

有限磁场中等离子体圆柱 波导的传播特性^{*}

胡斌杰 阮成礼 林为干

(电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

(1997 年 6 月 23 日收到)

分析了有耗介质中等离子体圆柱波导在有限外加磁场中的传播特性. 重点讨论了波导传播常数随等离子体参数、介质参数和外加磁场的变化. 分析结果表明, 有限强磁场中的等离子体波导的传播特性比无外磁场或外加磁场为无穷大时具有更强的控制能力.

PACC: 5240F; 4110H; 5240D

1 引 言

近年来, 电介质波导由于其在毫米波、亚毫米波以及光波等领域具有独特的特性而引起广泛重视. 等离子体波导作为一种新型的波导也越来越引起人们的极大兴趣^[1-11]. 目前, 有关磁化等离子体波导的研究主要局限在金属磁化等离子体波导的范围内^[5-11], 而有关磁化等离子体介质波导理论方面的研究则很少. 这一方面是由于金属磁化等离子体波导比磁化等离子体介质波导具有较小的衰减特性, 在传输带电粒子和电磁能量领域得到较为广泛的应用; 另一方面是因为金属磁化等离子体波导的特征方程的特征值具有较好离散谱的特点, 因而理论分析比较简单. 然而, 由于磁化等离子体介质波导的约束条件存在一定的灵活性, 使得它在一定的条件下可仿真金属磁化等离子体波导的性能, 且具许多金属磁化等离子体波导所不具备的特性. 因此对磁化等离子体介质波导的研究, 无论从理论角度还是从实用角度上看, 都具有极其重要的意义. 因为工程中的任何应用都是以全面了解本征模的特性为前提条件的.

本文导出了介电常数为张量情况下纵向场量所满足的波动方程, 在柱坐标系中给出了纵向场与横向场的关系, 利用边界条件导出了特征方程. 用 Muller 求根法结合压缩技术严格解特征方程的方法, 分析了波导传播常数随等离子体参数、介质参数和外磁场的变化, 通过与外磁场为零^[4]和外磁场为无限大两种情况的比较, 结果表明, 可以通过改变等离子体参数、介质参数和外磁场的大小来更有效地控制该波导的传播特性.

^{*} 国家高等学校博士学科点专项科研基金资助的课题.

2 特征方程

2.1 基本方程

当存在轴向的外加磁场 B_0 时, 冷等离子体的介电常数张量为^[12]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\xi^2}{1 - \tau^2}, \quad \varepsilon_2 = i \frac{\tau \xi^2}{1 - \tau^2} = -i \varepsilon_g, \quad \varepsilon_3 = 1 - \xi^2, \quad (2)$$

$$\xi = \frac{\omega_p}{\omega}, \quad \tau = \frac{\omega_c}{\omega}, \quad (3)$$

这里 $\omega_p = (Ne^2/m\varepsilon_0)^{1/2}$ 为等离子体频率, $\omega_c = eB_0/m$ 为电子回旋频率.

利用麦克斯韦方程可以导出此时 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的纵向场分量满足的波动方程^[5,6]

$$\begin{bmatrix} -\nabla_{\perp}^2 & b^{\mu} \\ b^e & -\nabla_{\perp}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_z^I \\ \mathbf{H}_z^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^e \mathbf{E}_z^I \\ c^{\mu} \mathbf{H}_z^I \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} b^e &= \gamma \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \varepsilon_3 / \varepsilon_1, & b^{\mu} &= -\gamma \omega \mu_0 \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \\ c^e &= (k_0^2 \varepsilon_1 - \gamma^2) \varepsilon_3 / \varepsilon_1, & c^{\mu} &= k_0^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) / \varepsilon_1 - \gamma^2, \\ \nabla_{\perp}^2 &= \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

解方程(4)可得

$$\mathbf{E}_z^I = B_1 J_n(p_1 r) + B_2 J_n(p_2 r), \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_z^I = B_1 h_1 J_n(p_1 r) + B_2 h_2 J_n(p_2 r), \quad (7)$$

式中

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{ (c^e + c^{\mu}) \pm [(c^e + c^{\mu})^2 - 4(c^e c^{\mu} - b^e b^{\mu})]^{1/2} \}, \quad (8)$$

$$h_{1,2} = \frac{1}{b^{\mu}} (c^e - p_{1,2}^2), \quad (9)$$

以上场量中省略了因子 $\exp(-i\gamma z + in\theta)$.

