第 47 卷 第 12 期 1998 年 12 月
1000-3290/98/47(12)/2074-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 47, No. 12, December, 1998

考虑 Hawking 蒸发对 Schwarzschild 时空反作用后的静态球对称度规*

赵 仁
(雁北师范学院物理系, 大同 037000)
刘 辽
(北京师范大学物理系, 北京 1000875)
(1998 年 2 月 23 日收到)

由于黑洞具有 Hawking 辐射, 它对时空必有影响(所谓反作用). 结合用热力学方法研究黑洞反作用问题所得结果. 应用求解考虑辐射场存在时的半经典爱因斯坦场方程. 得出考虑 Hawking 蒸发对 Schwarzschild 时空反作用后的静态球对称度规. 由此所得一切物理结论都是自洽的.

PACC: 9760L; 0420

自从 Hawking 用弯曲时空量子场论得出黑洞具有热辐射以来, 人们对黑洞的量子辐射研究做了大量的工作[1,2]. 近年来人们对 Hawking 辐射场对黑洞时空的反作用的研究非常活跃[3,4]. 我们首先提出了一种热力学方法研究此问题, 即把弯曲时空的 Schwarzschild 黑洞与辐射场组成的热力学系统, 当作由黑洞、平直时空的辐射场和二维热力学膜(与事件视界重合)组成的热力学系统. 避开求解能-动张量的困难, 给出了考虑反作用后黑洞的能量、熵的修正值. 并为研究复杂黑洞的反作用问题提供了途径. 文献[5,6]通过将反映时空性质的纯几何量视为 c 数(即满足非量子化的数量关系), 而将反映物质性质状态的力学量视为 q 数(满足量子化的对易关系), 即从半经典爱因斯坦方程

$$G_{ab} = -\kappa \langle T_{ab} \rangle$$

出发, 也得到了一些有意义的结果. 然而这一方法-所谓动力学方法的局限性是众所周知的, 除了在 Schwarzschild 真空球对称情况, 能-动张量的真空平均值是很难求出来的. 本文应用热力学方法, 直接把反作用问题归结到对时空的影响, 求解考虑 Hawking 蒸发后的半经典爱因斯坦场方程, 得到考虑蒸发反作用后的静态球对称度规, 以及辐射的能-动张量. 所得一切物理结论都是自洽的, 并且这个方法远比 York 首创的动力学方法简单.

设考虑 Hawking 蒸发对 Schwarzschild 时空的反作用后的静态球对称度规为

$$ds^2 = -\lambda dt^2 + \lambda^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1}$$

其中

* 国家自然科学基金(批准号: 19773003)和山西省自然科学基金(批准号: 971009)资助的课题.

$$\lambda = 1 - \frac{2M}{r + K}, \tag{2}$$

K 为一小的常数. 利用

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \tag{3}$$

可算得克氏符的非零分量为

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}, \quad \Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\lambda\lambda', \\
&\Gamma^1_{22} = -r\lambda, \quad \Gamma^1_{33} = -r\lambda\sin^2\theta, \quad \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{33} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta,
\end{aligned} \tag{4}$$

式中

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dr} = \frac{1-\lambda}{r + K}.$$

利用

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}, \tag{5}$$

可算得里奇张量的非零分量为

$$R^0_0 = -\lambda^2 R_{11}, \tag{6}$$

$$R_{33} - R_{22}\sin^2\theta, \tag{7}$$

$$R_{00} = \frac{\lambda K(\lambda - 1)}{r(r + K)^2}, \tag{8}$$

$$R_{22} = -\frac{2MK}{(r + K)^2}. \tag{9}$$

把上式代入爱因斯坦场方程

$$R_{\mu\nu} = -8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \tag{10}$$

可得独立方程为

$$R_{00} = 8\pi\left[\lambda T^0_0 - \frac{1}{2}\lambda T\right], \tag{11}$$

$$R_{22} = -8\pi\left[r^2 T^2_2 - \frac{1}{2} r^2 T\right], \tag{12}$$

式中 $T = T^{\mu}_{\mu}$.

考虑到时空的球对称性及热辐射方程，可得 $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3$, $T^0_0 = aT^4$. 所以方程(11)和(12)可化为

$$R_{00} = -4\pi\lambda(3T^2_2 - T^0_0), \tag{13}$$

$$R_{22} = 4\pi r^2(T^2_2 + T^0_0). \tag{14}$$

把(9)式代入(14)式得

$$-\frac{2MK}{(r + K)^2} = 4\pi r^2(T^2_2 + T^0_0), \tag{15}$$

把(8)式代入(13)式可得

$$\frac{K(\lambda-1)r}{(r+K)^2}=-4\pi r^2(3T_2^2-T_0^0), \tag{16}$$

解得

$$T_0^0=-\frac{MK(4r+3K)}{8\pi r^2(r+K)^3}, \tag{17}$$

$$T_2^2=-\frac{MK^2}{8\pi r^2(r+K)^3}. \tag{18}$$

大量工作表明,考虑反作用后必然对时空带来影响.考虑到黑洞的无毛定理,对Schwarzschild黑洞我们能得到的信息只有能量或温度.而在黑洞附近辐射场的能量密度只与温度有关,那么反作用对黑洞的影响必然与温度有关.在此条件下既要保持黑洞的辐射温度不变[3],又要保持时空的对称性,那么我们只能取度规为(1)式的形式.考虑到事件视界附近辐射场具有热谱的形式[3],并注意到 K 与 M 的量纲关系,可取 K 为温度的最简单函数形式($C=\hbar=G=K_B=1$)

$$K=-\frac{\beta}{960\pi 2M}, \tag{19}$$

其中 β 为一无量纲的未定常数.

