

非线性孤子方程的齐次平衡法^{*}

范恩贵 张鸿庆

(大连理工大学数学科学研究所, 大连 116024)

(1997 年 6 月 9 日收到)

齐次平衡法是求非线性孤子方程孤波解的一种十分有效的方法. 对齐次平衡法的一些关键步骤进行推广使用, 获得了非线性孤子方程一批新的具有更为丰富形式的精确解, 孤波解仅是其中的一种特殊情形, 使得结果更加完美.

PACC: 0340K; 0290

1 引 言

非线性科学是现代科学的核心, 在自然科学中许多现象, 如孤波、混沌、吸引子、分形和逆序结构等都是非线性问题. 非线性可以产生一些本质上全新的现象, 而这些现象不可能由线性化模型出发的微扰理论得到, 用非线性化模型来研究客观世界是科学发展的必然. 而许多非线性现象的描述都涉及到孤子方程, 在孤立子理论中, 孤子方程的求解方法是研究的重要课题, 到目前已出现了许多方法, 如反散射法、Bäcklund 变换法、Hirota 方法和 Darboux 变换法等^[1-4], 随着各种求解方法的出现, 不但过去一些难以求解的方程得到了解决, 而且不断发现许多孤子方程有重要物理意义的新解. 最近文献[5—7]提出了齐次平衡法, 成功地求解了一大批孤子方程, 主要步骤如下:

第一步, 对给定的非线性方程, 例如两个自变量 x, t

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (1)$$

通过要求(1)式中最高阶导数项与最高次非线性项平衡, 可以选择 u 为如下函数

$$1, \partial_t^i \partial_x^j f(w) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

合适的线性组合, 记作

$$u = F(f(w)), \quad (2)$$

其中 $f(w), w(x, t)$ 为待定函数, 某些系数可能为待定常数.

第二步, 将(2)式代入(1)式经求导整理后, 将 w 的相同导数及最高次幂项放在一起并令其系数为零, 可得到关于 $f(w)$ 的常微分方程, 解之得

$$f = G(w). \quad (3)$$

第三步, 由(3)式出发可将第二步所得方程的表达式中 f 的各阶导数的非线性项换成 f 的高阶导数线性项, 然后把 f 对 w 相同导数项放在一起, 并令各系数为零, 得到关于

^{*} 国家自然科学基金和国家攀登计划资助的课题.

w 的一组齐次微分方程组

$$H(w) = 0. \quad (4)$$

第四步, 设(4)式具有如下形式的解,

$$w = 1 + e^{rx + \omega t}, \quad (5)$$

其中 r, ω 为待定常数. 将(5)式代入(4)式, 可得关于 r, ω 及(2)式中的待定系数为未知量的代数方程组, 并可对它们求解.

第五步, 将(3), (5)式及必要的待定常数代入(2)式, 即得方程(1)的准确孤波解.

我们分析发现, 采用上述方法所得精确解仅是孤波型解, 难以得到其他类型的精确解. 主要原因是在第四步中形如(5)式的假设限制了 $w(x, t)$ 的一般性, 因而求解过程疏漏了其他形式的精确解. 如不假设 $w(x, t)$ 具有(5)式的形式, 而采用直接求解齐次方程组(4)的方法, 首先根据相容性条件消去 w 关于 t 的导数项, 从而得到的方程可看作 w 关于 x 的常微分方程, 即可将 w 解出来. 注意求解过程中积分常数应看作 t 的函数, 最后再将 w 代入(4)式, 确定这些积分函数, 这样得到的 $w(x, t)$ 更具有一般性, 从而可获得一大批新的具有更为丰富形式的精确解. 孤波解仅是其中的特殊情形, 这对于发现其他形式精确解很有用. 下面仅具体求解著名的 KdV 方程和一类反应扩散方程, 推广到其他方程是很直接的. 本文所考虑的反应扩散方程也具有重要物理背景, 囊括了许多著名的方程, 如 Chaffee-Infante 方程、广义 Fisher 方程、Fitzhugh-Nagumo 方程、Kolmogoroff-Petrovsky-Piscounov 方程、Huxley 方程等^[8-13]. 采用此法找到了 KdV 方程的六种精确解: 精确平衡解、孤波解、有理解、多项式与指数函数混合解、多项式与三角函数混合解, 这说明 KdV 方程解的形式非常丰富; 同时对反应扩散方程也得到了多种精确解.

