

借助集团展开的超辐射热力学^{*}

刘文森¹⁾ 李秀平¹⁾ 张云波¹⁾²⁾ 梁九卿¹⁾²⁾

1)(山西大学物理系, 太原 030006)

2)(中国科学院物理研究所, 中国科学院凝聚态物理中心, 北京 100080)

(1997 年 6 月 27 日收到)

N 原子-单模辐射场相互作用系统当作相互作用准玻色子-光子系统并处理作巨正则系综. 系统热力学势的明显表达式应用集团展开得到, 某些热力学量按通常的热力学公式导出. 数值计算和图示表明了这个超辐射系统的热力学行为, 在超辐射态临界线上和其他地方出现的奇异性揭示了在此合作系统中存在第二类相变换.

PACC: 0500; 3500; 0540

1 引 言

超辐射的 Dicke 模型^[1]断言, 大量原子的合作效应将导致光的相干辐射和吸收, 以致从 N 原子-辐射场系统得到的辐射率比例于 N^2 而不是 N , 后者是原子非相干辐射, 即彼此独立地辐射所应有的. 实验上, 当用染料激光脉冲把 Na 原子束激发到高量子数 n 为 20 到 50 的 Rydberg 能级, 并把腔体调谐到与较低激发能级的跃迁共振时, 在毫米波区段已观察到串级超辐射现象^[2,3].

这些实验使我们注意到, 实验装置是被浸沉在黑体辐射背景中, 且超辐射的特征与背景温度紧密相关. 因此, 能够描述超辐射现象的温度相关理论似乎是需要的. 然而, 迄今对超辐射已作的大量理论工作限于处理零温度的系统^[4,5]. 这是因为, 如果 $N \gg n_B$ (n_B 为每个模的黑体光子的平均数), 热场分布将迅速变小, 以致可以忽略. 至于 Dicke 模型的热力学, Hepp 和 Lieb^[6]曾精确计算, Wang 和 Hioe^[7]其后简短讨论过这一问题. 结论是: 在热力学极限下, 即当 $N, V \rightarrow \infty$ (V 为腔体体积), N/V 为有限值时, 对原子和场之间足够大的耦合常数值, 可找到一临界温度 T_c . $T > T_c$ 和 $T < T_c$ 分别叫做正常态和超辐射态, 而在 $T = T_c$, 每个粒子的自由能从一个态不连续地过渡到另一个态, 称这种情况为从正常态到超辐射态的第二类相变换. 尽管对这个问题已做过系统的研究^[8,9], 然而, 就我们所知还不存在可与实验直接比较的温度相关的理论. 我们试图在本文中弥补这一缺陷.

我们知道, Dicke 哈密顿量具有三线性形式^[10], 这提示我们把 N 原子-单模辐射场系统当成由准玻色子-光子组成的多粒子系统, 并处理成巨正则系综, 利用集团展开^[11]将导

^{*} 国家自然科学基金和山西省自然科学基金资助的课题.

出系统热力学势的明显表示,借助它得到某些热力学量.数值计算和图示将揭示场和系统的热力学行为,提供可与实验比较的数值结果和超辐射相变换存在的证明.

2 超辐射的条件

Dicke 哈密顿量在旋波近似和精确共振条件下的形式^[1]($\hbar=1$)为

$$H = \omega a_3^\dagger a_3 + \omega R_z + g(a_3 R_+ + a_3^\dagger R_-), \quad (1)$$

式中 ω 是单模场频率, a_3 和 $a_3^\dagger$ 是光子湮没和产生算符, g 是耦合常数, R_+ , R_- , R_z 各是 N 原子系统的提升、下降和转化算符. Dicke 态定义为算符 R^2 和 R_z 的本征态:

$$\begin{aligned} R^2 |J, M\rangle &= J(J+1) |J, M\rangle, \\ R_z |J, M\rangle &= M |J, M\rangle, \\ \frac{N}{2} &\geq J \geq |M|, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$. 这些 R 算符服从角动量算符的对易关系. 已知(1)式也可化成三个玻色场的三线性相互作用形式^[10]

$$H = \sum_{i=1}^3 \omega_i a_i^\dagger a_i + g(a_1^\dagger a_2 a_3 + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger), \quad (3)$$

式中 $a_1^\dagger$ (a_1) 和 $a_2^\dagger$ (a_2) 是两对玻色算符, 它们遵从与光子算符 $a_3^\dagger$ (a_3) 相同的玻色对易关系. 用 $|n_1, n_2\rangle$ 标记两个准玻色数算符 $N_1 = a_1^\dagger a_1$ 和 $N_2 = a_2^\dagger a_2$ 的本征态, 我们有

$$N_j |n_1, n_2\rangle = n_j |n_1, n_2\rangle \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

这些算符、状态和量子数之间存在着对应,

$$R_+ = a_1^\dagger a_2, \quad R_- = a_2^\dagger a_1, \quad R_z = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2), \quad (5)$$

$$|J, M\rangle \leftrightarrow |n_1, n_2\rangle, \quad (6)$$

$$J = \frac{1}{2}(n_2 + n_1), \quad M = \frac{1}{2}(n_2 - n_1). \quad (7)$$

按我们对零能级的选取, 三个频率服从关系式

$$\omega_1 = -\omega_2 = \frac{1}{2}\omega, \quad \omega_3 = \omega. \quad (8)$$

Dicke 指出^[1], 当合作数 J 具有大的数值以及 $|M|$ 具有小的数值时就将达到超辐射态, 即超辐射态有

$$|J, M\rangle = \left| \frac{N}{2}, 0 \right\rangle. \quad (9)$$

因为 N 是系统中的原子数, 它是一个宏观量或可观察量, 原则上可让它等于某个算符或算符代数式的系综平均. 因而(7)式可合理地看作平均值等式^[12]

$$\frac{N}{2} = \frac{1}{2}(\langle N_2 \rangle + \langle N_1 \rangle), \quad (10)$$

$$0 = \frac{1}{2}(\langle N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle), \quad (11)$$

式中 $\langle N_2 \rangle$ 和 $\langle N_1 \rangle$ 是算符 N_2 和 N_1 的系综平均。(11)和(10)式意指, 只当上下能级的平均布居数相等, 且它们的和等于原子数时, 超辐射态方可实现. 后一条件正表达了原子数的守恒.

