

具有弱界面的柱状复合结构中 轴对称声导波^{*}

杜光升 王耀俊 袁忆丰 赵庆昌[†]

(南京大学声学研究所, 近代声学国家重点实验室, 南京 210093)

(1997 年 5 月 4 日收到; 1997 年 5 月 26 日收到修改稿)

利用柱状分层结构中轴对称声导波的波动方程和界面“弹簧”模型, 导出了具有弱界面的双层柱状复合结构中轴对称声导波的广义色散方程, 计算了刚性联接和滑移联接界面时双层复合管(腔壁为自由界面或腔内充水)和双层复合棒中轴对称声导波的色散特性, 分析了弱界面的轴向劲度系数对低阶轴对称声导波的影响。

PACC: 4320; 6265

1 引 言

目前, 柱状复合结构(如复合管、复合棒等)在管道输运和通讯工程中得到广泛的应用, 用声导波的方法检测这类复合结构的质量因此受到高度重视, 而声学检测中核心问题之一是声导波模式特性及它们与复合结构之间的关系^[1-6]. 研究表明, 低频段轴对称声导波模式较简单, 与结构各组分媒质的弹性常数和线度密切相关. 但以前的研究没有考虑各组分媒质之间界面对声导波的影响. 我们曾讨论过平面状复合结构中声导波相速度与界面的关系, 发现界面的改变明显地影响声导波模式特性^[7-9].

利用我们建立的柱状固体媒质间弱界面的物理模型^[10,11], 从以下方面讨论具有弱界面的双层柱状复合结构中轴对称声导波的传播特性: (1) 利用界面“弹簧”模型导出了具有弱界面的双层柱状复合结构中轴对称声导波的特征方程; (2) 数值计算了具有刚性界面和滑移界面的双层复合棒、双层复合管(腔壁为自由界面或腔内充水)中轴对称声导波的频散曲线; (3) 讨论界面的轴向劲度系数(K_t)对柱状复合结构中低阶轴对称声导波模式相速度的影响。

2 理 论

2.1 固体间的弱界面

层状结构或复合材料中, 不同组分固体间必然存在界面. 理想完好的界面称为刚性联

^{*} 国家自然科学基金和江苏省自然科学基金资助的课题.

[†] 通讯地址: 山东省利津县第二中学, 利津 257447.

接界面,这里两种组分固体中的弹性波所对应的应力和位移分别连续.另一种常出现的界面是滑移界面,它具有这样的特性^[12]:能承受垂直于界面法向(或径向)应力,而界面上的切向(或轴向)应力恒为零.从物理上讲,处于滑移界面两边固体媒质的法向(或径向)应力和位移连续,而切向(或轴向)应力为零,切向(或轴向)位移不连续.而实际上,两种组分固体媒质间总存在着很薄的界面层,其力学参数与两边固体媒质力学参数不同.在复合结构或复合材料使用过程中,界面处会出现微裂纹,力学强度降低,形成弱界面层.弹簧模型可以描述平面状弱界面的物理特性,并由此可得到界面处力学量的边界条件^[13,14].最近我们建立了柱状固体媒质间弱界面的物理模型,并求得界面处力学广义边界条件^[10,11].按照此物理模型,柱状复合结构界面处的力学边界条件可表示为

$$\begin{aligned} \tau_{r2} &= \tau_{r3}, \quad \tau_{z2} = \tau_{z3}, \\ K_n(u_{r2} - u_{r3}) &= \tau_{r2}, \quad K_t(u_{z2} - u_{z3}) = \tau_{z2}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中径向劲度系数 K_n 和轴向劲度系数 K_t 与界面层媒质的厚度 h 、等效体弹性模量 K_0 和切变模量 G_0 的关系为

$$K_n = \left(K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) / h, \quad K_t = G_0 / h. \quad (2)$$

(1)式 τ_{ri} 和 τ_{zi} ($i=2,3$) 分别为界面处两种组分固体中径向和轴向应力分量, u_{ri} 和 u_{zi} ($i=2,3$) 分别为质点振动径向和轴向位移分量.