由(6)–(9)式可以看出, 在外磁场为有限 ($B_0 \neq 0, B_0 \neq \infty$) 情况下, $\mathbf{E}_z^I$ 和 $\mathbf{H}_z^I$ 不再相互独立. 径向波数之间的关系为

$$p_1^2 + p_2^2 = c^e + c^{\mu}, \quad p_1^2 p_2^2 = c^e c^{\mu} - b^e b^{\mu}. \quad (10)$$

横向场量可用纵向场量 $\mathbf{E}_z^I$ 和 $\mathbf{H}_z^I$ 表示成

$$\begin{bmatrix} E_r^I \\ E_\theta^I \\ H_r^I \\ H_\theta^I \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -iA_0 & -A_1^e/r & A_2^e & -iA_3^e/r \\ A_1^e & -iA_0/r & iA_3^e & A_2^e/r \\ A_1^e & iA_2^e/r & -iA_0 & -A_3^e/r \\ -iA_2^e & A_1^e/r & A_3^e & -iA_0/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z^I}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z^I}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H_z^I}{\partial z} \\ \frac{\partial H_z^I}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma(k_0^2 \epsilon_1 - \gamma^2), \\ A_1^e &= \gamma k_0^2 \epsilon_g, \\ A_2^e &= \omega \mu_0 k_0^2 \epsilon_g, \\ A_3^e &= \omega \mu_0 (k_0^2 \epsilon_1 - \gamma^2), \\ A_1^e &= -\gamma^2 \omega \epsilon_0 \epsilon_g, \\ A_2^e &= \omega \epsilon_0 [k_0^2 (\epsilon_1^2 - \epsilon_g^2) - \gamma^2 \epsilon_1], \\ A_3^e &= \gamma k_0^2 \epsilon_g, \\ \Delta &= [k_0^2 (\epsilon_1 - \epsilon_g) - \gamma^2] [k_0^2 (\epsilon_1 + \epsilon_g) - \gamma^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

2.2 特征方程

图 1 是所讨论的数学物理模型. 该模型中将空间分成两个不同的区域, 其中: 圆柱内为均匀等离子体, 圆柱外为有耗介质, 各区域的参数如图所示.

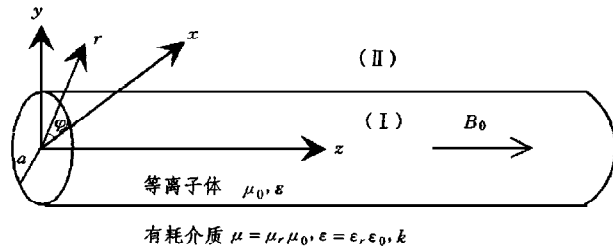


图 1 有限磁场中的等离子体圆柱波导

设区域 II 中场的纵向分量为

$$\begin{aligned} E_z^{\text{II}} &= D_1 H_n(pr) \exp(-i\gamma z + in\theta), \\ H_z^{\text{II}} &= D_2 H_n(pr) \exp(-i\gamma z + in\theta) \quad (r \geq a), \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$p^2 = k^2 - \gamma^2. \quad (14)$$

这里 $H_n = (H_n^{(2)})$ 为第二类汉开尔函数. 利用纵向场可将横向场表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_r^{\parallel} \\ \mathbf{E}_\theta^{\parallel} \\ \mathbf{H}_r^{\parallel} \\ \mathbf{H}_\theta^{\parallel} \end{bmatrix} = \frac{1}{p^2} \begin{bmatrix} -i\gamma & 0 & 0 & -i\omega\mu/r \\ 0 & -i\gamma/r & i\omega\mu & 0 \\ 0 & i\omega\epsilon/r & -i\gamma & 0 \\ -i\omega\epsilon & 0 & 0 & -i\gamma/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{E}_z^{\parallel}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_z^{\parallel}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_z^{\parallel}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_z^{\parallel}}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