2 方法及应用举例

例 1 考虑 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (6)$$

对于一般形式的 KdV 方程

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0,$$

可作变换 $u \rightarrow \frac{\alpha}{6\beta}u, x \rightarrow x, t \rightarrow \beta t$, 化为(6)式, 因此(6)式不失一般性.

设(6)式具有如下形式的解,

$$u = f''w_x^2 + f'w_{xx}. \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式并整理, 可得

$$\begin{aligned} & u_t + 6uu_x + u_{xxx} \\ &= (6f''f''' + f^{(5)})w_x^5 + (18f''^2 + 6f'f''' + 10f^{(4)})w_x^3w_{xx} \\ &+ (f'''w_x^2w_t + 6f'f''w_x^2w_{xxx} + 18f'f''w_xw_{xx}^2 + 15f'''w_xw_{xx}^2 + 10f''w_x^2w_{xxx}) \\ &+ (2f''w_xw_{xt} + f''w_tw_{xx} + 6f''^2w_{xx}w_{xxx} + 10f''w_{xx}w_{xxx} + 5f''w_xw_{xxxx}) \\ &+ (w_{xxt} + w_{xxxx})f' = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$6f''f''' + f^{(5)} = 0, \quad (9)$$

解之得

$$f = 2 \ln w. \quad (10)$$

进而可得如下关系,

$$f'^2 = -\frac{1}{3}f^{(4)}, \quad f'f''' = -\frac{2}{3}f^{(4)}, \quad f'f'' = -f''', \quad f'^2 = -2f''. \quad (11)$$

利用(9)和(11)式,(8)式可简化为

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = (w_x^2 w_t + 4w_x^2 w_{xxx} - 3w_x w_{xx}^2) f'' + (2w_x w_{xt} + w_t w_{xx} - 2w_{xx} w_{xxx} + 5w_x w_{xxxx}) f'' + (w_{xt} + w_{xxxx}) f' = 0. \quad (12)$$

令 f'' , f' , f 的系数为零, 欲使这些条件成立, 只须 $w(x, t)$ 满足

$$w_{xt} + w_{xxxx} = 0, \quad (13)$$

$$w_x w_t + 4w_x w_{xxx} - 3w_{xx}^2 = 0. \quad (14)$$

由于齐次方程有指数形式的解, 依齐次平衡法, 可假设(13), (14)式具有如下形式的解,

$$w(x, t) = 1 + e^{rx + \omega t}.$$

但这样只能得到孤波解. 现在我们直接求解(13), (14)式, 由(14)式解出 w_t , 再对 x 微分一次, 利用(13)式及相容性条件 $w_{xt} = w_{tx}$, 得到如下四阶常微分方程,

$$w_{xxxx} - \left(\frac{w_{xx}^2}{w_x} \right)_x = 0,$$

对 x 积分一次, 得到

$$w_{xxx} - \frac{w_{xx}^2}{w_x} = a_1(t).$$

$a_1(t)$ 为关于 t 的积分函数.

作变换 $w_x = y$, 则上式变为

$$yy_{xx} - y_x^2 = a_1(t)y.$$

再作变换 $y_x = z$, 则上式进一步变为

$$yzz_y - z^2 = a_1(t)y.$$

继续作变换 $z^2 = \eta$, 则上式化为 Bernoulli 方程

$$\eta_y - \frac{2}{y}\eta = 2a_1(t).$$

因此, 根据 Bernoulli 公式及上述各变换关系得

$$\begin{aligned} w_{xx} = y_x = \sqrt{\eta} &= \left\{ e^{\int \frac{2}{y} dy} \left[a_2(t) + 2 \int a_1(t) e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy \right] \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{a_2(t)y^2 - 2a_1(t)y}. \end{aligned} \quad (15)$$

下面分五种情形讨论 KdV 方程的精确解.