由(1)式容易得出刚性界面和滑移界面的边界条件.例如,令 $K_n \rightarrow \infty$, $K_t \rightarrow \infty$, 因固体界面处应力为有限值,有 $u_{r2} = u_{r3}$ 及 $u_{z2} = u_{z3}$, 这就是刚性界面边界条件.而在滑移界面条件下,法向应力和法向位移均连续,轴向应力则变为零.只要令 $K_n \rightarrow \infty$, $K_t \rightarrow 0$, 便可得出滑移界面边界条件: $u_{r2} = u_{r3}$, $\tau_{z2} = \tau_{z3} = 0$. 因此轴向劲度系数 K_t 为描述弱界面的重要参数,它是界面对切向(轴向)应力承受程度的一种量度,与界面层媒质的等效切变弹性模量密切相关.

2.2 具有弱界面的双层柱状复合管中轴对称声导波模式

图1为由两层均匀各向同性固体媒质2,3组成的一柱状复合管,设管腔内部充以流

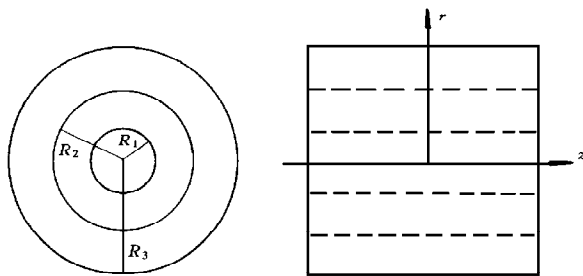


图1 双层柱状复合管示意图及计算时所取的柱坐标系

体,忽略复合管外部环境的影响,并设外界面为自由界面,各层媒质半径分别为 R_1 , R_2 和

R₃. 用 K_1, ρ_1 表示流体的体弹性模量和密度, λ_i, μ_i, ρ_i ($i=2, 3$) 分别表示固体媒质 2, 3 的 Lamé 常数和密度. 建立柱坐标系如图 1 所示, 假设声波沿 z 轴传播. 用 ϕ_1 表示流体 1 中的标量势, ϕ_i, ψ_i ($i=2, 3$) 分别表示固体媒质 2, 3 中的标量势和矢量势. 对于轴对称声导波模式, 只需考虑矢量势函数的 θ 分量(以 ψ_i 表示). 流体和固体中的势函数都应满足波动方程:

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{v_{p1}^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{1}{v_{pi}^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi_i = \frac{1}{v_{si}^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} \quad (i=2, 3), \quad (4)$$

其中 $v_{pi} = \sqrt{(\lambda_i + 2\mu_i)/\rho_i}$, $v_{si} = \sqrt{\mu_i/\rho_i}$ ($i=2, 3$) 分别为固体媒质 2, 3 中纵波和横波波速, $v_{p1} = \sqrt{K_1/\rho_1}$ 为流体中声波波速, ∇^2 为 Laplace 算符. 注意到轴对称导波模式的势函数与变量 θ 无关, 方程(3)和(4)的通解可写为

$$\phi_1 = B_1 Z_0(\bar{\alpha}_1 r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \phi_i &= [A_i W_0(\bar{\alpha}_{pi} r) + B_i Z_0(\bar{\alpha}_{pi} r)] e^{i(kz - \omega t)}, \\ \psi_i &= [C_i W_1(\bar{\alpha}_{si} r) + D_i Z_1(\bar{\alpha}_{si} r)] e^{i(kz - \omega t)}, \end{aligned} \quad (i=2, 3), \quad (6)$$

其中 $\bar{\alpha}_{pi} = \sqrt{|k^2 - \omega^2/v_{pi}^2|}$, $\bar{\alpha}_{si} = \sqrt{|k^2 - \omega^2/v_{si}^2|}$, $k = \omega/c_z$, c_z 为沿 z 方向传播的声导波的相速度, ω 为声波的角频率, B_1, A_i, B_i, C_i, D_i ($i=2, 3$) 为待定常数, 而 W_n, Z_n ($n=0, 1$) 由下式给出:

$$\begin{aligned} W_n(\bar{\alpha}_{ji} r) &= \begin{cases} K_n(\bar{\alpha}_{ji} r), & c_z < v_{ji}, \\ Y_n(\bar{\alpha}_{ji} r), & c_z > v_{ji}, \end{cases} \\ Z_n(\bar{\alpha}_{ji} r) &= \begin{cases} I_n(\bar{\alpha}_{ji} r), & c_z < v_{ji}, \\ J_n(\bar{\alpha}_{ji} r), & c_z > v_{ji}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 J_n, Y_n 分别为第一类、第二类 n 阶贝塞尔函数, I_n, K_n 分别为第一类、第二类 n 阶变型贝塞尔函数 ($j=p, i=1, 2, 3; j=s, i=2, 3$). 由势函数可得固体和流体媒质中的位移和应力(压强):

$$u_{r1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r}, \quad p_1 = \rho \omega^2 \phi_1, \quad (8)$$

$$u_{ri} = \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{\partial \psi_i}{\partial z},$$

$$u_{zi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi_i)}{\partial r},$$

$$\tau_{ri} = (\lambda_i + 2\mu_i) \nabla^2 \phi_i - 2\mu_i \left(\frac{u_{ri}}{r} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \right), \quad (9)$$

$$\tau_{zi} = \mu_i \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial r} + \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right), \quad (i=2, 3).$$

将(5)和(6)式代入(8)和(9)式,可写出各层固体和流体媒质中位移和应力分量(或压强)的表达式(为了节省篇幅,这里略去其具体公式).本问题的边界条件为: $r=R_1$ 处法向位移和法向应力(流体中为压强负值)分别连续,轴向应力为零; $r=R_3$ 处法向应力和轴向应力均为零;在 $r=R_2$ (两固体媒质界面)处,可利用界面“弹簧”模型描述,见方程(1).利用这些边界条件,可得以 B_i, A_i, B_i, C_i 和 D_i 为未知数的齐次线性方程组,其矩阵形式为

$$[b_{ij}][A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, B_1]^T = 0, \quad (10)$$

其中各矩阵元 b_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 9$)的具体表达式列于附录中.要使此线性方程组有非零解,其系数行列式必须为零,即

$$|b_{ij}|_{9 \times 9} = 0. \quad (11)$$

(11)式即为具有弱界面的双层复合管(内腔充以流体)中轴对称声导波的广义色散方程.用数值方法解该方程,便可得具有弱界面的双层复合管中轴对称声导波的相速度与频率之间的关系(即色散曲线).

较为简单的柱状复合结构中轴对称声导波模式的色散方程可从(11)式简化而得.例如:令腔内流体的密度趋近于零,(11)式便变为具有弱界面的双层复合管(内腔壁为自由界面)中轴对称声导波的色散方程;令 $R_1 \rightarrow 0$,可得具有弱界面的双层复合棒中轴对称声导波的色散方程;令 $K_n \rightarrow \infty$ 和 $K_t \rightarrow \infty$,可得刚性界面时的色散方程;当 $K_n \rightarrow \infty$ 和 $K_t \rightarrow 0$,可得滑移界面时的色散方程.很显然,当 $R_1 \rightarrow R_2$ 时,(11)式变为单层管中的轴对称声导波的色散方程;当 $R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow R_1$ 时,(11)式变为均匀棒中的轴对称声导波的色散方程.

3 数值计算结果

为了具体考察界面特性对双层复合管中轴对称声导波的影响,首先数值计算了界面为两个极端情况(即刚性联接和滑移联接)时双层复合管(腔壁为自由界面或腔内充水)中轴对称声导波的色散曲线.计算结果如图2所示.数值计算时,所取的固体和流体的弹性参数见表1,复合结构径向线度为: $R_1=7 \text{ cm}, R_2=8 \text{ cm}, R_3=8.5 \text{ cm}$.