首先看在事件视界附近辐射场的能量密度的形式,由 $\lambda=0$ 可得黑洞的事件视界位置

$$r_H=2M+\frac{\beta}{960\pi 2M}. \tag{20}$$

把上式代入(16)式可得

$$\begin{aligned}T_0^0&=-\frac{MK(8M-K)}{8\pi(2M)^3(2M-K)^2}\\&\approx\beta\frac{\pi^2}{15}T_H^4=\beta aT_H^4,\end{aligned} \tag{21}$$

式中 $a=\pi^2/15$, $T_H=1/8\pi M$, M 为不考虑辐射影响时黑洞的(质量)能量.

由文献[3,4]知,在事件视界附近 Hawking 辐射为平直时空辐射谱.故 $\beta=1$. Hawking辐射温度为

$$T_H=\frac{1}{8\pi M}. \tag{22}$$

再看考虑反作用后黑洞的熵.由熵与事件视界面积的关系可得

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{4}A=\pi\left(2M+\frac{1}{960\pi 2M}\right)^2\\&=4\pi M^2+\frac{1}{480}+\frac{1}{(960M)^2 4\pi}\\&\approx S_0+\frac{1}{480}.\end{aligned} \tag{23}$$

由文献[3]的(39)式知,考虑反作用后的熵为

$$S=4\pi M^2\left(1+\frac{8\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M^2}\right). \tag{24}$$

上式与(23)式比较可知，当文献[3]中引进的无量纲因子 $\lambda=3/16\pi$ 时，与我们所讨论的结果一致．

最后讨论考虑反作用影响的情况下黑洞的能量，由 Bekenstein 和 Smarr 公式可得黑洞的总能量(或覆被质量)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\kappa}{4\pi}A = \frac{\kappa}{4\pi}(4M^2 - 4MK + K^2) \\ &= M - K + \frac{K^2}{4M} \\ &\approx M - K \\ &= M + \frac{1}{1920\pi M}. \end{aligned} \tag{25}$$

通过以上分析，度规(1)式所得一切结论都是合理的，所以我们得到考虑 Hawking 蒸发对 Schwarzschild 时空反作用后的静态球对称度规为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\lambda \mathrm{d}t^2 + \lambda^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r+K}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r+K}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r - \frac{1}{1920\pi M}}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r - \frac{1}{1920\pi M}}\right)^{1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2. \end{aligned} \tag{26}$$

由以上讨论我们得到考虑 Hawking 蒸发对 Schwarzschild 时空反作用后：

1．黑洞的温度保持不变．

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{1}{8\pi M}, \tag{27}$$

M 为不考虑反作用时黑洞的质量(能量)．

2．黑洞的能量与熵发生变化．分别为

$$E = M + \frac{1}{1920\pi M},\ S = S_0 + \frac{1}{480},$$

S_0 为不考虑蒸发影响时黑洞的熵．

3．黑洞在事件视界附近的热辐射场具有黑体谱性质．

$$T_0^0(r_{\mathrm{H}}) \approx aT_{\mathrm{H}}^4. \tag{28}$$

4．黑洞辐射场对 Schwarzschild 时空的度规具有影响，即(1)式中的 K 不等于零．

5．对很大的黑洞或者 M 很大时，$T\rightarrow 0$, $K\rightarrow 0$,

$$S \approx S_0,\ E \approx K.$$

所讨论结果回到 Schwarzschild 时空，这是一个合理的结果．

[1] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.

[2] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **31**(1973), 161.

[3] C. G. Huang, L. Liu and Z. Zhao, *Gen. Rel. Grav.*, **12**(1993), 1267.

[4] Zhao Ren and Liu Liao, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 1942 (in Chinese); Li-Xin Li, *Gen. Rel. Grav.*, **28**

(1996), 1171.
[5] J. W. York, Jr., *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 775.
[6] D. Hochbeg, T. W. Kephart, J. W. York, Jr., *Phys. Rev.*, **D48**(1993), 479.

THE REACTION TO THE SCHWARZSCHILD SPACE-TIME BY THE HAWKING EVAPORATION*

ZHAO REN
(*Department of Physics, Yanbei Teachers College, Datong* 037000)
LIU LIAO
(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875)
(Received 23 February 1998)

ABSTRACT

For the black hole having Hawking radiation, it must have effect on the space-time metric (the so-called back-reaction). By combination of the result from themodynamical approach with the back-reaction of the black hole and the semiclassical Einstein equation, we get the modified Schwarzschild space-time metric. This method is much more simple and convenient than that of Jork's.

PACC: 9760L; 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19773003) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province (Grant No. 971009), China.