

等离子体在磁场中能级分离可能产生的影响

聂世琦 林书铨 黄保麟

(上海交通大学 HDTV 研究所, 上海 200030)

(1998 年 2 月 27 日收到; 1998 年 6 月 26 日收到修改稿)

考虑到磁场中的带电粒子在与磁场方向垂直的两个方向上的能级分离, 采用玻耳兹曼统计分布, 得到几个公式. 说明了低温强磁场时可能出现的情况. 据此说明了如何对磁流体方程给予一定的修正.

PACC: 5110; 5200; 5220

1 引 言

通常情况下, 我们在研究等离子体的各种问题(如: 等离子体的振荡、波动, 磁流体力学等)时, 基本上采用经典理论就可以解决; 但是在一些情况下(如: 浓度增大, 温度升高时), 就需要考虑相对论效应^[1]和量子效应^[2,3]. 由量子力学可知, 带电粒子的能量在与磁场垂直方向上是不连续的, 本文讨论了这种情况对于等离子体特性的影响.

2 等离子体参量与磁场的关系

为处理问题方便, 我们认为等离子体满足:

1) 等离子体由一种未电离粒子及由它电离所产生的带单位电荷的离子和电子组成, 且离子和电子均匀混合密度不是非常高. 这样就可以只顾及碰撞和磁场的作用.

2) 将磁场中的带电离子由与磁场方向垂直的两个方向上动量所决定的能量看作是不连续的^[4], 且可能值为 $(n + 1/2)h\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 这里 h 为普朗克常量.

在与磁场方向平行的方向上动量所决定的能量为连续的.

3) 符合玻耳兹曼分布.

2.1 磁场对压强参量产生的影响

因为符合玻耳兹曼分布, 所以分布可描述为^[5]

$$d\theta = \frac{V}{ZH} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} d p_x d p_y d p_z, \quad (1)$$

其中 Z 为配分函数, H 为单位相格的体积, V 为系统的体积.

两个方向能量不连续, 所以

$$d\theta = \frac{V}{ZH} \exp(- (n_1 + 1/2) h\omega / kT) \exp(- (n_2 + 1/2) h\omega / kT) \exp(- \frac{p_z^2}{2mkT}) d p_x, \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V}{H} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \int \exp(-p_z^2/2mkT) \exp(-(n_2+1/2)h\omega/kT) \\ &\quad \times \exp(-(p_2+1/2)h\omega/kT) dp_z \\ &= \frac{V}{H} (2\pi kT)^{1/2} e^{-h\omega/kT} (1 - e^{-h\omega/kT})^{-2}, \end{aligned} \quad (3)$$

k 为玻耳兹曼常数.

沿磁场方向的压强为

$$P_z = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2mnv_z^2 d\theta = nkT. \quad (4)$$

与磁场方向垂直的方向上的压强为

$$P_x = P_y = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) h\omega n d\theta = \frac{1}{2} nh\omega \frac{e^{h\omega/kT} + 1}{e^{h\omega/kT} - 1}. \quad (5)$$

当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 显然

$$P_x = P_y = nkT. \quad (6)$$

设整个体系中, 未电离粒子的密度为 n_p , 离子和电子的密度相等 $n_i = n_e$, 则

$$\begin{aligned} P_z &= (n_p + n_i + n_e) kT, \\ P_x = P_y &= n_p kT + \frac{1}{2} n_i h\omega_i \frac{e^{h\omega_i/kT} + 1}{e^{h\omega_i/kT} - 1} + \frac{1}{2} n_e h\omega_e \frac{e^{h\omega_e/kT} + 1}{e^{h\omega_e/kT} - 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

通常, $\omega_i \ll \omega_e$, $h\omega_e \ll kT$, 所以

$$P_x = P_y \approx nkT \left(1 + \frac{1}{12} \frac{n_e}{n} \left(\frac{h\omega_e}{kT} \right)^2 \right), \quad (8)$$

$$P_z = nkT, \quad (9)$$

其中 $n = n_p + n_i + n_e$.

