第 47 卷 第 12 期 1998 年 12 月 物 理 学 报 Vol. 47, No. 12, December, 1998
1000-3290/98/47(12)/1952-05 ACTA PHYSICA SINICA

阻尼谐振子的严格波函数

凌瑞良[1)] 冯金福
(江苏省常熟高等师范专科学校物理系, 常熟 215500)
(1998 年 4 月 6 日收到; 1998 年 5 月 25 日收到修改稿)

对与速度成正比的阻尼谐振子, 通过正则变换, 采用路径积分方法, 得出了阻尼谐振子的严格波函数, 还讨论了阻尼谐振子的坐标、动量的零点涨落.

PACC: 0365

1 引 言

阻尼谐振子的量子力学处理问题, 早在 70 年代末 80 年代初就被彭桓武[1]、朱如曾[2]较为详细地研究过. 文献[1]把阻尼谐振子当作一个基本的力学对象, 从阻尼谐振子的经典运动方程出发, 通过正则变换进行直接的量子化. 作为一种推广, 文献[2]在分析文献[1]对阻尼谐振子所提出的直接量子化方案的基础上, 给出了阻尼谐振子更普遍的直接量子化方案. 本文对与速度成正比的阻尼谐振子, 通过正则变换, 采用高斯型传播子, 从路径积分方法出发, 求出阻尼谐振子的严格波函数, 并讨论阻尼谐振子坐标、动量的零点涨落.

2 运动方程与哈密顿量

为方便计, 以阻尼力与速度一次方成正比的一维阻尼谐振子为例. 若以振子的物理变量(位移 x, 动量 p)表达, 一维阻尼谐振子的运动方程为

$$\dot{x} = p/m, \qquad \dot{p} = -\mu p/m - kx + f(t), \tag{1}$$

式中常数 m, μ, k 分别是振子质量、阻尼力与振子速度的比值、恢复力与振子位移的比值, 而外力 $f(t)$ 假定为时间 t 的函数, 且 $t=0$ 时, $f(t)=0$.

对应(1)式的量子化方案为

$$xp - px = \mathrm{i}\hbar e^{-\mu t/m}. \tag{2}$$

若取如下正则变换:

$$X = xe^{\mu t/2m} \qquad P = pe^{\mu t/2m} + \frac{1}{2}\mu X, \tag{3}$$

则有正则对易关系

$$[X, P] = \mathrm{i}\hbar. \tag{4}$$

于是, 由海森堡绘景中的力学量算符运动方程

1) 南京大学物理系访问学者.

$$\dot{X}=\frac{\partial H}{\partial P}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[X,H],$$

$$\dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial X}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[P,H].\tag{5}$$

可得阻尼谐振子的相应哈密顿量为

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}\left(k-\frac{\mu^2}{4m}\right)X^2-Xf(t)\mathrm{e}^{\mu t/2m},\tag{6}$$

相应的哈密顿算符为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{2}\left(k-\frac{\mu^2}{4m}\right)X^2-Xf(t)\mathrm{e}^{\mu t/2m}.\tag{7}$$

3　传播子的确定

用路径积分方法求阻尼谐振子的波函数,关键是确定阻尼谐振子的传播子.这里,采用高斯型传播子 K[3].

$$K(X,t;X_0,0)=A_0\exp[-C_1X^2-C_2X-C_3X_0^2-(C_4X+C_5)X_0],\tag{8}$$

式中 $X_0=X(0)=x$.

显然,传播子 K 满足薛定谔方程[4]

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}K=\hat{H}K.\tag{9}$$

把(7),(8)两式同时代入(9)式,并比较 X 与 X_0 同次幂项的系数,可得

$$C_1=\frac{m\omega}{2\mathrm{i}\hbar}\cot\omega t,\tag{10}$$

$$C_2=\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}[-\omega\cot\omega t\cdot R(t)+\dot{R}(t)],\tag{11}$$

$$C_3=\frac{m\omega\cot\omega t}{2\mathrm{i}\hbar},\tag{12}$$

$$C_4=-\frac{m\omega}{\mathrm{i}\hbar\sin\omega t},\tag{13}$$

$$C_5=\frac{m\omega}{\mathrm{i}\hbar\sin\omega t}R(t),\tag{14}$$

$$A_0=\left(\frac{m\omega}{2\pi\mathrm{i}\hbar\sin\omega t}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{m}{2\mathrm{i}\hbar}\int_0^t(-\omega\cot(\omega t)R+\dot{R})^2\mathrm{d}t\right],\tag{15}$$