表1 固体和流体弹性参数表

	纵波波速/ $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$	横波波速/ $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$	密度/ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
固体3	5.90	3.29	7800
固体2	3.46	2.00	2000
流体	1.50	—	1000

由图2可看出:(1)腔内充水时,双层复合管中存在相速度低于水中声速的轴对称声导波模式(称为低阶 S_0 模式),在低频段其相速度与界面特性无关,而腔壁为自由界面时不存在该导波模式,表明 S_0 轴对称声导波模式与腔内流体的性质密切相关;(2)当腔壁为自由界面时,双层复合管中轴对称声导波模式比较简单($f < 50 \text{ kHz}$ 时仅存在一种高阶

模式),而腔内充水时,在相同的频率范围内,存在较多的高阶轴对称声导波模式,并且高阶轴对称声导波模式都存在截止频率;(3)固体间界面由刚性联接变为滑移联接时,低阶声导波模式 S_1 分裂为两种导波模式,分别记为 S_{11} , S_{12} ,其中 S_{11} 和 S_{12} 模式的相速度分别小于和大于固体间刚性联接界面时 S_1 模式的相速度,随着频率的升高, S_{11} 模式的相速度趋向于固体间刚性联接界面时 S_1 模式的相速度,而 S_{12} 模式的相速度趋向于固体间刚性联接界面时 S_2 模式的相速度;(4)复合管中高阶声导波模式的截止频率与界面特性无关(腔内充水和腔壁为自由界面均是这样)。

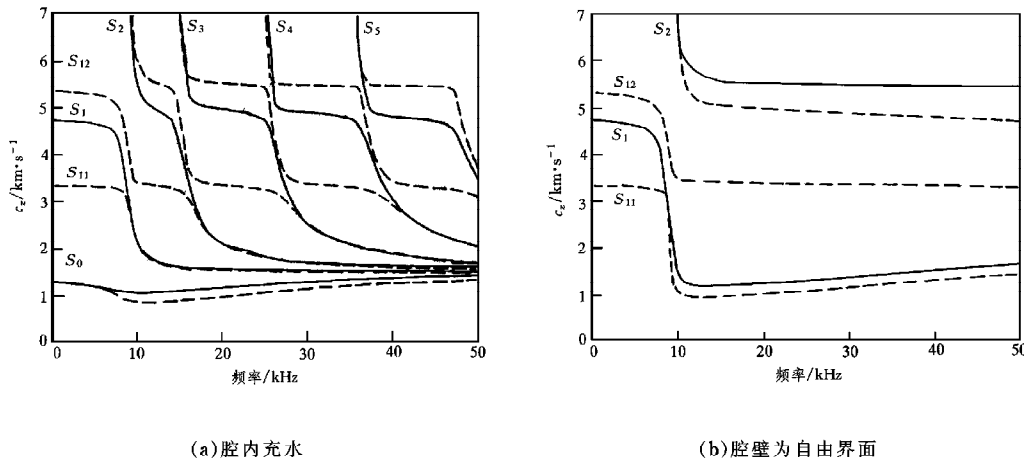


图2 双层复合管中轴对称声导波的色散曲线 实线为两固体间刚性联接,虚线为滑移联接

如前所述,轴向劲度系数 K_t 是界面对轴向应力承受能力的量度,因而是描述弱界面的一个重要参数.为此我们数值计算了双层复合管腔壁为自由界面时 S_{11} 和 S_{12} 声导波模式的相速度与固体间界面轴向劲度系数 K_t 之间的关系.计算结果如图3所示.计算时取 $K_n \rightarrow \infty$, 频率 $f=5$ kHz.图3表明,当 K_t 的值处在某一特定范围(10^8 — 10^{11} Pa), S_{11} , S_{12} 轴对称声导波模式的相速度对 K_t 的变化非常敏感,而在该范围 K_t 的变化恰好反映界面从滑移联接状态向刚性联接状态的转化^[13].计算时还发现,当腔内充水时, S_{11} , S_{12} 轴对称声导波模式的相速度与 K_t 之间也有类似的关系。

令(11)式中 $R_1 \rightarrow 0$,通过数值计算可以了解复合棒中两种固体间不同界面特性对轴对称声导波的影响.图4示出固体间界面为刚性联接和滑移联接时复合棒中轴对称声导波的色散曲线.计算时仍取表1中固体2和固体3的参数,复合棒径向线度为: $R_1=1$ cm, $R_2=1.3$ cm.图4表明,在复合棒中不存在 S_0 轴对称导波模式,其余各阶声导波模式的传播规律与复合管中声导波模式的传播规律相似。

综合图2至图4可以知道,小于第一高阶模式(S_2)截止频率时,对充以流体的复合管,存在两种低阶模式,对复合棒或腔壁为自由界面的复合管,仅存在一种低阶模式,它们的相速度与界面特性密切相关.这说明低频轴对称声导波模式非常有利于柱状复合结构中界面特性的声学检测。