这说明, 磁场中的等离子体对于不同方向上的容器壁所产生的压强是有所差异的. 通常在处理问题时, 一般将压强作为标量处理, 但如果压强在与磁场同方向和垂直两个方向上有差异, 那么就不能看作是标量. 压强在方向上的这种差异与受洛仑兹力影响所产生的差异是不同的.

2.2 内能和热容

内能和配分函数的关系为

$$U = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \quad (10)$$

将第一节中的配分函数表达式代入, 可得

$$U = \frac{1}{2} NkT + \frac{Nh\omega}{e^{h\omega/kT} - 1}. \quad (11)$$

设未电离粒子数、离子数、电子数分别为 N_p , N_i , N_e . 则内能为

$$U = \frac{3}{2} N_p kT + \frac{1}{2} N_i kT + \frac{N_i h\omega_i}{e^{h\omega_i/kT} - 1} + \frac{1}{2} N_e kT + \frac{N_e h\omega_e}{e^{h\omega_e/kT} - 1}. \quad (12)$$

相应的热容量为

$$C_V = \frac{3}{2} kN_p + \frac{1}{2} kN_i + \frac{N_i (h\omega_i)^2}{kT^2} \frac{e^{h\omega_i/kT}}{(e^{h\omega_i/kT} - 1)^2} + \frac{1}{2} kN_e + \frac{N_e (h\omega_e)^2}{kT^2} \frac{e^{h\omega_e/kT}}{(e^{h\omega_e/kT} - 1)^2}. \quad (13)$$

通常 $\omega_i \ll \omega_e$, $h\omega_e \ll kT$, 所以

$$U \approx \frac{3}{2} NkT \left(1 - \frac{1}{2} \frac{N_e h\omega_e}{N kT} \right), \quad (14)$$

$$C_V \approx \frac{3}{2} Nk \left(1 + \frac{1}{4} \frac{N_e}{N} \left(\frac{h\omega_e}{kT} \right)^2 \right), \quad (15)$$

其中 $N = N_p + N_i + N_e$.

2.3 电导率

当电场方向与磁场方向相同均为 z 方向时, 将玻耳兹曼方程写为

$$f = f_0 + \frac{e\tau}{h} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_0, \quad (16)$$

z 方向上的电流密度为

$$\begin{aligned} j_z &= -n \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2ef \frac{p_z}{m} dp_z \\ &= -\frac{2ne}{m} \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_0 p_z - \frac{\tau E_z}{mkT} f_0 p_z^2 \right) dp_z = \frac{ne^2 \tau}{m} E_z. \end{aligned} \quad (17)$$

设电子和离子密度分别为 $n_e = n_i$, 则

$$\mathbf{j}_z = \left(\frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e} + \frac{n_i e^2 \tau_i}{m_i} \right) \mathbf{E}_z. \quad (18)$$

可以看到与磁场同方向上的电流密度与垂直磁场方向上能级分离没有关系.

当电场与磁场方向垂直为 x 方向时, 由于 x 和 y 方向上是相互关联的, 因此 y 方向上要产生电场, 此时 x 和 y 方向上的电流密度可写为

$$j_x = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} nev_x \left(f_0 + \frac{\tau E_x}{m} \nabla_{v_x} f_0 + \frac{\tau E_y}{m} \nabla_{v_y} f_0 \right) dp_z, \quad (19)$$

$$j_y = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} nev_y \left(f_0 + \frac{\tau E_x}{m} \nabla_{v_x} f_0 + \frac{\tau E_y}{m} \nabla_{v_y} f_0 \right) dp_z. \quad (20)$$

设 $j_y = 0$, 可得

$$\mathbf{E}_y = kT \frac{\pi}{2} \frac{(1 - e^{-h\omega/kT})^3}{h\omega e^{-h\omega/kT} (1 + e^{-h\omega/kT})} \mathbf{E}_x. \quad (21)$$

x 方向上的电流密度为

$$\mathbf{j}_x = 2nE_x \tau \frac{e^2}{m} (1 - e^{-h\omega/kT}) \left(\frac{1}{1 - e^{-h\omega/kT}} - \frac{1}{2} \right) + kT n \tau \frac{\pi e^2}{2m} \mathbf{E}_y \frac{(1 - e^{-h\omega/kT})(1 - e^{-h\omega/kT})^2}{h\omega e^{-h\omega/kT}}. \quad (22)$$

