f_4\varphi_1^5\varphi_2+18f_2f_3\varphi_1^3\varphi_2^2+9f_2^2\varphi_1\varphi_2^3$$
$$+12f_2^2\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3+3f_1f_2\varphi_1\varphi_2\varphi_4+f_1f_4\varphi_1^4\varphi_3+6f_1f_3\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3$$
$$+3f_1f_2\varphi_2^2\varphi_3+4f_1f_2\varphi_1\varphi_3^2+f_1^2\varphi_3\varphi_4, \tag{5}$$

$$u^2u_1/\alpha=\alpha^2f_2^2f_3\varphi_1^7+2\alpha^2f_1f_2f_3\varphi_1^5\varphi_2+\alpha^2f_1^2f_3\varphi_1^3\varphi_2^2$$
$$+2\alpha\beta f_2f_3\varphi_1^5+2\alpha\beta f_1f_3\varphi_1^3\varphi_2+\beta^2f_3\varphi_1^3+3\alpha^2f_2^3\varphi_1^5\varphi_2$$
$$+6\alpha^2f_1f_2^2\varphi_1^3\varphi_2^2+3\alpha^2f_1^2f_2\varphi_1\varphi_2^3+6\alpha\beta f_1f_2\varphi_1\varphi_2^2+6\alpha\beta f_2^2\varphi_1^3\varphi_2$$
$$+3\beta^2f_2\varphi_1\varphi_2+\alpha^2f_1f_2^2\varphi_1^4\varphi_3+2\alpha^2f_1^2f_2\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3+\alpha^2f_1^3\varphi_2^2\varphi_3$$
$$+2\alpha\beta f_1f_2\varphi_1^2\varphi_3+2\alpha\beta f_1^2\varphi_2\varphi_3+\beta^2f_1\varphi_3, \tag{6}$$

其中上标表示幂次，下标表示偏导数的阶数，即

$$f_m^n=(\partial^mf/\partial\varphi^m)^n;\quad \varphi_m^n=(\partial^m\varphi/\partial x^m)^n.$$

将(3)—(6)式代入(1)式得到

$$0=(\varepsilon u_5+a_1uu_3+a_2u_1u_2+a_3u^2u_1-u_t)/\alpha$$
$$=(\varepsilon f_7+a_1\alpha f_2f_5+a_2\alpha f_3f_4+a_3\alpha^2f_2^2f_3)\varphi_1^7+\cdots$$

令 φ_1^7 的系数等于零，得

$$\varepsilon f_7+a_1\alpha f_2f_5+a_2\alpha f_3f_4+a_3\alpha^2f_2^2f_3=0. \tag{7}$$

上式表明，只要适当选择待定常数 α，待定函数 $f(\varphi)$ 具有下列形式：

$$f(\varphi)=\ln\varphi. \tag{8}$$

将(8)式代入(7)式，得

$$a_3\alpha^2-6(2a_1+a_2)\alpha+360\varepsilon=0. \tag{9}$$

将(3)—(7)式代入(1)式，并利用(9)式，得

$$0=(\varepsilon u_5+a_1uu_3+a_2u_1u_2+a_3u^2u_1-u_t)/\alpha$$
$$=[(-2520\varepsilon+84a_1\alpha+42a_2\alpha-7a_3\alpha^2)\varphi_1^5\varphi_2/\varphi^6+(840\varepsilon-20a_1\alpha$$
$$-14a_2\alpha+a_3\alpha^2)\varphi_1^4\varphi_3/\varphi^5+4(6a_1-a_3\alpha)\beta\varphi_1^5/\varphi^5]$$
$$+[(2520\varepsilon-90a_1\alpha-42a_2\alpha+8a_3\alpha^2)\varphi_1^3\varphi_2^2/\varphi^5$$