在管道输运工程中,随着使用时间的增长,管道内部经常结垢,其厚度不断变大,最后

有可能导致管道阻塞. 为了了解结垢层厚度对声导波速度的影响, 我们数值计算了双层复合管(内壁为自由界面)中低阶轴对称声导波模式相速度(取声波的频率为 5 kHz)和 S_2 声导波模式的截止频率与管的内径 R_1 之间的关系. 计算时设外壳层的内外半径不变($R_2 = 8\text{ cm}$, $R_3 = 8.5\text{ cm}$). 计算结果如图 5 和图 6 所示. 计算时仍取表 1 中固体 2 和固体 3 的参数. 由图 5 可看出, 当两种固体间界面为刚性联接时, 复合管中 S_1 轴对称声导波模式

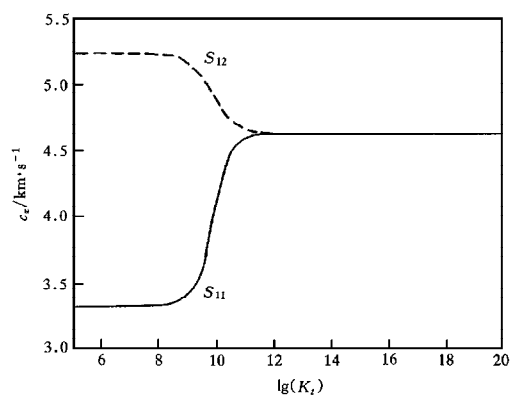


图 3 腔壁为自由界面时双层复合管中低阶声导波的相速度与 K_1 关系

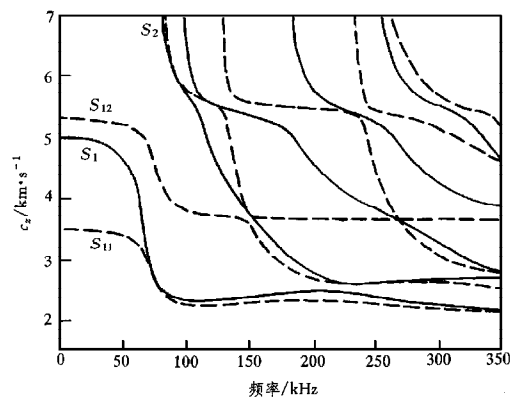


图 4 双层复合棒中轴对称声导波的色散曲线 曲线说明同图 2

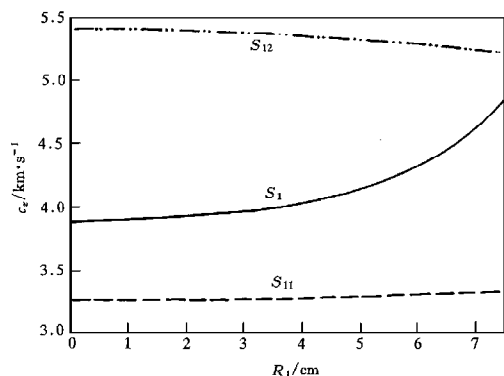


图 5 腔壁为自由界面时双层复合管中低阶声导波模式的相速度与内腔半径 R_1 之间的关系 实线为两固体间刚性联接时 S_1 模式, 虚线和点划线分别为滑移联接时 S_{11} , S_{12} 模式

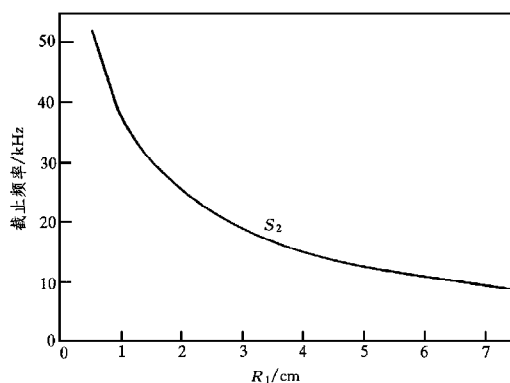


图 6 腔壁为自由界面时双层复合管(界面为刚性联接)中 S_2 声导波模式的截止频率与内腔半径 R_1 之间的关系

相速度随内腔半径 R_1 的增大而增加, 表明复合管管壁越薄, 其中 S_1 轴对称声导波模式相速度越大; 当两固体间界面为滑移联接时, 内径的变化对复合管中 S_{11} , S_{12} 轴对称声导波模式的传播特性的影响很小. 图 6 指出: 复合管的内径越大, 声导波模式 S_2 的截止频率越小. 因此, 为了避免高阶模式的干扰, 用声导波的方法检测时应选取中心频率较低的

换能器.