当 $h\omega \ll kT$ 时,

$$j_x \approx \frac{n\tau e^2}{m} E_x \left[1 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{h\omega}{kT} \right)^4 \right]. \quad (23)$$

同时计及电子和离子对电流的贡献, 则

$$j_x \approx \frac{n_e \tau_e e^2}{m_e} E_x \left[1 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{h\omega_e}{kT} \right)^4 \right] + \frac{n_i \tau_i e^2}{m_i} E_x \left[1 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{h\omega_i}{kT} \right)^4 \right]. \quad (24)$$

以上分析了磁场引起的荷电粒子在垂直磁场方向上能级分离对于等离子体的压强、内能和导电性能的参量所起的影响. 可以看到, 都是与 $h\omega/kT$ 有关, 而 $h\omega/kT \propto B/T$, 所以在低温强磁场时影响将比较明显.

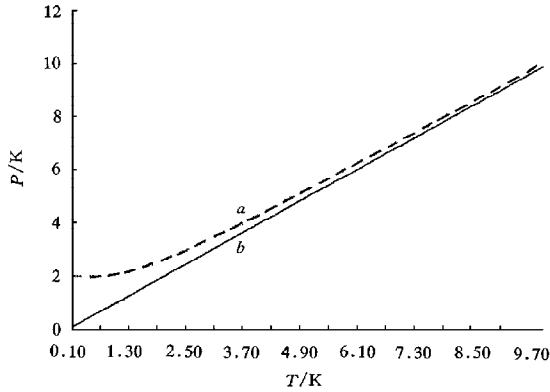


图 1 压强特性曲线 ($B=3\text{ T}$) 横坐标为温度 $T(\text{K})$; 纵坐标为 $P(\text{K}) = P_x/nk(\text{K})$; a 为考虑能级分离; b 为未考虑能级分离

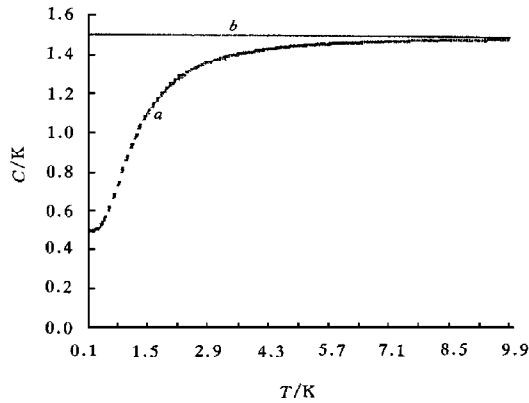


图 2 热容量特性曲线 ($B=3\text{ T}$) 横坐标为温度 $T(\text{K})$; 纵坐标为 $C(\text{K}) = (C_V/nk)(\text{K})$; 图注同图 1

在各种带电粒子中, 电子的 ω 值最大, 起主要作用. 下面讨论温度较低和磁场较强时的情况.

图 1 和图 2 是 $B=3\text{ T}$, 低温时, a 考虑与 b 未考虑能级分离两种情况下压强和热容

量的特性曲线.

当温度趋于零时, 与磁场方向垂直的方向上的电流会趋向无穷大. 在高温强磁场情况下的影响在下节讨论.

3 关于磁流体方程组的修正

下面是一组理想磁流体方程组^[6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, & (25) \\ \frac{d}{dt} (P \rho^{-5/3}) &= \frac{2}{3} \rho^{-5/3} \frac{j^2}{\sigma}, & \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

上面方程组中压强是以标量形式出现的, 而且 $P = nkT$, n 为电离和未电离粒子的密度之和. 当计及磁场存在时的压强各方向上的差异时, 由前面的结果可知, 平行于磁场方向的压强和垂直于磁场方向的压强关系为

$$\begin{aligned} P_{B\perp} &= P_{B\parallel} \lambda, & P_{B\parallel} &= nkT, & (26) \\ \lambda &= 1 + \frac{1}{12} \frac{n_e}{n} \left(\frac{h\omega_e}{kT} \right)^2, \end{aligned}$$

其它方向上的压强可表示为

$$P_\theta = P_{B\parallel} + P_{B\parallel} (\lambda - 1) \sin^2 \theta, \quad (27)$$

θ 为所取方向与磁场方向的夹角.