在边界 $r = a$ 上, 场的切向分量应保持连续, 于是有

$$B_1 J_n(p_1 a) + B_2 J_n(p_2 a) = D_1 H_n(pa), \quad (16)$$

$$B_1 h_1 J_n(p_1 a) + B_2 h_2 J_n(p_2 a) = D_2 H_n(pa), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \left[p_1 f_1^e(h_1) J_n'(p_1 a) + \frac{n}{a} g_1^e(h_1) J_n(p_1 a) \right] B_1 \\ & + \left[p_2 f_1^e(h_2) J_n'(p_2 a) + \frac{n}{a} g_2^e(h_2) J_n(p_2 a) \right] B_2 \\ & = \frac{1}{p^2} \left[\frac{n\gamma}{a} H_n(pa) D_1 + i\omega\mu p H_n'(pa) D_2 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left[p_1 f_1^u(h_1) J_n'(p_1 a) + \frac{n}{a} g_1^u(h_1) J_n(p_1 a) \right] B_1 \\ & + \left[p_2 f_1^u(h_2) J_n'(p_2 a) + \frac{n}{a} g_2^u(h_2) J_n(p_2 a) \right] B_2 \\ & = \frac{1}{p^2} \left[-i\omega\epsilon p H_n'(pa) D_1 + \frac{n\gamma}{a} H_n(pa) D_2 \right], \end{aligned} \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} f_j^e(h_j) &= (A_1^e + iA_3^e h_j)/\Delta, \\ g_j^e(h_j) &= (A_0 + iA_2^e h_j)/\Delta, \\ f_j^u(h_j) &= (-iA_2^u + A_3^u h_j)/\Delta, \\ g_j^u(h_j) &= (iA_1^u + A_0 h_j)/\Delta \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

方程组(16)–(19)有非零解的条件是其系数行列式为零, 于是得到该问题的本征方程

$$\begin{aligned} & \left[f_1^e(h_1) p_1^2 J(x_1) - i\omega\mu h_1 H(x) + n \left(\frac{p_1^2}{x_1^2} g_1^e(h_1) - \frac{\gamma}{x^2} \right) \right] \left[f_2^u(h_2) p_2^2 J(x_2) + i\omega\epsilon H(x) \right. \\ & + \left. n \left(\frac{p_2^2}{x_2^2} g_2^u(h_2) - \frac{\gamma}{x^2} h_2 \right) \right] - \left[f_1^u(h_1) p_1^2 J(x_1) + i\omega\epsilon H(x) + n \left(\frac{p_1^2}{x_1^2} g_1^u(h_1) - \frac{\gamma}{x^2} h_1 \right) \right] \\ & \times \left[f_2^e(h_2) p_2^2 J(x_2) - i\omega\mu h_2 H(x) + n \left(\frac{p_2^2}{x_2^2} g_2^e(h_2) - \frac{\gamma}{x^2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$J(x) = \frac{J_n'(x)}{x J_n(x)},$$

$$H(x) = \frac{H'_n(x)}{xH_n(x)},$$

$$x_1 = p_1 a, \quad x_2 = p_2 a, \quad x = pa. \quad (22)$$

当 $n=0$ 时, 方程(21)可简化成

$$\begin{aligned} & [f_1^2(h_1) p_1^2 J(x_1) - i\omega\mu h_1 H(x)] [f_2^2(h_2) p_2^2 J(x_2) + i\omega\epsilon H(x)] \\ & - [f_1^2(h_1) p_1^2 J(x_1) + i\omega\epsilon H(x)] [f_2^2(h_2) p_2^2 J(x_2) - i\omega\mu h_2 H(x)] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

可见, 当外磁场为有限时, 轴对称情况下的混合模不再退化成 TM 波和 TE 波, 这一点与无外磁场和外磁场为无限大的情况完全不同.

3 数值计算与讨论

图 2 给出的是传播常数与等离子体频率的变化关系. 图 2(a) 是衰减常数曲线, 图 2(b) 是相位常数曲线. 由图 2(a) 可以看出, 当等离子体频率变化时, 无论是电性有耗介质还是磁性有耗介质, 等离子体波导的衰减常数都有一个极小值. 在极小值所对应的横坐标左右两侧, 磁性有耗介质中等离子体波导的衰减常数总是大于电性有耗介质中波导的衰减常数. 数值计算的结果表明, 使等离子体波导衰减常数取极小值时, ω_p 值的大小与外磁场的强弱有着密切的关系.

图 2(b) 说明, 两种有耗介质中等离子体波导具有近似相同的相位常数, 且不同模式之间的相位常数变化并不明显.