在多体问题中^[11], 当涉及粒子数可变的系统时, 巨正则系综方法是最方便的. 然而, 我们面对的困难是, 一方面, 辐射场的化学势在热平衡下应为零; 另一方面, 准玻色子并非真实粒子, 对它们而言没有化学势. 但是我们仍可形式地对准玻色子和光子赋予它们以化学势 μ_1 , μ_2 和 μ_3 , 使之起着 Lagrange 乘子的作用, 在求出系综平均后让它们彼此相等并全部为零, 如我们在文献[13]中所作的那样. 哈密顿量(3)式于是可改写成巨哈密顿量

$$K = H - \sum_{i=1}^3 \mu_i N_i = K_0 + V, \quad (12)$$

式中

$$K_0 = H_0 - \sum_{i=1}^3 \mu_i N_i = \sum_{i=1}^3 \zeta_i N_i, \quad (13)$$

$$V = g(a_1^\dagger a_2 a_3 + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger), \quad (14)$$

其中 H_0 是自由粒子哈密顿量, V 是相互作用势, $N_3 = a_3^\dagger a_3$ 是光子数算符, $\zeta_i = \omega_i - \mu_i$.

3 集团展开

一系统热力学势 Ω 的展开表达式通常可写成^[11]

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} U_m, \quad (15)$$

式中 $\beta = 1/k_B T$,

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \ln e^{-\beta K_0}. \quad (16)$$

U_m 称作 m 级集团函数, 它可表示成

$$U_m = \frac{(-1)^m}{m} \int_0^\beta d\tau_1 \cdots \int_0^\beta d\tau_m {}_0\langle T_\tau V(\tau_1) \cdots V(\tau_m) \rangle, \quad (17)$$

式中 τ 是温度参量, ${}_0\langle T_\tau V(\tau_1) \cdots V(\tau_m) \rangle$ 是温度有序乘积, 具有

$$V(\tau) = e^{\tau K_0} V e^{-\tau K_0}. \quad (18)$$

${}_0\langle \cdots \rangle$ 表示用密度算符 $\rho_0 = e^{\beta K_0} / \text{Tr} e^{\beta K_0}$ 对括号中的量统计平均. 现在转而研究我们的系统, 从(16)式得到

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -\frac{1}{\beta} \ln \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle n_1, n_2, n_3 | \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^3 \zeta_i N_i\right) | n_1, n_2, n_3 \rangle \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^3 [\beta \zeta_i - \ln(e^{\beta \zeta_i} - 1)]. \end{aligned} \quad (19)$$

显然, (19) 式仅当 $\zeta_i > 0$ 时才有意义. 利用 (14) 式, (18) 式变为

$$V(\tau) = g(a_1^\dagger a_2 a_3 e^{\tau(\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3)} + a_1 a_2^\dagger a_3^\dagger e^{-\tau(\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3)}). \quad (20)$$

因为 $V(\tau)$ 仅包含三个不同玻色子的乘积, 按规则有 $\circ\langle V(\tau) \rangle = 0$, 即热力学势的一阶修正项等于零. 类似地, 所有的奇阶修正项都等于零. 为了计算二阶项, 我们考虑如下的平均

$$\begin{aligned} & \circ\langle T_\tau V(\tau_1) V(\tau_2) \rangle \\ &= g_0^2 \langle T_\tau a_1^\dagger(\tau_1) a_1(\tau_2) \rangle \circ\langle T_\tau a_2(\tau_1) a_2^\dagger(\tau_2) \rangle \circ\langle T_\tau a_3(\tau_1) a_3^\dagger(\tau_2) \rangle \\ &+ \circ\langle T_\tau a_1(\tau_1) a_1^\dagger(\tau_2) \rangle \circ\langle T_\tau a_2^\dagger(\tau_1) a_2(\tau_2) \rangle \circ\langle T_\tau a_3^\dagger(\tau_1) a_3(\tau_2) \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

这里 $a_i(\tau) = e^{\tau K_0} a_i e^{-\tau K_0} = e^{-\tau \zeta_i a_i}$, $a_i^\dagger(\tau) = e^{-\tau K_0} a_i^\dagger e^{\tau K_0} = e^{\tau \zeta_i} a_i^\dagger$ ($i = 1, 2, 3$). 由 Wick 定理知, 温度有序对算符的平均, 即所谓的收缩, 一般可由温度格林函数表示

$$\circ\langle T_\tau a_{kj}(\tau_1) a_{k'j'}^\dagger(\tau_2) \rangle = -\delta_{kk'} \delta_{jj'} D_0(k, \tau_1 - \tau_2), \quad (22)$$

其中

$$D_0(k, \tau_1 - \tau_2) = -[(1 + n_0(k)) \Theta(\tau_1 - \tau_2) + n_0(k) \Theta(\tau_2 - \tau_1)] e^{-(\tau_1 - \tau_2)\zeta} \quad (23)$$