情形 1 $a_1 = a_2 = 0$, 由(15)式可得

$$w = a_3(t)x + a_4(t),$$

代入(13), (14)式知

$$a_3(t) = c_1, \quad a_4(t) = c_2,$$

c_1, c_2 为任意常数, 故

$$w = c_1 x + c_2. \quad (16)$$

将(10), (16)式代入(7)式得到 KdV 方程的一种精确平衡解

$$u = \frac{-2c_1^2}{(c_1 x + c_2)^2}.$$

情形 2 $a_1=0, a_2>0$, 由(15)式可直接得到

$$w = \pm \frac{e^{a_3(t)}}{\sqrt{a_2(t)}} e^{\pm \sqrt{a_2(t)}x} + a_6(t) \equiv a_5(t)e^{a_4(t)x} + a_6(t), \quad (17)$$

由于 $\frac{e^{a_3(t)}}{\sqrt{a_2(t)}}$, $\sqrt{a_2(t)}$ 为正函数, 故 $a_5(t) = \pm \frac{e^{a_3(t)}}{\sqrt{a_2(t)}}$, $a_4(t) = \pm \sqrt{a_2(t)}$ 为待定的实函数.

将(17)式代入(13)式得

$$a_4(t)a_5(t)a_4'(t)xe^{a_4(t)x} + [a_4'(t)a_5(t) + a_5'(t)a_4(t) + a_4^4(t)a_5(t)]e^{a_4(t)x} = 0.$$

令 $xe^{a_4(t)x}, e^{a_4(t)x}$ 的系数为零, 可得

$$a_4(t)a_5(t)a_4'(t) = 0,$$

$$a_4'(t)a_5(t) + a_5'(t)a_4(t) + a_4^4(t)a_5(t) = 0.$$

解之得

$$a_4(t) = c_1, \quad a_5(t) = c_2 e^{-\frac{3}{c_1}t},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 因此

$$w = a_6(t) + c_2 e^{c_1 x - \frac{3}{c_1}t}. \quad (18)$$

再将(18)式代入(14)式, 可得 $a_6(t) = c_3$, c_3 为任意常数. 故最后有

$$w = c_3 + c_2 e^{c_1 x - \frac{3}{c_1}t}. \quad (19)$$

将(10), (19)式代入(7)式, 便得到 KdV 方程的孤波解

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c_1 c_2 e^{c_1 x - \frac{3}{c_1}t}}{c_3 + c_2 e^{c_1 x - \frac{3}{c_1}t}} \right) = \frac{c_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{c_1}{2} (x - c_1^2 t) + \ln c_2 - \ln c_3 \right].$$

特别取 $c_1=2c, c_2=c_3=1$, 即得著名的 KdV 方程的钟状孤波解^[12]

$$u = 2c^2 \operatorname{sech}^2 [c(x - 4c^2 t)].$$

情形 3 $a_1 \neq 0, a_2 = 0$, 由(15)式可解得

$$w = -\frac{1}{6} a_1(t) [x + a_3(t)]^3 + a_4(t). \quad (20)$$

将(20)式代入(13), (14)式, 类似情形 2 的做法, 可知

$$w = c_1(x + c_2)^3 + 12c_1 t, \quad (21)$$

其中 c_1, c_2 为常数.