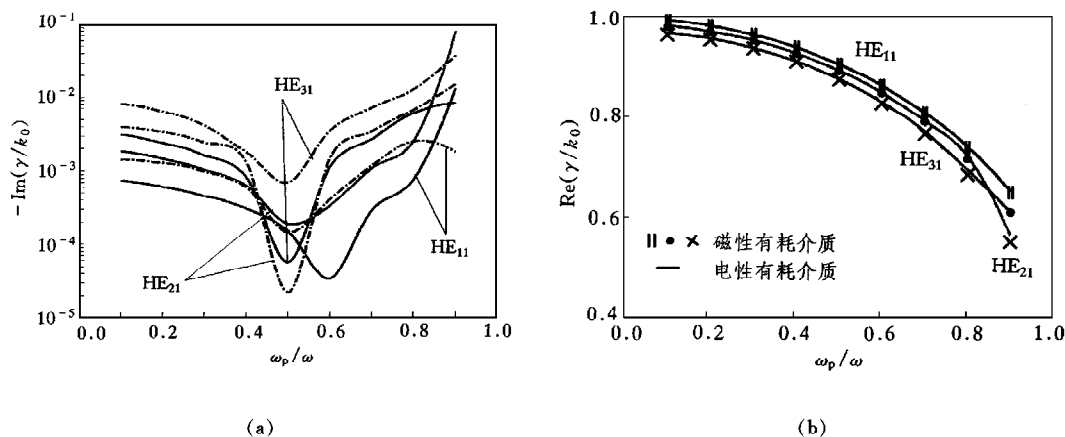


图 2 (a) 为等离子体频率与衰减常数的关系, (b) 为等离子体频率与相位常数的关系. $a/\lambda=3$, $\omega_c/\omega=$

0.5. 电性介质: $\mu_r=1$, $\epsilon_r=10\exp(-i\varphi_c)$, $\varphi_c=45^\circ$; 磁性介质: $\epsilon_r=1$, $\mu_r=10\exp(-i\varphi_m)$, $\varphi_m=45^\circ$

外磁场对等离子体波导衰减常数的影响由图 3 给出. 图 3(a) 是 $\omega_c < \omega$ 时的关系曲线, 图 3(b) 是 $\omega_c > \omega$ 时的关系曲线. 由图 3 可以看出: i) 在 $\omega_c < \omega$ 情况下, 磁场对衰减常数的影响要比 $\omega_c > \omega$ 时大得多; 前者波导有一极小值, 后者波导有一极大值. ii) $\omega_c > \omega$ 时, 两种有耗介质中等离子体波导衰减常数总是大于 $\omega_c < \omega$ 时的衰减常数, 尤其是磁性有耗介质.

图 4 是介质损耗对等离子体波导传播常数的影响. 图 4(a) 表明, 当介质损耗变化时, 等离子体波导的衰减常数有一个极大值. 在 $\max_1$ 附近, 磁性有耗介质中等离子体波导的衰减常数小于电性有耗介质中等离子体波导的衰减常数; 当介质损耗大于 $\max_2$ 后, 磁性有耗介质中等离子体波导的衰减常数反而大于电性有耗介质中等离子体波导的衰减常数.

图 4(b) 说明介质损耗对等离子体波导相位常数的影响很小, 且两种有耗介质损耗对应的等离子体波导的相位常数在数值上几乎相同.

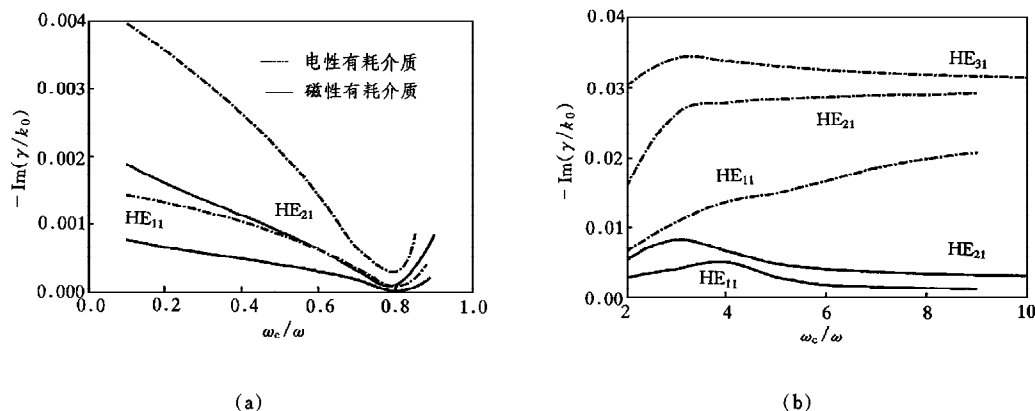


图 3 外磁场与衰减常数的关系 (a) 为 $\omega_c < \omega$, (b) 为 $\omega_c > \omega$. $a/\lambda = 3$, $\omega_p/\omega = 0.33$. 电性介质: $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 10\exp(-i\varphi_e)$, $\varphi_e = 45^\circ$; 磁性介质: $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 10\exp(-i\varphi_m)$, $\varphi_m = 45^\circ$