式中 $R(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{\mu\tau/2m}\sin[\omega(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$, $\omega^2=\frac{k}{m}-\frac{\mu^2}{4m^2}$. 很显然,在阻尼不足($\mu^2<4mk$)的情况下,$\omega^2>0$. 把(10)—(15)式同时代入(8)式便可得传播子

$$K(X,t;X_0,0)=\left(\frac{m\omega}{2\pi\mathrm{i}\hbar\sin\omega t}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{m\omega}{2\mathrm{i}\hbar}\left[-\cot\omega t\cdot X^2-\frac{2}{\omega}(-\omega\cot\omega t\cdot R+\dot{R})X\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{\sin\omega t}(X-R)X_0-\cot\omega t\cdot X_0^2+\int_0^t\frac{1}{\omega}(-\omega\cot\omega t\cdot R+\dot{R})^2\mathrm{d}t\right]\right\}.\tag{16}$$

4 波函数

用如下公式计算波函数

$$\varphi_n(X,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}X_0\,K(X,t;X_0,0)\,\varphi_n(X_0,0).\tag{17}$$

这里 $\varphi_n(X_0,0)$是(7)式所表示的哈密顿算符在 t 等于零时的波函数,即

$$\varphi_n(X_0,0)=\left[\frac{\sqrt{m\omega/\hbar}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right]^{1/2}\mathrm{H}_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X_0\right)\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}X_0^2\right),\tag{18}$$

式中 H_n 是常用的厄密多项式,把(16),(18)两式同时代入(17)式可得

$$\begin{aligned}\varphi_n(X,t)=&\left[\frac{\sqrt{m\omega/\hbar}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right]^{1/2}I_n\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}X^2+\frac{m\omega}{\hbar}(R+\mathrm{i}\dot{R})X\right.\\&\left.-\frac{m\omega}{2\hbar}R^2\left\{1+\mathrm{i}\left[\cot\omega t+\frac{1}{\omega R^2}\int_0^t(-\cot\omega t\cdot R+\dot{R})^2\mathrm{d}t\right]\right\}\right\},\end{aligned}\tag{19}$$

式中

$$\begin{aligned}I_n=&\left[\frac{m\omega\sqrt{1+\cot^2\omega t}}{2\pi\mathrm{i}\hbar}\right]^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(1-\mathrm{i}\cot\omega t)\right.\\&\times\left.\left[X_0-\frac{(X-R)}{(1-\mathrm{i}\cot\omega t)\mathrm{i}\sin\omega t}\right]^2\right\}\mathrm{H}_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X_0\right)\mathrm{d}X_0.\end{aligned}\tag{20}$$

令 $y=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X_0$,并用如下公式:

$$\mathrm{e}^{2\tau y-\tau^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{H}_n(y)\frac{\tau^n}{n!},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a(x-b)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot\omega t}{1-\mathrm{i}\cot\omega t}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

可得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}I_n\frac{\tau^n}{n!}=&\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}}}\left(\frac{1+\mathrm{i}\cot\omega t}{1-\mathrm{i}\cot\omega t}\right)^{1/4}\exp\left[2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}(X-R)\right.\\&\times\left.\frac{\tau}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot\omega t}{1-\mathrm{i}\cot\omega t}}-\left(\frac{\tau}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}\cot\omega t}{1-\mathrm{i}\cot\omega t}}\right)^2\right]\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]\mathrm{H}_n\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}(X-R)\right]\frac{\tau^n}{n!}.\end{aligned}$$

这样,就可得到

$$I_n=\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]\mathrm{H}_n\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}(X-R)\right].\tag{21}$$