为玻色子的非微扰或自由粒子格林函数, $n_0(k) = 1/(e^{\beta\omega_k} - 1)$ 是频率为 ω_k 的自由玻色子的 Planck 分布函数, $x < 0$ 时 $\Theta(x) = 0$, 而 $x > 0$ 时 $\Theta(x) = 1$; k, j 是动量和自旋下标, 为简单起见此后将它们略去, 这意味着我们将限于研究单模场. 于是二阶集团函数为

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{(-1)^2}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \circ\langle T_\tau V(\tau_1) V(\tau_2) \rangle \\ &= -\frac{g^2}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 D_{01}(\tau_1 - \tau_2) D_{02}(\tau_2 - \tau_1) D_{03}(\tau_2 - \tau_1). \end{aligned} \quad (24)$$

现在对 D_{0j} 作傅里叶变换,

$$\begin{aligned} D_{0j}(i\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} D_{0j}(\tau), \\ D_{0j}(\tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} e^{-i\omega_n \tau} D_{0j}(i\omega_n) \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (25)$$

这里对玻色子求和是对复频率 $i\omega_n = i2\pi n/\beta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 所作. (24) 式可化为

$$U_2 = -\frac{g^2}{\beta^3} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{i\omega_n} D_{01}(i\omega_{n_1}) D_{02}(i\omega_{n_2}) D_{03}(i\omega_{n_3}) \exp[-i(\omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3})(\tau_2 - \tau_1)], \quad (26)$$

式中

$$D_{0j}(i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \zeta_j} \quad j = 1, 2, 3 \quad (27)$$

为能量表象中的格林函数. 如果引入参量 λ 并将 V 写成 λV , 利用等式

$$\frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau \exp[-i(\omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3})\tau] = \delta_{n_1 - n_2, n_3}, \quad (28)$$

则 (24) 式化为

$$U_2 = \frac{1}{2} g^2 \lambda^2 \sum_{i\omega_n} D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n). \quad (29)$$

其中

$$P^{(1)}(i\omega_n) = -\frac{2}{\beta} \sum_{i\omega_{n_2}} D_{01}(i\omega_{n_2} + i\omega_n) D_{02}(i\omega_{n_2}), \quad (30)$$

通常对应准玻色子的自能.

我们现在列出构造图的一些规则:(1) $D_{01,2}(i\omega_{n_{1,2}})$ 联系着由实线表示的准玻色子线.(2) $g^2 D_{03}(i\omega_{n_3})$ 联系着由波纹线表示的光子线.(3) 在每个顶点复频率守恒(能量守恒).(4) 求和结果应乘以因子 $\frac{\lambda^n}{2^n} \left(\frac{-2}{\beta}\right)^n$, 这里 2^n 是集团函数的阶数. 根据这些结果, 二阶集团函数对应于由一条光子线和两条准玻色子线构成的一个圈; 四阶集团函数对应于由两条光子线和四条准玻色子线构成的两个圈,

$$U_4 = \frac{\lambda^4}{4} \sum_{i\omega_n} [g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)]^2. \quad (31)$$

类似地一直到 n 个圈, 我们有

$$U_{2n} = \frac{\lambda^{2n}}{2^n} \sum_{i\omega_n} [g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)]^n. \quad (32)$$

如果仅限于考虑图 1 所示图集的贡献, 从(15)式及(29)–(32)式, 热力学势的修正项的序

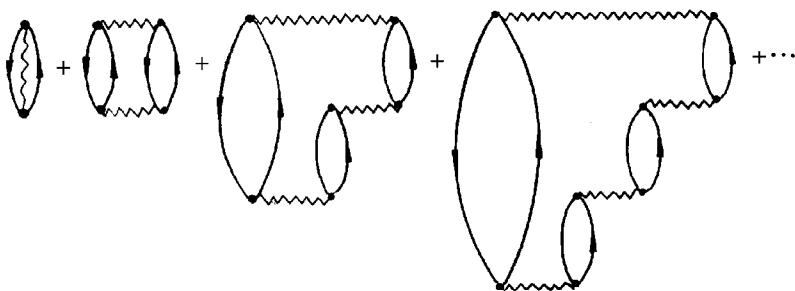


图 1 不同的连通图之和

列为

$$\Omega - \Omega_0 = \frac{1}{2\beta} \sum_{i\omega_n} \ln[1 - g^2 \lambda^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)]. \quad (33)$$

为了消去求和中的对数符号, 取 $\eta = \lambda^2$ 作积分变量并利用关系式

$$\int_0^{\lambda^2} d\eta \frac{g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)}{1 - \eta g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)} = -\ln[1 - \eta g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)], \quad (34)$$

于是对 $\lambda=1$ 得到

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{1}{2\beta} \sum_{i\omega_n} \int_0^1 d\eta \frac{g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)}{1 - \eta g^2 D_{03}(i\omega_n) P^{(1)}(i\omega_n)}. \quad (35)$$

这个积分可以提出到对 $i\omega_n$ 求和号的外面, 使得求和变得更容易. 另一方面, 利用(27)式

可改写(30)式为

$$\begin{aligned} P^{(1)}(i\omega_n) &= -\frac{2}{\beta} \sum_{i\omega_{n_2}} \frac{1}{[i(\omega_{n_2} + \omega_n) - \zeta_1](i\omega_{n_2} - \zeta_2)} \\ &= -\frac{2}{\beta} \sum_{i\omega_{n_2}} f(i\omega_{n_2}). \end{aligned} \quad (36)$$

现在我们取复平面上的回路积分如下:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} dz \frac{f(z) n_0(z)}{2\pi i}. \quad (37)$$