从而由(7),(10)和(21)式得 KdV 方程的精确解

$$u = \frac{6(x + c_2)[24t - (x + c_2)^3]}{[12t + (x + c_2)^3]^2}.$$

情形 4 $a_1 \neq 0, a_2 > 0$, 由(15)式可解得

$$\begin{aligned} w &= \frac{|a_1(t)| |a_3(t)|}{2a_2(t)\sqrt{a_2(t)}} e^{\sqrt{a_2(t)}x} - \frac{|a_1(t)|}{2a_2(t)a_3(t)\sqrt{a_2(t)}} e^{-\sqrt{a_2(t)}x} + \frac{a_1(t)}{a_2(t)}x + a_8(t) \\ &\equiv a_5(t)e^{a_4(t)x} + a_6(t)e^{-a_4(t)x} + a_7(t)x + a_8(t). \end{aligned} \quad (22)$$

将(22)式代入(13),(14)式,类似情形 2 的做法,可知

$$w = c_2 e^{c_1 x - c_1^3 t} - c_3 e^{-c_1 x + c_1^3 t} + c_4(x - 3c_1^2 t), \quad (23)$$

其中 $4c_1^2 c_2 c_3 - c_4^2 = 0$.

从而将(10),(23)式代入(7)式,可得 KdV 方程的两组精确解

$$u = 4c_1^2 \frac{-4c_2 c_3 \pm c_2 \sqrt{c_2 c_3}(c_1 x - 3c_1^3 t - 2)e^{c_1 x - c_1^3 t} \mp c_3 \sqrt{c_2 c_3}(c_1 x - 3c_1^3 t + 2)e^{-c_1 x + c_1^3 t}}{[\pm \sqrt{c_2 c_3}(c_1 x - 3c_1^3 t) + c_2 e^{c_1 x - c_1^3 t} - c_3 e^{-c_1 x + c_1^3 t}]^2} \quad (c_2 c_3 > 0).$$

情形 5 $a_1 \neq 0, a_2 < 0$, 由(15)式可解得

$$w = \frac{a_1(t)}{a_2(t)} \left\{ x + \frac{1}{\sqrt{-a_2(t)}} \cos[\sqrt{-a_2(t)}(x + a_3(t))] \right\} + a_4(t). \quad (24)$$

将(24)式代入(13),(14)式,类似情形 2 的做法,可知

$$w = c_2[c_1 x + 3c_1^3 t + \cos(c_1 x + c_1^3 t)]. \quad (25)$$

从而将(10),(25)式代入(7)式,得 KdV 方程的精确解

$$u = -2c_1^2 \frac{(c_1 x + 3c_1^3 t)\cos(c_1 x + c_1^3 t) - 2\sin(c_1 x + c_1^3 t) + 2}{[c_1 x + 3c_1^3 t + \cos(c_1 x + c_1^3 t)]^2}.$$

例 2 考虑如下—类反应扩散方程

$$u_t - Du_{xx} + \lambda(u^3 + \alpha u^2 + \beta u) = 0. \quad (26)$$

假设方程(26)具有如下形式的解,

$$u = f'(w)w_x + b, \quad (27)$$

其中 $f(w), w(x, t)$ 为待定函数, b 为待定常数.

将(27)式代入方程(26),可得

$$\begin{aligned} &u_t - Du_{xx} + \lambda(u^3 + \alpha u^2 + \beta u) \\ &= (-Df''' + \lambda f'^3)w_x^3 + (f''w_x w_t - 3Df''w_x w_{xx} \\ &\quad + 3\lambda b f'^2 w_x^2 + \lambda \alpha f'^2 w_x^2) + (w_{xt} - Dw_{xxx} + 3\lambda b^2 w_x \\ &\quad + 2\lambda \alpha b w_x + \lambda \beta w_x) f' + \lambda b(b^2 + \alpha b + \beta) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

令(28)式中 w_x^3 的系数为零,即

$$-Df''' + \lambda f'^3 = 0.$$

解之可得一个特解

$$f = -\sqrt{\frac{2D}{\lambda}} \ln w. \quad (29)$$

进一步可得关系

$$f'^2 = \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} f''. \quad (30)$$