当压强不以标量表示时, 磁流体方程中有关压强的项要以密度替换, 压强的梯度项可由下式替换:

$$\nabla P = kT [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \theta] \nabla n. \quad (28)$$

因此方程组中的第二和第三个方程可写为

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -kT [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \theta] \nabla n + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, & (29) \\ kT \frac{d}{dt} (n \rho^{-5/3}) &= \frac{2}{3} \rho^{-5/3} \frac{j^2}{\sigma}. \end{aligned}$$

从前面可知, 由磁场引起的能级分离也会使得电流在与磁场垂直的两个方向上相互影响, 这个效果应该叠加到洛伦兹力产生的效果上去, 也就是将广义欧姆定律给予修正. 磁流体方程中的第四个方程就是广义欧姆定律的一种形式, 修正的形式为

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \gamma \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right), \quad (30)$$

其中

$$\gamma = \frac{\pi}{2} kT \left(\frac{(1 - e^{-h\omega_e/kT})^3}{h\omega_e e^{-h\omega_e/kT} (1 + e^{-h\omega_e/kT})} + \frac{(1 - e^{-h\omega_i/kT})^3}{h\omega_i e^{-h\omega_i/kT} (1 + e^{-h\omega_i/kT})} \right). \quad (31)$$

同理,在其它形式的磁流体方程中,考虑能级分离因素,可按同样方法修正.

在研究等离子体的波动现象时,如果等离子体内的磁场比较强,也要考虑到上述因素.例如,当等离子体在稳恒均匀磁场中放置时,下列方程可以表示它^[6]:

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n_1 e^{-i\omega t}, & -i\omega n_{a1} + n_{a0} \nabla \cdot \mathbf{V}_{a1} &= 0, \\ -i\omega \mathbf{V}_{a1} &= \frac{q_a}{m_a} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{V}_{a1} \times \mathbf{B}_0}{c} \right), & (32) \\ \nabla \times \mathbf{E}_1 &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_1, & \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \sum_a q_a n_{a0} \mathbf{V}_{a1}, \end{aligned}$$

其中 n_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{E}_1 , \mathbf{V}_1 为扰动量.

从上面方程可以看到,方程中无压强表示,修正时不用考虑压强的影响,因此只需对第三个方程作一修正.

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{V}_{a1} &= \frac{q_a}{m_a} \left(\mathbf{E}_1 + \gamma \frac{\mathbf{E}_1 \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)}{(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)} + \frac{\mathbf{V}_{a1} \times \mathbf{B}_0}{c} \right), & (33) \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} kT \sum_a \frac{(1 - e^{-h\omega_a/kT})^3}{h\omega_a e^{-h\omega_a/kT} (1 + e^{-h\omega_a/kT})}. \end{aligned}$$

当温度较高时,磁场需要非常强(这种情况一般较难遇到,天体中有时可能存在这种情况),能级分离的影响才能显现出来.为了了解影响的大小,设想一个轴上有源的等离子体柱,磁场方向与轴平行,图3至图5给出了 $B=10^6$ T,不同温度时, a 考虑与**b**未考虑能级分离两种情况下的分布.

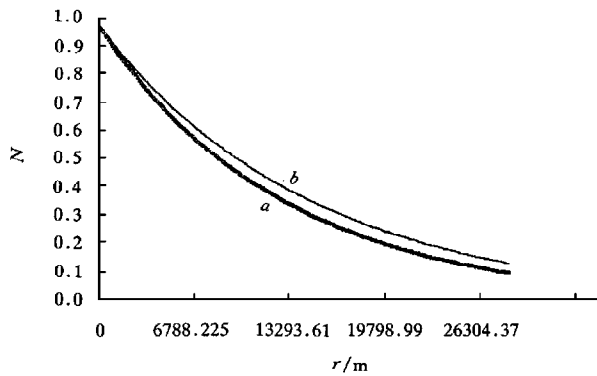


图3 温度为 $T=10^6$ K 时的情况 ($B=10^6$ T) 横坐标为到中心的距离;纵坐标为 $N=n/n_0$; a 为粗实线(考虑能级分离); b 为细实线(未考虑能级分离)

以上我们讨论了磁场使等离子体能级分离所产生的影响.在磁场足够强的情况下,若温度足够低,这些影响在实验中就可能表现出来.