式中回路是半径为 R 且在 $R \rightarrow \infty$ 极限下的一个大圆, 而 $n_0(z) = 1/(e^{\beta z} - 1)$. 函数 $n_0(z)$ 对所有正负整数 n 和 0 有极点 $z_n = i\omega_n = i2\pi n/\beta$. 在这些点的留数都是 $1/\beta$. 而函数 $f(z)$ 具有形式

$$f(z) = \frac{1}{(z + i\omega_n - \zeta_1)(z - \zeta_2)}. \quad (38)$$

这个函数在点 $-i\omega_n + \zeta_1$ 和 ζ_2 处有极点. 因此积分 I 由加上所有留数得到

$$I = \frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_{n_2}} f(i\omega_{n_2}) + \frac{n_0(\zeta_2, \zeta_1)}{i\omega_n + \zeta_2 - \zeta_1}. \quad (39)$$

式中 $n_0(\zeta_2, \zeta_1) = n_0(\zeta_2) - n_0(\zeta_1)$. 在 $R \rightarrow \infty$ 极限下, 积分 I 为零, 由此给出

$$P^{(1)}(i\omega_n) = \frac{2 n_0(\zeta_2, \zeta_1)}{i\omega_n + \zeta_2 - \zeta_1}. \quad (40)$$

将(40)式代入(35)式, 我们得到

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 &= -\frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} \int_0^1 d\eta \frac{g^2 n_0(\zeta_2, \zeta_1)}{(i\omega_n - \zeta_3)(i\omega_n + \zeta_2 - \zeta_1) - 2\eta g^2 n_0(\zeta_2, \zeta_1)} \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} \int_0^1 d\eta \frac{g^2 n_0(\zeta_2, \zeta_1)}{(i\omega_n - y_+)(i\omega_n - y_-)}. \end{aligned} \quad (41)$$

这里

$$y_{\pm} = \frac{1}{2} \{ \sigma_1 \pm [\sigma_2^2 + 8\eta g^2 n_0(\zeta_2, \zeta_1)]^{1/2} \}, \quad (42)$$

有 $\sigma_1 = \zeta_3 - \zeta_2 + \zeta_1$ 和 $\sigma_2 = \zeta_3 + \zeta_2 - \zeta_1$. 类似(36)–(40)式的分析进一步将(41)式约化成

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \int_0^1 d\eta \frac{g^2 n_0(\zeta_2, \zeta_1) n_0(y_+, y_-)}{\alpha(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}, \quad (43)$$

式中

$$\alpha(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = [\sigma_2^2 + 8\eta g^2 n_0(\zeta_2, \zeta_1)]^{1/2}. \quad (44)$$

为了完成上述积分, 我们考虑

$$n_0(y_+, y_-) = \frac{1}{e^{\beta y_+} - 1} - \frac{1}{e^{\beta y_-} - 1}$$

$$= - \frac{\sinh(\beta\alpha/2)}{\cosh(\beta\sigma_1/2) - \cosh(\beta\alpha/2)}. \quad (45)$$

将(45)式代入(43)式,并将积分变量从 η 变为 α ,最后得到

$$\Omega - \Omega_0 = - \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\cosh(\beta\sigma_1/2) - \cosh(\beta\alpha/2)}{\cosh(\beta\sigma_1/2) - \cosh(\beta\sigma_2/2)}. \quad (46)$$

由(46)式并利用普通的热力学公式,我们可以导出场和整个系统对温度 T 、频率 ω 和原子数 N 相关的一些特征.

4 热力学量

由以上方程,首先分别得出上能级和下能级的两个平均布居数及平均光子数

$$\langle N_1 \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_1} \right)_{(V, T; \mu_i=0)} = n_0(\omega/2) - F_1(\beta, \omega, N) - F_2(\beta, \omega, N), \quad (47)$$

$$\langle N_2 \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_2} \right)_{(V, T; \mu_i=0)} = N - n_0(\omega/2) + F_1(\beta, \omega, N) + F_2(\beta, \omega, N), \quad (48)$$

$$\langle N_3 \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_3} \right)_{(V, T; \mu_i=0)} = n_0(\omega) - F_1(\beta, \omega, N). \quad (49)$$

式中下标 (V, T) 表示在固定的体积 V 和温度 T 下取偏导数, $(\mu_i=0)$ 意指在取偏导数后再让全部化学势为零.这里函数 F_1 和 F_2 有如下形式:

$$F_1(\beta, \omega, N) = \frac{1}{4} \left(\coth \frac{x}{2} - \frac{\sinh x}{h(x, y)} \right), \quad (50)$$

$$F_2(\beta, \omega, N) = \frac{y \sinh y}{4 \chi^2 h(x/2, 0) h(x, y)}. \quad (51)$$

式中 $x = \beta\omega$, $y = \beta\chi g$, $\chi = [2(N - 2n_0(\omega/2))]^{1/2}$, $h(x, y) = \cosh x - \cosh y$, 和 $h(x/2, 0) = \cosh x - 1$. 我们指出, 在(48)式中已经利用了原子数守恒的条件(10)式, 以 $N - n_0(\omega/2)$ 代换了对应于负频率 $-\omega/2$ 的分布 $n_0(-\omega/2)$. 为了与 Rydberg-原子微波激光实验比较^[2,3], 我们注意到具有相邻 n 值的 Rydberg 能级之间的能量间隔, 其数量级为 $e^2/(4\pi\epsilon_0 a_0 n^3)$, 这里 a_0 和 e 各为 Bohr 半径和电荷. 这些间隔对 n 为 20 到 50 属于毫米区段. 相邻 Rydberg 能级间的电偶极矩阵元是一个测度原子-场耦合强度的量, 其数量级为 $ea_0 n^2$, 这个值比低激发态的原子系统的值约大三个数量级, 因此可合理地选取耦合常数 $g = 10^3(\text{s}^{-1})$. 在图 2 和图 3 中我们以两个不同数量级的原子数画出了平均布居数 $\langle N_1 \rangle$ 和 $\langle N_2 \rangle$ 的函数曲面. 在两种情况下 $\langle N_1 \rangle$ 和 $\langle N_2 \rangle$ 可以在 ω 和 T 的不同范围的某些点相交. 交叉线上的 ω 和 T 的值同时满足(10)和(11)式, 构成系统的超辐射临界线. 对应的平均光子数 $\langle N_3 \rangle$ 在图 4 和图 5 中画出. 我们看到对 $N = 10^2$, $\langle N_3 \rangle$ 通过临界线时平滑地变化, 然而对 $N = 10^4$, 显示超辐射脉冲串级辐射阶梯状的奇异性出现了, 特别是在临界线处出现光子数的尖锐峰值(图 6). 这些现象表明, 由较小原子数组成的系统的超辐射对辐射场的分布并无显著的影响, 相反, 对于比 $N = 10^4$ 更大的原子数,