$$- 5(42\varepsilon - a_1\alpha)\varphi_1^3\varphi_4/\varphi^4 - 2(630\varepsilon - 15a_1\alpha - 12a_2\alpha + a_3\alpha^2)\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3/\varphi^4$$
$$+ 4(35\varepsilon - a_2\alpha)\varphi_1\varphi_3^2/\varphi^3 + (42\varepsilon - a_1\alpha)\varphi_1^2\varphi_5/\varphi^3$$
$$- 10(6a_1 - a_3\alpha)\beta\varphi_1^3\varphi_2/\varphi^4 + 2(10a_1 - a_3\alpha)\beta\varphi_1^2\varphi_3/\varphi^3$$
$$+ 2(a_3\beta^2 + V)\varphi_1^3/\varphi^3]$$
$$+ [3(-210\varepsilon + 10a_1\alpha + 3a_2\alpha - a_3\alpha^2)\varphi_1\varphi_2^3/\varphi^4 + (210\varepsilon - 10a_1\alpha$$
$$- 3a_2\alpha + a_3\alpha^2)\varphi_2^2\varphi_3/\varphi^3 + (210\varepsilon - 5a_1\alpha - 3a_2\alpha)\varphi_1\varphi_2\varphi_4/\varphi^3$$
$$- (35\varepsilon - a_2\alpha)\varphi_3\varphi_4/\varphi^2 - (21\varepsilon - a_1\alpha)\varphi_2\varphi_5/\varphi^2 - 7\varepsilon\varphi_1\varphi_6/\varphi^2$$
$$+ \varepsilon\varphi_7/\varphi + 6(5a_1 - a_3\alpha)\beta\varphi_1\varphi_2^2/\varphi^3 - 2(5a_1 - a_3\alpha)\beta\varphi_2\varphi_3/\varphi^2$$
$$- 5a_1\beta\varphi_1\varphi_4/\varphi^2 + a_1\beta\varphi_5/\varphi - 3(a_3\beta^2 - V)\varphi_1\varphi_2/\varphi^2$$
$$+ (a_3\beta^2 - V)\varphi_3/\varphi]. \tag{10}$$

上式中各项均为形如 $\varphi_\alpha^i\varphi_\beta^j\varphi_\gamma^k/\varphi^m$ 的零次齐次函数,即有 $i+j+k=m$,因此可以假定函数 $\varphi(x,t)$ 是下列方程的解:

$$\varphi_{xx} + 2\lambda_1\varphi_x + \lambda_2\varphi = 0, \tag{11}$$

其中 λ_1 和 λ_2 是待定参数.

1. 当 $\lambda_1^2 - \lambda_2 > 0$ 时,(11)式的基本解为

$$\varphi = (c_1 e^{\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_1^2-\lambda_2}\,x})e^{-\lambda_1 x}, \tag{12}$$

令

$$k = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2},$$

根据假定(1)式,若 $c_1c_2>0$,则 $\varphi = A\mathrm{ch}\,k(x+Vt-x_0)e^{-\lambda_1 x}$;若 $c_1c_2<0$,则 $\varphi = A\mathrm{sh}\,k(x+Vt-x_0)e^{-\lambda_1 x}$. 前者对应于孤波解,后者对应于奇异解,我们仅讨论后一种情形. 在此情形下,将 $\varphi = A\mathrm{ch}\,k(x+Vt-x_0)e^{-\lambda_1 x}$ 代入(8)和(2)式,经过繁琐的计算,并令 $e^{k(x+Vt-x_0)}$ 的各幂系数等于零,得独立的代数方程组

$$56(4\varepsilon - a_1\alpha - a_2\alpha)k^4 - 2(a_3\alpha^2 - 4a_1)\beta k^2 - a_3\beta^2 + V = 0, \tag{13}$$
$$(1968\varepsilon - 80a_1\alpha - 32a_2\alpha + 8a_3\alpha^2)k^4 - 4(9a_1 - 2a_3\alpha)\beta k^2 + 3a_3\beta^2 - 3V = 0, \tag{14}$$
$$16\varepsilon k^4 + 4a_1\beta k^2 + a_3\beta^2 - V = 0. \tag{15}$$

不难验证,在 $k\neq 0$ 的情况下,(9),(13),(14)和(15)四式只有三个是独立的,因此四个待定常数 α, β, V 和 k^2 均可由其中的一个(我们取为 k^2)和方程的系数确定下来.