利用(30)式, 方程(28)可简化为

$$\begin{aligned} & u_t - Du_{xx} + \lambda(u^3 + \alpha u^2 + \beta u) \\ &= \left(w_x w_t - 3Dw_x w_{xx} + 3\lambda \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} b w_x^2 + \alpha \lambda \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} w_x^2 \right) f'' \\ &+ (w_{xt} - Dw_{xxx} + 3\lambda b^2 w_x + 2\lambda \alpha b w_x + \lambda \beta w_x) f' + \lambda b(b^2 + \alpha b + \beta) = 0. \end{aligned}$$

令 f'' , f' 和常数项为零, 得到

$$w_t - 3Dw_{xx} + \lambda \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} (3b + \alpha) w_x = 0, \quad (31)$$

$$w_{xt} - Dw_{xxx} + \lambda(3b^2 + 2\alpha b + \beta) w_x = 0, \quad (32)$$

$$b^2 + \alpha b + \beta = 0. \quad (33)$$

根据相容性条件 $w_{xt} = w_{tx}$, 由(31), (32)式, 可得如下三阶常微分方程,

$$2Dw_{xxx} - \lambda \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} (3b + \alpha) w_{xx} - \lambda(\alpha b + 2\beta) w_x = 0, \quad (34)$$

其特征方程为

$$2Dr^3 - \lambda \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} (3b + \alpha) r^2 - \lambda(\alpha b + 2\beta) r = 0. \quad (35)$$

下面我们分三种情形讨论方程(26)的精确解.

情形 1 当 $\beta=0$, $b=0$ 时, 方程(35)有三个根

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = \alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}}. \quad (36)$$

因此方程(34)具有如下形式的解,

$$w(x, t) = k_1(t)x + k_2(t) + k_3(t)e^{\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}}x}. \quad (37)$$

将(37)式代入(31)式, 得

$$k_1'(t)x + \left[k_2'(t) + \lambda \alpha \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} k_1(t) \right] + \left[k_3'(t) - \frac{1}{2} \lambda \alpha^2 k_3(t) \right] e^{\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}}x} = 0.$$

由 $1, x, e^{\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}}x}$ 的相互独立性, 得到

$$k_1'(t) = 0,$$

$$k_2'(t) + \lambda \alpha \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} k_1(t) = 0,$$

$$k_3'(t) - \frac{1}{2} \lambda \alpha^2 k_3(t) = 0.$$

解之得

$$k_1(t) = c_1, \quad k_2(t) = -c_1 \lambda \alpha \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} t + c_2, \quad k_3(t) = e^{\frac{1}{2} \lambda \alpha^2 t}. \quad (38)$$

最后由(27), (29), (37)和(38)式, 得到方程(26)的精确解为

$$u(x, t) = -\frac{c_1 \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} + c_3 \alpha e^{\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x + \frac{1}{2} \lambda \alpha^2 t}}{c_2 + c_1 x - c_1 \lambda \alpha \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} t + c_3 e^{\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x + \frac{1}{2} \lambda \alpha^2 t}}. \quad (39)$$

情形 2 当 $\beta=0$, $b=-\alpha$ 时, 方程(35)有三个根

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_3 = -\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}}.$$

因此方程(34)具有如下形式的解,

$$w(x, t) = k_1(t) + [k_2(t)x + k_3(t)]e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x}. \quad (40)$$

将(40)式代入(31)式, 得

$$k_1'(t) + [k_2'(t) - \omega_2 k_2(t)]x e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x} + [k_3'(t) - \omega_3 k_3(t) - \omega_2 k_2(t)]e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x} = 0,$$

其中

$$\omega_2(t) = \frac{1}{2} \lambda \alpha^2, \quad \omega_3(t) = 6D\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} + 2\lambda \alpha^2. \quad (41)$$

由 $1, x e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x}, e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x}$ 的相互独立性, 有

$$\begin{aligned} k_1'(t) &= 0, \\ k_2'(t) - \omega_2 k_2(t) &= 0, \\ k_3'(t) - \omega_2 k_3(t) - \omega_3 k_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