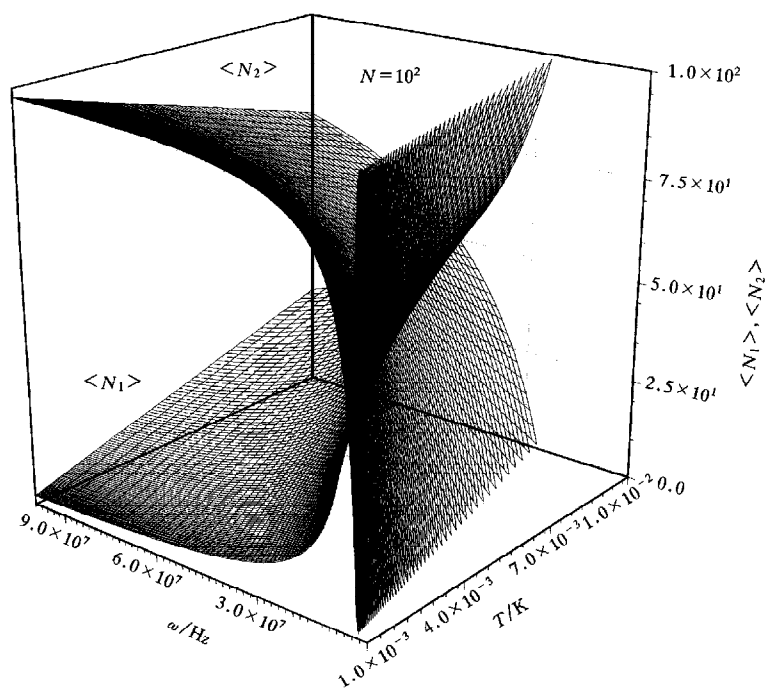


图2 平均布居数 $\langle N_1 \rangle$ 和 $\langle N_2 \rangle$ $N=10^2$, 在 $\omega=10^6-10^8 \text{ Hz}$, $T=10^{-3}-10^{-2} \text{ K}$ 的区域

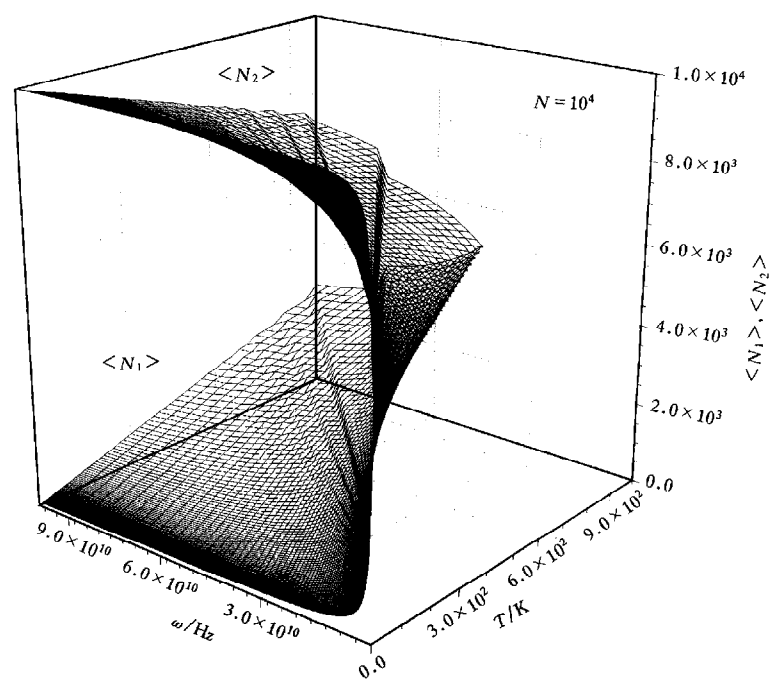


图3 平均布居数 $\langle N_1 \rangle$ 和 $\langle N_2 \rangle$ $N=10^4$, 在 $\omega=10^9-10^{11} \text{ Hz}$, $T=10^1-10^3 \text{ K}$ 的区域