4 结 语

本文的研究表明,利用分层柱状复合结构中轴对称声导波的波动方程和界面的“弹簧”模型,可以求得具有弱界面的双层柱状复合结构中轴对称声导波的色散特性.界面为刚性联接和滑移联接时,双层柱状复合结构(复合管或复合棒)中轴对称声导波的色散特性有明显的差异.当固体间界面由刚性联接变为滑移联接时,低阶轴对称声导波模式(S_1 模式)发生分裂,它们的相速度不同于界面为刚性联接时低阶轴对称声导波模式(S_1)的相速度.当界面轴向劲度系数 K_t 的值处在某一特定范围内时,低阶声导波模式的相速度对 K_t 的变化非常敏感.因此,有可能通过测量低阶轴对称声导波模式的相速度,了解双层柱状复合结构中界面特征,反演其中界面轴向劲度系数 K_t ,从而实现界面的声学无损评价.

附 录

矩阵[b]中各矩阵元的表达式:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= -S_{p1} \bar{\alpha}_{p1} R_1 Z_1(\bar{\alpha}_{p1} R_1), & b_{12} &= -\bar{\alpha}_{p2} R_1 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_1), & b_{13} &= S_{p2} \bar{\alpha}_{p2} R_1 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_1), \\
 b_{14} &= -kR_1 W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_1), & b_{15} &= -kR_1 Z_1(\bar{\alpha}_{d2} R_1), & b_{22} &= 2kR_1 \bar{\alpha}_{p2} R_1 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_1), \\
 b_{23} &= -2S_{p2} kR_1 \bar{\alpha}_{p2} R_1 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_1), & b_{24} &= G_2 W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_1), & b_{25} &= G_2 Z_1(\bar{\alpha}_{d2} R_1), \\
 b_{31} &= -\rho_1/\rho_2 (\omega R_1/v_2)^2 Z_0(\bar{\alpha}_{p1} R_1), & b_{32} &= G_2 W_0(\bar{\alpha}_{p2} R_1) + 2\bar{\alpha}_{p2} R_1 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_1), \\
 b_{33} &= G_2 Z_0(\bar{\alpha}_{p2} R_1) - 2S_{p2} \bar{\alpha}_{p2} R_1 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_1), \\
 b_{34} &= 2S_{d2} kR_1 \bar{\alpha}_{d2} R_1 [W_0(\bar{\alpha}_{d2} R_1) + S_{d2} W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_1)/\bar{\alpha}_{d2} R_1], \\
 b_{35} &= -2kR_1 \bar{\alpha}_{d2} R_1 [Z_0(\bar{\alpha}_{d2} R_1) - Z_1(\bar{\alpha}_{d2} R_1)/\bar{\alpha}_{d2} R_1], & b_{46} &= 2kR_3 \bar{\alpha}_{p3} R_3 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_3), \\
 b_{47} &= -2S_{p3} kR_3 \bar{\alpha}_{p3} R_3 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_3), & b_{48} &= G_3 W_1(\bar{\alpha}_{d3} R_3), & b_{49} &= G_3 Z_1(\bar{\alpha}_{d3} R_3), \\
 b_{56} &= G_3 W_0(\bar{\alpha}_{p3} R_3) + 2\bar{\alpha}_{p3} R_3 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_3), & b_{57} &= G_3 Z_0(\bar{\alpha}_{p3} R_3) - 2S_{p3} \bar{\alpha}_{p3} R_3 Z_1(\bar{\alpha}_{p3} R_3), \\
 b_{58} &= 2S_{d3} kR_3 \bar{\alpha}_{d3} R_3 [W_0(\bar{\alpha}_{d3} R_3) + S_{d3} W_1(\bar{\alpha}_{d3} R_3)/\bar{\alpha}_{d3} R_3], \\
 b_{59} &= -2kR_3 \bar{\alpha}_{d3} R_3 [Z_0(\bar{\alpha}_{d3} R_3) - Z_1(\bar{\alpha}_{d3} R_3)/\bar{\alpha}_{d3} R_3], \\
 b_{62} &= \mu_2/(K_n R_2) [G_2 W_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2) + 2\bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2)] + (\bar{\alpha}_{p2} R_2) W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2), \\
 b_{63} &= \mu_2/(K_n R_2) [G_2 Z_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2) - 2S_{p2} \bar{\alpha}_{p2} R_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2)] - S_{p2} \bar{\alpha}_{p2} R_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2), \\
 b_{64} &= 2S_{d2} \mu_2/(K_n R_2) (kR_2) \bar{\alpha}_{d2} R_2 [W_0(\bar{\alpha}_{d2} R_2) + S_{d2} W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2)/\bar{\alpha}_{d2} R_2] + kR_2 W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2), \\
 b_{65} &= -2\mu_2/(K_n R_2) (kR_2) \bar{\alpha}_{d2} R_2 [Z_0(\bar{\alpha}_{d2} R_2) - Z_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2)/\bar{\alpha}_{d2} R_2] + kR_2 W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2), \\