解之得

$$k_1(t) = c_1, \quad k_2(t) = c_2 e^{\omega_2 t}, \quad k_3(t) = [c_2 \omega_3 t + c_3] e^{\omega_2 t}. \quad (42)$$

由(27), (29), (40)和(42)式, 得到方程(26)的精确解为

$$u(x, t) = \frac{\left(\alpha c_3 - c_2 \sqrt{\frac{2D}{\lambda}} + c_2 \alpha x + c_2 \alpha \omega_3 t + c_3 \right) e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x + \omega_2 t}}{c_1 + (c_3 + c_2 x + c_2 \omega_3 t) e^{-\alpha \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} x + \omega_2 t}} - \alpha, \quad (43)$$

其中 ω_2, ω_3 满足(41)式.

情形 3 当 $\beta \neq 0, \alpha^2 - 4\beta \geq 0$ 时, 由(33)式, 可得

$$b_{\pm} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \quad (44)$$

从而方程(35)有三个根

$$r_1 = 0, \quad r_{2\pm} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2D} (\alpha^2 - 4\beta)}, \quad r_{3\pm} = \sqrt{\frac{\lambda}{2D}} \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}. \quad (45)$$

因此方程(34)具有如下形式的解,

$$w(x, t) = k_1(t) + k_2(t) e^{r_2 x} + k_3(t) e^{r_3 x}. \quad (46)$$

将(46)式代入(31)式,得到

$$k_1'(t) + [k_2'(t) - \omega_2 k_2(t)]e^{r_2 x} + [k_3'(t) - \omega_3 k_3(t)]e^{r_3 x} = 0.$$

其中

$$\omega_2 = \pm \lambda \alpha \sqrt{\alpha^2 - \beta}, \quad \omega_3 = \frac{\lambda}{4} (6\beta - \alpha^2 \pm \alpha \sqrt{\alpha^2 - \beta}). \quad (47)$$

由 $1, e^{r_2 x}, e^{r_3 x}$ 的独立性,我们有

$$\begin{aligned} k_1'(t) &= 0, \\ k_2'(t) - \omega_2 k_2(t) &= 0, \\ k_3'(t) - \omega_3 k_3(t) &= 0. \end{aligned}$$

解之得

$$k_1(t) = c_1, \quad k_2 = c_2 e^{\omega_2 t}, \quad k_3 = c_3 e^{\omega_3 t}, \quad (48)$$

其中 c_1, c_2 和 c_3 为任意常数.

最后由(27), (29), (46)和(48)式,得到方程(26)的精确解

$$u(x, t) = -\sqrt{\frac{2D}{\lambda}} \frac{c_2 r_2 e^{r_2 x + \omega_2 t} + c_3 r_3 e^{r_3 x + \omega_3 t}}{c_1 + c_2 e^{r_2 x + \omega_2 t} + c_3 e^{r_3 x + \omega_3 t}} + b, \quad (49)$$

其中 b, r_1, r_2, ω_1 和 ω_2 分别满足(44), (45)和(47)式.

表达式(39), (43)和(49)式是方程(26)解的一般形式,当 $c, c_1, c_2, D, \lambda, \alpha$ 和 β 分别取不同的值时,可得许多著名方程的精确解和孤波解.

如取 $D=1, \alpha=0, \beta=-1$, 由(49)式可得 Chaffee-Infante 方程^[9]

$$u_t - u_{xx} + \lambda(u^3 - u) = 0$$

的精确解为

$$u(x, t) = -\frac{\pm 2c_2 e^{\pm \sqrt{2}\lambda x} \pm c_3 e^{\pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x - \frac{3}{2}t}}{c_1 + c_2 e^{\pm \sqrt{2}\lambda x} + c_3 e^{\pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x - \frac{3}{2}t}} \pm 1,$$

三组孤波解为

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x + c\right), \\ u_{2,3} &= -\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x + \frac{3}{4}\lambda t + c\right) \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