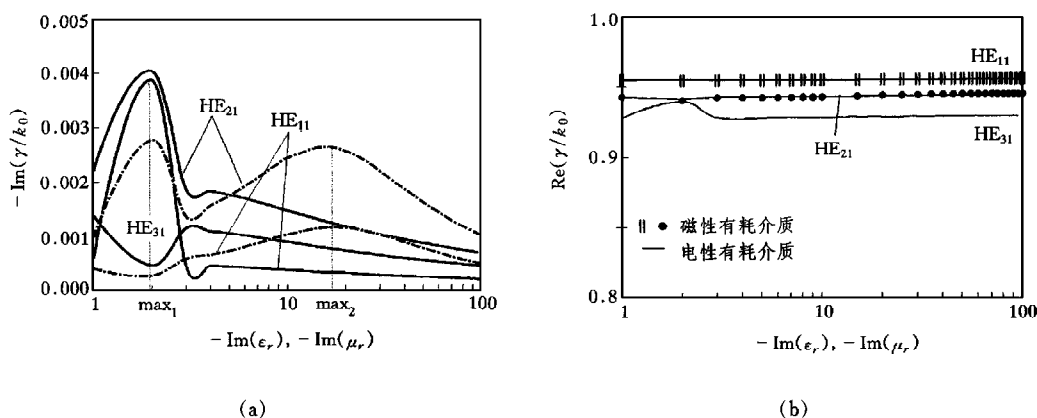


图 4 (a) 介质损耗与衰减常数的关系, (b) 介质损耗与相位常数的关系. $a/\lambda = 3$, $\omega_p/\omega = 0.33$, $\omega_c/\omega = 0.5$. 电性介质: $\mu_r = 1$, $\text{Re}(\epsilon_r) = 5.66$; 磁性介质: $\epsilon_r = 1$, $\text{Re}(\mu_r) = 5.66$

4 结 语

本文讨论了电性有耗介质和磁性有耗介质中等离子体波导的传播特性. 在外磁场为有限情况下, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 波动方程相互耦合, 等离子体波导的衰减常数与等离子体参数的关

系更为密切,使得我们通过改变偏置磁场来动态控制这种波导的传播特性成为可能. 本文为进一步研究有限厚有耗介质层覆盖的等离子体圆柱波导的传播特性提供了有益的理论背景.

- [1] H. M. Shen, *J. Appl. Phys.*, **69**(1991), 6827.
- [2] H. M. Shen *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **70**(1991), 6653.
- [3] 胡斌杰、阮成礼, 中国科学, **E27**(1997), 1.
- [4] B. J. Hu, C. L. Ruan, *Int. J. Inf. mm Wave*, **18**(1997), 1015.
- [5] S. G. Liu, J. K. Lee, D. J. Zhu, *Science in China*, **E39**(1997), 485.
- [6] J. Margot, M. Moism, *J. Phys. D*, **24**(1995), 1765.
- [7] A. W. Trivelpiece, R. W. Gould, *J. Appl. Phys.*, **30**(1959), 1784.
- [8] V. Bevc, T. E. Everhart, *J. Electron. Control*, **13**(1962), 185.
- [9] S. T. Ivanov, E. G. Alexov, *J. Plasma Phys.*, **43**(1990), 51.
- [10] S. T. Ivanov, E. G. Alexov, P. N. Malinov, *Plasma Phys. and Control. Fusion*, **31**(1989), 941.
- [11] H. S. Uhm, K. T. Nguyen, R. F. Schneider *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **64**(1988), 1108.
- [12] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*(John Wiley and Sons, New York, 1986), p. 87.

PROPAGATION PROPERTIES OF A PLASMA WAVEGUIDE IN A FINITE MAGNETIC FIELD

HU BIN-JIE RUAN CHENG-LI LIN WEI-GAN

(*Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054*)

(Received 23 June 1997)

ABSTRACT

The propagation properties of a plasma waveguide in a lossy material under a finite magnetic field are analyzed, particularly for the variations of their propagation constants with plasma parameters, surrounding material and external magnetic field. The analysis show that the propagation properties of such a magnetized plasma-filled waveguide are easy to be controlled compared with those of plasma waveguide to which no external magnetic field or an infinite external magnetic field is applied.

PACC: 5240F; 4110H; 5240D