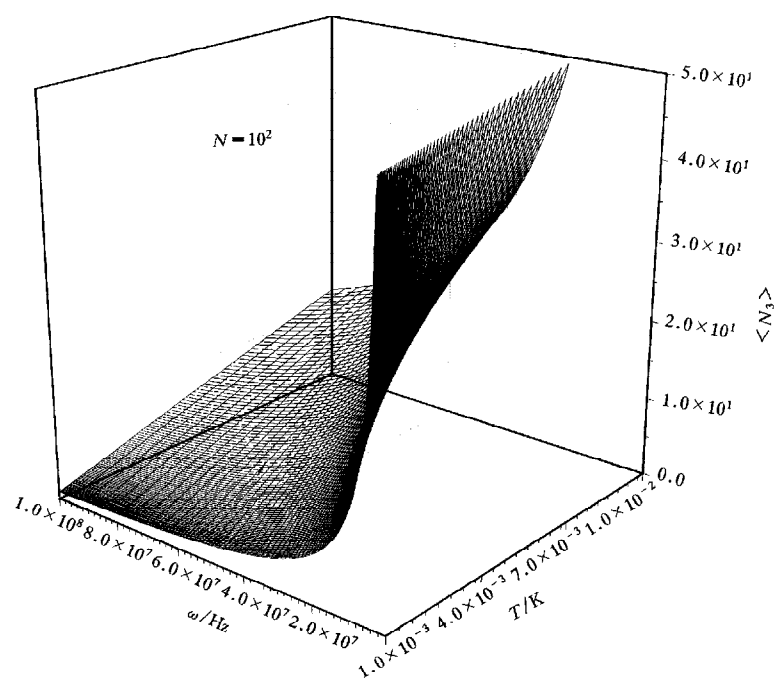


图 4 平均光子数 $\langle N_3 \rangle$ $N = 10^2$

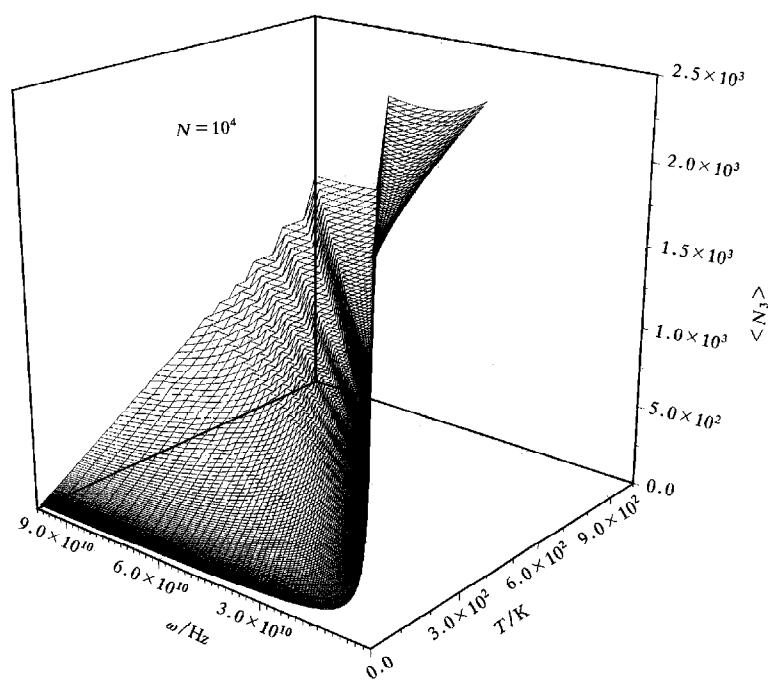
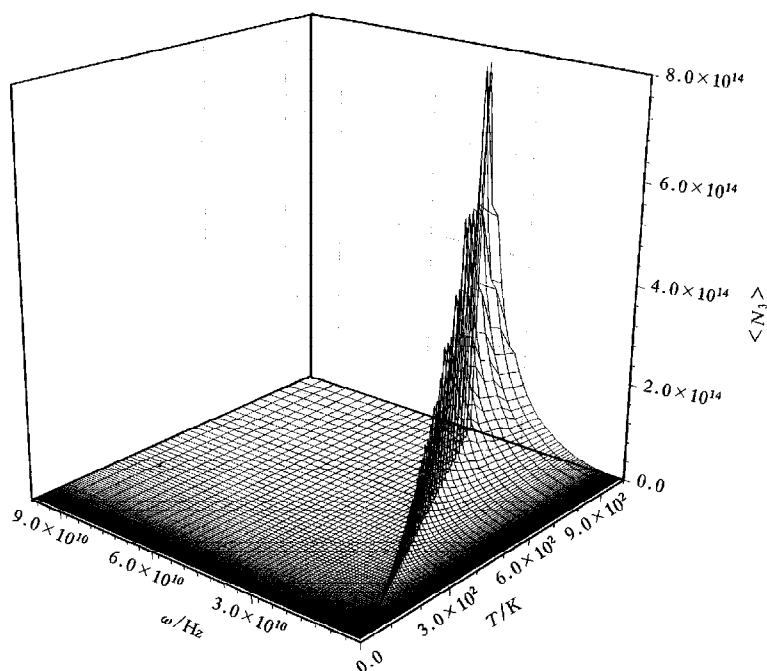


图 5 平均光子数 $\langle N_3 \rangle$ $N = 10^4$

图6 平均光子数 $\langle N_3 \rangle$ 在临界线上, $N=10^4$

例如 $N=10^5$, 我们在 ω 和 T 的通常区段, 却找不到临界线, 这意味着在所选取的耦合常数下, 相互作用强度不足以激发起多原子系统的超辐射. 对于已在毫米波区段和实验室温度下观察到的超辐射现象, 其原子数似乎应限制在 10^3-10^4 .