如取 $D=1, \lambda=1, \alpha=-1, \beta=0$, 由(39)和(43)式可得 Huxley 方程^[11]

$$u_t - u_{xx} - u^2 + u^3 = 0$$

的精确解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{-\sqrt{2}c_1 + c_3 e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2}t}}{c_2 + c_1 x + c_1 \sqrt{2} + c_3 e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2}t}}, \\ u(x, t) &= -\frac{[c_2 \sqrt{2} + c_2 x + c_2(3\sqrt{2} + 2)t + c_3]e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}x - \frac{1}{2}t}}{c_1 + [c_2 x + c_2(3\sqrt{2} + 2)t + c_3]e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}x - \frac{1}{2}t}} + 1, \end{aligned}$$

二组孤波解为

$$u_1 = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{4} t + c\right),$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{4} t + c\right) \pm \frac{1}{2}.$$

如取 $D = \frac{1}{2}$, $\phi = \gamma - u$, $\lambda = 1$, $\alpha = -2\gamma$, $\beta = \gamma^2 - 1$, 由 (49) 式可得 Fitzhugh-Nagumo 方程^[10]

$$\phi_t - \frac{1}{2} \phi_{xx} + (\gamma - \phi)(1 - \phi^2) = 0 \quad -1 < \gamma < 0$$

的精确解为

$$\phi = \gamma + \frac{\pm 2 c_2 e^{\pm 2(x \mp 2\gamma)} + 2 c_3 (\gamma \pm 1) e^{(\gamma \pm 1)(x + \gamma \mp 3t)}}{c_1 \pm c_2 e^{\pm 2(x \mp 2\gamma)} + c_3 e^{(\gamma \pm 1)(x + \gamma \mp 3t)}},$$

三组孤波解为

$$\phi_1 = \tanh(x - \gamma t),$$

$$\phi_{2,3} = \frac{\gamma \pm 1}{2} \tanh\left\{\frac{\gamma \pm 1}{2} \left[x + \frac{1}{2}(\gamma \mp 3)t\right]\right\} + \frac{\gamma \pm 1}{2}.$$

- [1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution and Inverse Scattering (Cambridge University Press, New York, 1991), pp. 47—350.
- [2] M. R. Miura, Bäcklund Transformation (Springer-Verlag, Berlin, 1978), pp. 4—156.
- [3] R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.*, **27**(1977), 1192.
- [4] C. H. Gu, Z. X. Zhou, *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987), 179.
- [5] M. L. Wang *et al.*, *Phys. Lett.*, **A213**(1996), 279.
- [6] M. L. Wang, *Phys. Lett.*, **A216**(1996), 67.
- [7] 范恩贵、张鸿庆, 物理学报, **46**(1997), 1254.
- [8] 王明新, 非线性抛物方程(科学出版社, 北京, 1993), 第 139—180 页.
- [9] P. Constantin *et al.*, *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1989), pp. 111—118.
- [10] G. Eilenberger, *Solitons-Mathematical Methods for Physicists* (Springer-Verlag, New York, 1981), pp. 4—35.
- [11] Z. Chen *et al.*, *IMA. J. Appl. Math.*, **42**(1992), 107.
- [12] W. Malfiet, *Am. J. Phys.*, **60**(1992), 650.
- [13] B. A. Kupershmidt, *Comm. Math. Phys.*, **99**(1985), 51.

THE HOMOGENEOUS BALANCE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR SOLITON EQUATIONS

FAN EN-GUI ZHANG HONG-QING

(*Institute of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024*)

(Received 9 June 1997)

ABSTRACT

The homogeneous balance method is very effective for finding exact solutions of nonlinear soliton equations. But only soliton-type solutions can be obtained. In this paper we improve some key steps in this method, then by using modified homogeneous balance method we are able to obtain some new families of exact solutions to nonlinear soliton equations. Solitary wave solutions are merely a special case of one family.

PACC: 0340K; 0290