 b_{66} &= -\bar{\alpha}_{p3} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2), & b_{67} &= S_{p3} \bar{\alpha}_{p3} R_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2), & b_{68} &= -kR_2 W_1(\bar{\alpha}_{d3} R_2), \\
 b_{69} &= -kR_2 Z_1(\bar{\alpha}_{d3} R_2), & b_{72} &= 2\mu_2/(K_t R_2) kR_2 \bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2) + kR_2 W_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2), \\
 b_{73} &= -2S_{p2} \mu_2/(K_t R_2) kR_2 \bar{\alpha}_{p2} R_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2) + kR_2 Z_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2), \\
 b_{74} &= \mu_2/(K_t R_2) G_2 W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2) + S_{d2} \bar{\alpha}_{d2} R_2 W_0(\bar{\alpha}_{d2} R_2), & b_{76} &= -kR_2 W_0(\bar{\alpha}_{p3} R_2), \\
 b_{75} &= \mu_2/(K_t R_2) G_2 Z_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2) - \bar{\alpha}_{d2} R_2 Z_0(\bar{\alpha}_{d2} R_2), & b_{77} &= -kR_2 Z_0(\bar{\alpha}_{p3} R_2), \\
 b_{78} &= -S_{d3} \bar{\alpha}_{d3} R_2 W_0(\bar{\alpha}_{d3} R_2), & b_{79} &= \bar{\alpha}_{d3} R_2 Z_0(\bar{\alpha}_{d3} R_2), \\
 b_{82} &= \mu_2/\mu_3 [G_2 W_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2) + 2\bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2)], \\
 b_{83} &= \mu_2/\mu_3 [G_2 Z_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2) - 2S_{p2} \bar{\alpha}_{p2} R_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2)], \\
 b_{84} &= 2\mu_2/\mu_3 (kR_2) \bar{\alpha}_{d2} R_2 S_{d2} [W_0(\bar{\alpha}_{d2} R_2) + S_{d2} W_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2)/\bar{\alpha}_{d2} R_2], \\
 b_{85} &= -2S_{d2} \mu_2/\mu_3 (kR_2) \bar{\alpha}_{d2} R_2 [Z_0(\bar{\alpha}_{d2} R_2) - Z_1(\bar{\alpha}_{d2} R_2)/\bar{\alpha}_{d2} R_2],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{86} &= -[G_3 W_0(\bar{\alpha}_{p2} R_2) + 2\bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2)], & b_{87} &= -[G_3 Z_0(\bar{\alpha}_{p3} R_2) - 2S_{p3}\bar{\alpha}_{p3} R_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2)], \\
b_{88} &= -2S_{p3}(kR_2)\bar{\alpha}_{p3} R_2[W_0(\bar{\alpha}_{p3} R_2) + S_{p3}W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2)/\bar{\alpha}_{p3} R_2], \\
b_{89} &= 2S_{p3}(kR_2)\bar{\alpha}_{p3} R_2[Z_0(\bar{\alpha}_{p3} R_2) - Z_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2)/\bar{\alpha}_{p3} R_2], & b_{92} &= 2\mu_2/\mu_3 kR_2\bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2), \\
b_{93} &= -2S_{p2}\mu_2/\mu_3 kR_2\bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2), & b_{94} &= \mu_2/\mu_3 G_2 W_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2), \\
b_{95} &= \mu_2/\mu_3 G_2 Z_1(\bar{\alpha}_{p2} R_2), & b_{96} &= -2kR_2\bar{\alpha}_{p2} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2), & b_{97} &= 2S_{p3}kR_2\bar{\alpha}_{p3} R_2 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2), \\
b_{98} &= -G_3 W_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2), & b_{99} &= -G_3 Z_1(\bar{\alpha}_{p3} R_2), & b_{i6} &= b_{i7} = b_{i8} = b_{i9} = 0 \quad (i=1, 2, 3), \\
b_{i1} &= 0 \quad (i=1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9), & b_{i1} &= b_{i2} = b_{i3} = b_{i4} = b_{i5} = 0 \quad (i=4, 5), \\
G_2 &= 2(kR_2)^2 - (\omega R_2/v_d)^2, & G_3 &= 2(kR_2)^2 - (\omega R_2/v_s)^2, \\
S_{pi} &= \begin{cases} 1 & c_z < v_{pi} \\ -1 & c_z > v_{pi} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3), & S_{si} &= \begin{cases} 1 & c_z < v_{si} \\ -1 & c_z > v_{si} \end{cases} \quad (i=2, 3).
\end{aligned}$$