由直接计算我们找到热辐射场的 Glauber 二阶相关函数^[14]

$$g^{(2)} = 1 + \frac{\langle (\Delta N_3)^2 \rangle - \langle N_3 \rangle^2}{\langle N_3 \rangle^2} \\ = 1 - \frac{1}{\langle N_3 \rangle} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta \langle N_3 \rangle} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu_3^2} \right) \right\}_{(V, T, \mu_i=0)}. \quad (52)$$

式中 $\langle (\Delta N_3)^2 \rangle = \frac{1}{\beta} (\partial \langle N_3 \rangle / \partial \mu_3)_{(V, T, \mu_i=0)} = -\frac{1}{\beta} (\partial^2 \Omega / \partial \mu_3^2)_{(V, T, \mu_i=0)}$ 是热光子数方差. 利用(46)和(49)式得到

$$g^{(2)} = 1 + \frac{1}{\langle N_3 \rangle} \left\{ -1 + \frac{1}{\langle N_3 \rangle} \left[\frac{1}{4h(x, 0)} - \frac{1 - \cosh x \cosh y}{8h^2(x, y)} \right] \right\}. \quad (53)$$

图7示出了 $N=10^4$ 时 $g^{(2)}$ 对频率 ω 和温度 T 的依赖关系. 我们看到, 在非临界线区域总是 $g^{(2)} > 1$, 表明那里的场是聚束的, 具有超泊松场统计. 但当接近临界线时, $g^{(2)}$ 在 0.8 到 2.2 之间剧烈改变, 即场在聚束和反聚束 ($g^{(2)} < 1$), 或在超泊松统计和亚泊松统计之间来回变化.

整个系统的熵与比定容热容为

$$S/k_B = \beta^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} \right)_{(V, \mu_i=0)}$$

$$= \ln \frac{1}{e^x - 1} + \ln \frac{1}{e^{x/2} - 1} + \ln \left[\frac{1}{e^{x/2} - 1} + \frac{\chi^2}{2} \right] + x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} - \frac{\chi^2}{4} \right) \\ - \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{h(x, y)}{h(x, 0)} + \frac{x h(0, y) \sinh x}{h(x, 0) h(x, y)} + \left[1 + \frac{x}{2 \chi^2 h(x/2, 0)} \right] \frac{x \sinh y}{h(x, y)} \right\}, \quad (54)$$

$$c_V/k_B = - \left(2 \beta^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} + \beta^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} \right)_{(V, \mu_i=0)} \\ = \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{2 h(x/2, 0)} + \frac{(N+1) \chi^2}{4} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[x^2 + \left(y + \frac{xy}{2 \chi^2 h(x/2, 0)} \right)^2 \right] \frac{1 - \cosh x \cosh y}{h^2(x, y)} \\ + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x}{\chi^2 h(x/2, 0)} - \frac{x \sinh(x/2)}{4 h(x/2, 0)} \right] \frac{xy \sinh y}{\chi^2 h(x/2, 0) h(x, y)} \\ - \left[y + \frac{y}{2 \chi^2 h(x/2, 0)} \right] \frac{x \sinh x \sin y}{h^2(x, y)}. \quad (55)$$

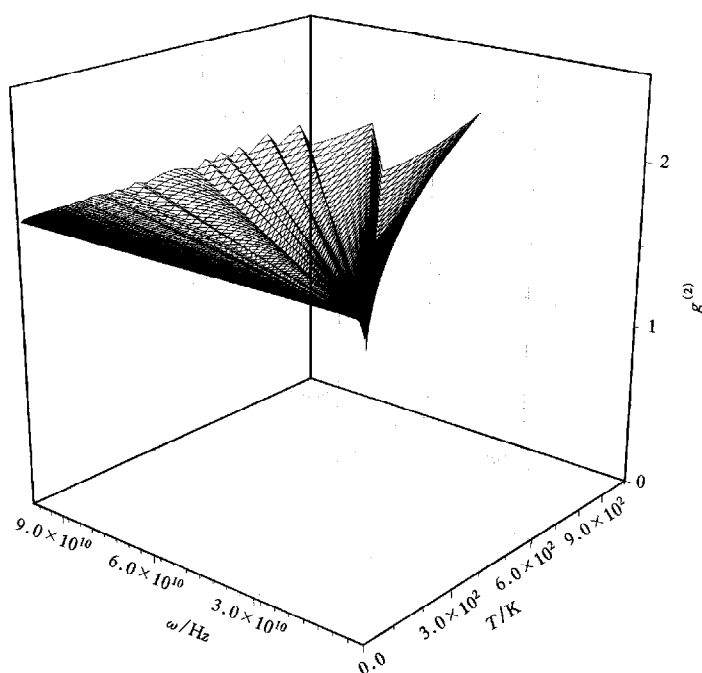


图 7 二阶相关函数 $g^{(2)}$ $N=10^4$, 在 $\omega=10^9-10^{11}$ Hz, $T=10^1-10^3$ K 的区域

当 $N=10^4$ 时, 熵函数是一个平滑曲面, 当 $T \rightarrow 0$ 时它缓慢趋于零. 这是由于合作系统的通性: 在很低温度下仍保留着残留熵(图 8). 图 9 表明比定容热容在非临界线处的某些点也出现突变. 值得提出的是, 当 $N=10^2$ 时, 以上三个量都是光滑函数曲面, 即使在临界线上也不出现奇异性. 又当耦合常数为零, 即 y 为零时, 以上公式中由相互作用引起的贡献