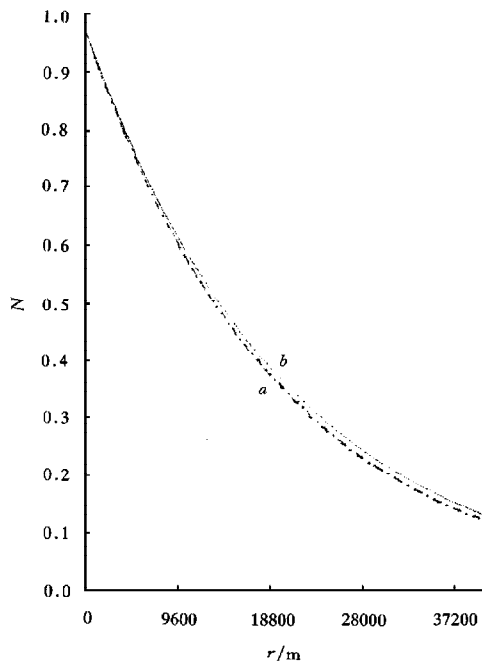


图4 温度为 $T=2 \times 10^6$ K 时的情况 ($B=10^6$ T)
 a 考虑能级分离; b 未考虑能级分离; 其余图注同

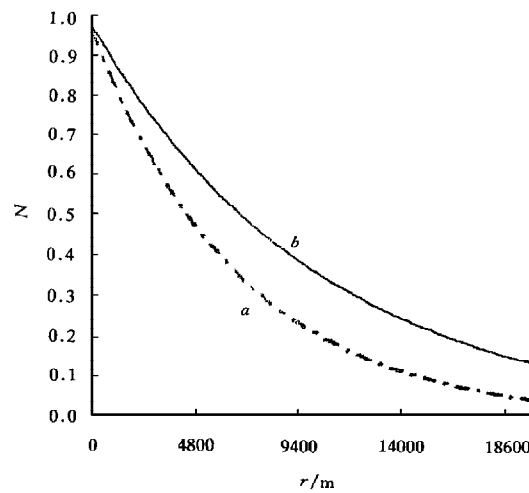


图5 温度为 $T=5 \times 10^5$ K 时的情况 ($B=10^6$ T) 图注
 同图4

图3

- [1] Q. K. Lu, *Chinese Science Bulletin*, **40**(1995), 1315.
 [2] D. F. Dubois, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **7**(1959), 173.
 [3] Zheng Chun-kai, *Nuclear Fusion and Plasma Physics*, **10**(3)(1990), 159 (in Chinese).
 [4] Zeng Jin-yan, *Quantum Mechanics, Vol 1* (Science Press, Beijing, 1990) (in Chinese).
 [5] Wang Cheng-tai, *Statistical Physics* (Tsinghua University Press, Beijing, 1991) (in Chinese).
 [6] Ma Teng-cai, *Principle of Plasma Physics* (University of Science and Technology of China Press, Hefei, 1988) (in Chinese).

THE EFFECTS OF CHARGED PARTICLE SYSTEM'S ENERGY LEVEL SEPERATION IN MAGNETIC FIELD

NIE SHI-QI LIN SHU-QUAN HUANG BAO-LIN

(HDTV Institute of Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(Received 27 February 1998; revised manuscript received 26 June 1998)

ABSTRACT

In this paper, the charged particle system's energy level separation in the vertical direction of the magnetic field is considered, according to Boltzmann distribution. Several equations are obtained. The effects are obvious under the condition of low temperature and high intensity magnetic field. Several equations of plasma MHD are corrected.

PACC: 5110; 5200; 5220