- [1] J.J. Dittli, J.L. Rose, *J. Appl. Phys.*, **72**(1992), 2589.
- [2] L.Dwynn Lafleur *et al.*, *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**(1995), 1435.
- [3] J.A. Simmons *et al.*, *J. Acoust. Soc. Am.*, **92**(1992), 1061.
- [4] A.E. Armenakas, *AIAA Journal*, **9**(1971), 740.
- [5] P.C. Xu, S.K. Datta, *J. Acoust. Soc. Am.*, **89**(1991), 2573.
- [6] R.A. Thurston, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**(1978), 1.
- [7] Wang Yao-jun, Ning Wei *et al.*, *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, **3**(1994), 561.
- [8] Ning Wei, Wang Yao-jun, *Acta Physica Sinica(Overseas Edition)*, **4**(1995), 428.
- [9] 王耀俊、宁 伟、朱为勇, *物理学进展*, **16**(1996), 363.
- [10] Hu Shuitian, Wang Yaojun, Zhu Weiyong, *J. Nanjing University, Acoustics Issue*, **31**(1995), 78.
- [11] 朱为勇、王耀俊, *声学学报*, 待发表.
- [12] M. Schoenberg, *J. Acoust. Soc. Am.*, **68**(1980), 1516.
- [13] Y.J. Wang, S.I. Rokhlin, *J. Acoust. Soc. Am., Suppl. 1*, **86**(1989), 593.
- [14] S.I. Rokhlin, Y.J. Wang, *J. Acoust. Soc. Am.*, **89**(1991), 503.

AXISYMMETRIC GUIDED WAVES IN CYLINDRICAL COMPOSITE STRUCTURES WITH WEAK INTERFACES

DU GUANG-SHENG WANG YAO-JUN YUAN YI-FENG ZHAO QING-CHANG

(Institute of Acoustics and State Key Laboratory of Modern Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093)

(Received 4 May 1997; revised manuscript received 26 May 1997)

ABSTRACT

Using the "spring" model for a weak interface and the wave equations in cylindrical composite structures, we derive the generalized frequency equation for axisymmetric guided waves in a two-layered cylindrical composite structure with a weak interface. Numerical computations are made for dispersion characteristics of the axisymmetric guided waves in two-layered composite tubes (with or without water in hollow) and clad rods with rigid or slip interfaces. The influence of the shear stiffness of the weak interface on the lower order guided wave modes is studied.

PACC: 4320; 6265