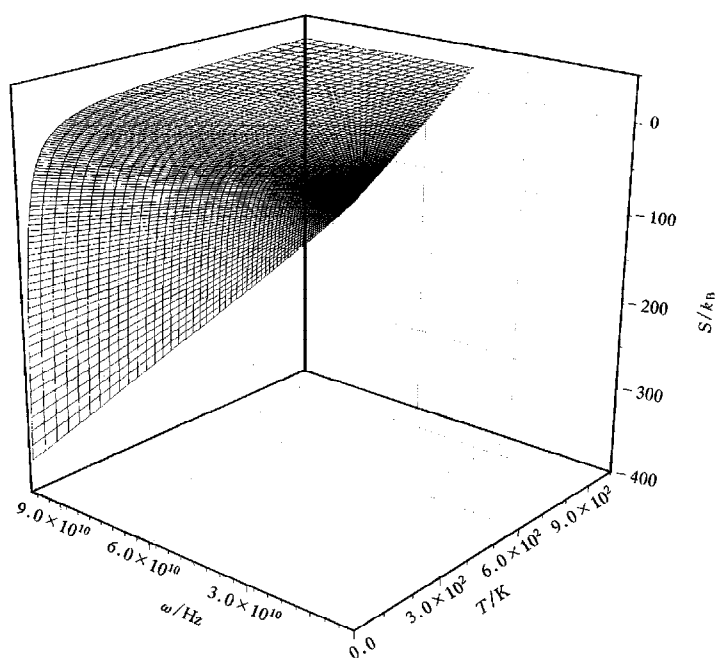


图8 系统的熵 S/k_B $N=10^4$

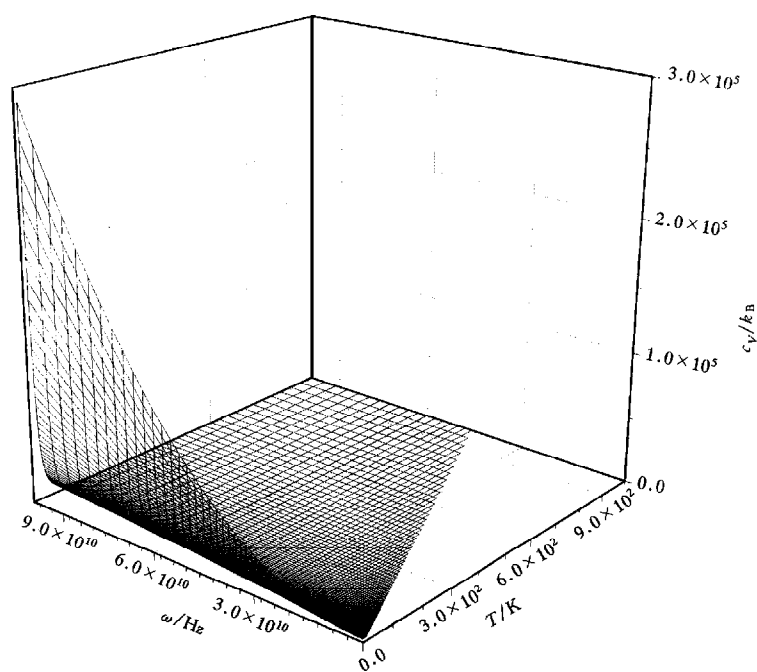


图9 系统的比定容热容 c_v/k_B $N=10^4$

项都变成零. 特别是 $g^{(2)} = 2$, 这是典型热光场的值.

5 结 论

在 Landau^[15]的方案中, 相变换按 Gibbs 势的一阶或二阶导数是否具有不连续性而划分为第一类或第二类相变换. 对比之下, 我们的研究表明, 熵和比定容热容各作为热力学势对温度的一阶和二阶导数, 前者除临界线上处处连续, 后者在临界线外也存在不连续性, 这意味着我们的系统确实存在第二类相变换. 另一方面, 热力学势对化学势的一阶和二阶导数分别是平均布居数、平均光子数和二阶相关函数, 在足够量的原子数和确定的频率与温度范围内, 在临界线外它们都具有奇异性, 这个区域应是 Hepp 和 Lieb^[6]所指的超辐射态区. 而越过临界线与上述区域相对的频率和温度区, 应是他们所指的正规态区.

- [1] R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **93**(1954), 99.
- [2] J. M. Raimond, P. Goy, M. Gross *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1924.
- [3] L. Moi, P. Goy, J. M. Raimond *et al.*, *Phys. Rev.*, **A27**(1983), 2043.
- [4] R. Bonifacio, P. Schwendimann, F. Haake, *Phys. Rev.*, **A4**(1971), 302, 854.
- [5] M. Hillery, E. D. Miodinow, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 4064.
- [6] K. Hepp, E. H. Lieb, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **76**(1973), 360.
- [7] Y. K. Wang, E. T. Hioe, *Phys. Rev.*, **A7**(1973), 831.
- [8] K. Rzazewski, K. Wodkiewicz, W. Zakowicz, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 432.
- [9] R. Gilmore, C. M. Bowden, *Phys. Rev.*, **A13**(1976), 1898.
- [10] S. Carusotto, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 1848.
- [11] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics* (Plenum, New York, 1981), p. 168.
- [12] W. S. Liu, P. Tombesi, *Quantum Opt.*, **3**(1991), 93.
- [13] W. S. Liu, P. Tombesi, *Quantum Opt.*, **4**(1992), 229.
- [14] R. London, P. Knight, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 709.
- [15] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics (Part 1)* (Pergamon, Oxford, 1986), p. 446.

THERMODYNAMICS OF A SUPERRADIANCE WITH A CLUSTER EXPANSION

LIU WEN-SEN¹⁾ LI XIU-PING¹⁾ ZHANG YUN-BO¹⁾²⁾ LIANG JIU-QING¹⁾²⁾

1)(*Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006*)

2)(*Institute of Physics, Center for Condensed Matter Physics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

(Received 27 June 1997)

ABSTRACT

N-atom single-mode radiation field interaction system is regarded as an interacting quasi-boson-photon system and is treated as a grand canonical ensemble. The explicit expression for the thermodynamical potential of the system is obtained using cluster expansion method. Some thermodynamic quantities are derived in terms of the general thermodynamic formulas. The numerical calculation and diagrams exhibit the thermodynamic behavior of the system. The singularities appearing in the critical line and other places furnish evidences of existence of the second kind of phase transformation in this collective system.

PACC: 0500; 3500; 0540