2. 当 $\lambda_1^2 - \lambda_2 < 0$ 时,(11)式的实数形式的基本解为

$$\varphi = (c_1\cos(\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1^2}\,x) + c_2\sin(-\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1^2}\,x))e^{-\lambda_1 x}, \tag{16}$$

它对应于非孤波解,本文不加讨论.

3. 当 $\lambda_1^2 - \lambda_2 = 0$ 时,根据假定(1)式,(11)式的实数形式的基本解为

$$\varphi = c(x + Vt - x_0)e^{k(x+Vt-x_0)}, \tag{17}$$

其中 c 和 x_0 为任意常数. 上式对应于有理函数形式解,将它代入(8)和(2)式,经过繁琐的计算,并令 $(x+Vt-x_0)$ 的各幂系数等于零,得到确定待定常数 α, β 和 V 的独立的代数

方程组

$$V = a_3\beta^2,\ \alpha = a_3/a_1,\ 360\varepsilon + 12a_1\beta - 6(a_2 + 2a_1)\alpha + a_3\alpha^2 = 0. \tag{18}$$

3　应用举例

1．令 $\varepsilon=1,\ a_1=10,\ a_2=25,\ a_3=20$，(1)式给出 KK 方程[2,3]

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_xu_{xx} + 20u^2u_x. \tag{19}$$

1) 由(9)式，得

$$\alpha_+ = 12,\quad \alpha_- = 3/2. \tag{20}$$

(1) 对应于 $\alpha_+=12$，由方程组(13)—(15)得 $\beta_+ = -4k^2,\ V_+ = 176k^4$，利用(2)，(8)和(12)式得到孤波解

$$u(x,t) = -4k^2 + 12k^2\mathrm{sech}^2 k(x + 176k^4t - x_0). \tag{21}$$

这是一个左行孤波解.

(2) 对应于 $\alpha_-=3/2$，由方程组(13)—(15)得 $\beta_- = -\frac{1}{2}k^2,\ V_- = k^4$，利用(2)，(8)和(12)式得到孤波解

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k^2\mathrm{sech}^2 k(x + k^4t - x_0). \tag{22}$$

这也是一个左行孤波解，与文献[2]利用非局域对称变换给出的结果完全相同.

2) 由方程组(18)得

$$\alpha = 3,\ \beta = 9/4,\ V = 405/4. \tag{23}$$

利用(1)，(8)和(17)式得到有理解

$$u(x,t) = \frac{9}{4} - \frac{3}{(x - x_0 + 405t/4)^2}. \tag{24}$$

2　令 $\varepsilon=1,\ a_1=a_2=a_3=5$，(1)式给出 CDGSK 方程[4—6]

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_xu_{xx} + 5u^2u_x. \tag{25}$$

1) 由(9)式，得

$$\alpha_+ = 12,\quad \alpha_- = 6. \tag{26}$$

(1) 对应于 $\alpha_+=12$，由方程组(13)—(15)得 $\beta_+ = -4k^2,\ V_+ = 16k^4$，利用(2)，(8)和(12)式得到孤波解

$$u(x,t) = -4k^2 + 12k^2\mathrm{sech}^2 k(x + 16k^4t - x_0). \tag{27}$$

这也是一个左行孤波解.