最后把(3),(21)式代入(19)式可得在策动力作用下阻尼谐振子量子化后的严格波函数为

$$\varphi_n(x,t)=\left[\frac{\sqrt{m\omega/\hbar}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right]^{1/2}\mathrm{H}_n\left[(x\mathrm{e}^{\mu t/2m}-R)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right]$$
$$\times\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\mathrm{e}^{\mu t/m}+\frac{m\omega}{\hbar}(R+\mathrm{i}\dot{R})x\mathrm{e}^{\mu t/2m}-\frac{m\omega}{2\hbar}R^2\right.$$
$$\left.\times\left\{1+\mathrm{i}\left[\cot\omega t+\frac{1}{\omega R^2}\int_0^t(-\cot\omega t\cdot R+\dot{R})^2\mathrm{d}t\right]\right\}\right\}$$
$$\times\exp\left[-\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t\right]. \tag{22}$$

5 讨 论

当 $t=0$ 时, $f(t)=0$, $X(0)=X_0=x$, (22)式能自然地退化到(18)式, 这样, 所论阻尼谐振子的坐标、动量的基态平均值和方均值分别为

$$\bar{x}=\langle 0|x|0\rangle=0, \tag{23}$$

$$\bar{p}=\langle 0|p|0\rangle=\langle 0|m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|0\rangle=0, \tag{24}$$

$$\overline{(\Delta x)^2}=\langle 0|x^2|0\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}=\frac{\hbar}{2m\sqrt{k/m-\mu^2/4m^2}}, \tag{25}$$

$$\overline{(\Delta p)^2}=\langle 0|p^2|0\rangle=\frac{m\hbar\omega}{2}+\frac{1}{4}\mu^2\frac{\hbar}{2m\omega}=\frac{\hbar k}{2\sqrt{k/m-\mu^2/4m^2}}. \tag{26}$$

(23)—(26)式的详细推导从略.

综上所述, 在对阻尼谐振子的量子力学处理中, 当不考虑外界策动力, 即 $t=0$, $f(t)=0$ 的情况下, 所论阻尼谐振子的坐标和动量的基态平均值均为零, 但它们的方均值不为零. 坐标和动量都有零点涨落, 两者的不确定关系为

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p)^2}=\frac{\hbar^2 k}{4(k-\mu^2/4m)}. \tag{27}$$

很明显, 当 $\mu=0$ 时, (27)式又能自然地退化到无阻尼谐振子坐标和动量的不确定关系. 这正是我们所期望的结果, 同时亦映证(22)式所表示的严格波函数是正确的. 最后顺便指出, 结合本文结果, 采用类似方法, 通过适当的机电模拟可以解决近期文献[5—7]中所讨论的介观电路量子化问题.

[1] Peng Huan-wu, *Acta Physica Sinica*, **29**(1980), 1084(in Chinese).

[2] Zhu Ru-zeng, *Acta Physica Sinica*, **30**(1981), 1410(in Chinese).

[3] Z. Y. Gu, S. W. Qian, *J. Phys.*, **A27**(1994), 3989.

[4] Yu Shou-jin. Advanced Quantum Mechanics (Science and Technology Publishing House of Shandong, Jinan 1985), p. 425(in Chinese).

[5] Chen Bin *et al.*, *Chinese Science Bulletin*, **41**(1996), 1170(in Chinese).

[6] Y. Q. Li, B. Chen., *Phys. Rev.*, **B53**(1996), 4027.

[7] B. Chen, Y. Q. Li, H. Fang *et al.*, *Phys. Lett.*, **A205**(1995), 121.

AN EXACT WAVEFUNCTION OF DAMPED HARMONIC OSCILLATOR

LING RUI-LIANG FENG JIN-FU
(*Department of Physics, Changshu Teachers College, Changshu* 215500)
(Received 6 April 1998; revised manuscript received 25 May 1998)

ABSTRACT

A damped harmonic oscillator was studied using canonical tramsformation and starting from the method of path integrals. An exact wavefunction for the damped harmonic oscillator has been obtained from a Gaussiantype propagator. The fluctuations of displacement and momentum at zero-point are also given.

PACC: 0365