(2) 对应于 $\alpha_-=6$，由方程组(13)—(15)得 $\beta_- = \frac{-4\pm\sqrt{5v'-64}}{5}k^2,\ V_- = v'k^4\ (v'\geqslant 12.8)$，利用(2)，(8)和(12)式得到两个双参量(孤波宽度参量 k 和孤波速度参量 v')孤波解族

$$u(x,t) = \frac{-4\pm\sqrt{5v'-64}}{5}k^2 + 6k^2\mathrm{sech}^2 k(x + v'k^4t - x_0). \tag{28}$$

这两个双参量孤波解族给出的都是左行孤波.

2) 由方程组(18)得

$$\alpha = 6, \quad \beta = V = 0. \tag{29}$$

利用(1),(8)和(17)式得到静态有理解

$$u(x, t) = -\frac{6}{(x - x_0)^2}. \tag{30}$$

3 令 $\varepsilon = -1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = -30$, (1)式给出五阶 KdV 方程[7]

$$u_t + u_{xxxxx} - 10uu_{xxx} - 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x = 0. \tag{31}$$

1) 由(9)式,得

$$\alpha_+ = -6, \quad \alpha_- = -2. \tag{32}$$

(1) 对应于 $\alpha_+ = -6$, 由方程组(13)—(15)得 $\beta_+ = 2k^2$, $V_+ = -56k^4$, 利用(2),(8)和(12)式得到孤波解

$$u(x, t) = 2k^2 - 6k^2\operatorname{sech}^2 k(x - 56k^4t - x_0). \tag{33}$$

这是一个右行孤波解.

(2) 对应于 $\alpha_- = -2$, 由方程组(13)—(15)得 $\beta_- = \frac{20 \pm \sqrt{30v' - 80}}{30}k^2$, $V_- = -v'k^4$ $\left(v' \geqslant \frac{8}{3}\right)$, 利用(2),(8)和(12)式得到两个双参量(孤波宽度参量 k 和孤波速度参量 v')孤波解族

$$u(x, t) = \frac{20 \pm \sqrt{30v' - 80}}{30}k^2 - 2k^2\operatorname{sech}^2 k(x - v'k^4t - x_0). \tag{34}$$

这两个双参量孤波解族给出的都是右行孤波.

2) 由方程组(18)得

$$\alpha = \frac{1}{18}, \beta = \frac{2485}{2332}, V = -45 \times \left(\frac{2485}{2332}\right)^2. \tag{35}$$

利用(2),(8)和(17)式得到有理解

$$u(x, t) = \frac{2485}{2332} - \frac{1}{18(x + vt - x_0)^2}. \tag{36}$$

[1] M. L. Wang *et al.*, *Phys. Lett.*, **A199**(1996), 67.

[2] Han Ping, Lou Sen-yue, *Acta Physics Sinica*, **46**(1997), 1249(in Chinese).

[3] A. P. Fordy and J. Gibbous, *Phys. Lett.*, **A199**(1996), 67.

[4] P. J. Caudrey, R. K. Dodd and J. D. Gibbon, *Proc. Roy. Soc.*, **A351**(1976) 407.

[5] K. Sawada and T. Kotera, *Prog. Theor. Phys.*, **51**(1974), 1355.

[6] S. Y. Lou, *Phys. Lett.*, **A175**(1993), 23.

[7] P. G. Drazin and R. S. Johson, Solitons: an Introduction (Cambridge University Press, New York, 1989).

NEW SOLITARY WAVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF FIFTH-ORDER NOLINEAR EVOLUTION EQUATIONS*

XU BING-ZHEN LI YUE-KE YAN XUN-LING
(*Institute of Optical Communication, Liaocheng Teachers College, Liaocheng* 252059)
(Received 27 March 1998; revised manuscript received 26 May 1998)

ABSTRACT

The exact explicit solitary wave solutions for a class of fifth-order nonliear evolution equations are obtained by using a homogeneous method. Particular important cases of the equation, such as Kaup-Kupershmidt, Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera and fifth-order KdV equations can be solved by this method.

PACC: 0340K; 0220

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69577009) and the Natural Science Foundation of Shangdong Province (Grant No. Y96G06105), China.