

岩板顺层斜坡和直坡演化过程中的 随机共振及混沌^{*}

李静辉¹⁾²⁾ 黄祖洽²⁾

1)(南京大学物理系, 南京 210093)

2)(北京师范大学低能核物理研究所, 北京 100875)

王存玉

(中国科学院地质研究所, 北京 100029)

(1997 年 7 月 3 日收到)

对岩板顺层倾斜边坡和直立边坡变形弯曲的演化过程进行了研究. 发现岩板顺层斜坡和直坡在其演化过程中有随机共振和混沌现象. 当随机共振发生时, 即使较小的随机因素也可引起坡体较大的变形弯曲. 随机混沌是由于环境因素的周期性变化, 特别是每天和每年的周期性变化所致, 混沌的出现使得对滑坡的预测和预报变得较为困难.

PACC: 0540; 0545

1 引 言

过去人们认为只要顺层坡体的坡脚不被切断, 就不会发生滑动. 近年来, 我国一些山区已见到大量顺层坡体坡脚并未切断而发生了大型滑坡, 如长江鸡筏子滑坡、雅砻江霸王山滑坡等等. 这类滑坡多为板裂介质岩体边坡变形和破坏所致, 大体可分为三种类型, 即顺层倾斜边坡(斜坡)变形破坏、顺层直立边坡(直坡)变形破坏和顺层反倾向边坡倾倒变形破坏. 本文将分析顺层斜坡和直坡变形弯曲的演化过程. 通过研究, 发现顺层斜坡和直坡在其演化过程中存在着随机共振和混沌现象.

2 势能增加

顺层斜坡和直坡在上部岩体推力和岩体自重的作用下, 中间部分会产生弯曲, 如图 1、图 2 所示. 其变形曲线可由方程^[1]

$$y = \frac{1}{2} X \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

来表示,其中 X 是岩板在 $x = l/2$ 处的变形.下面我们将用梁柱作用模型来研究顺层斜坡和直坡的变形弯曲.这一模型在文献[1—3]研究顺层斜坡的稳定性问题时用到过.我们把岩板的长度、弹性模量、重力负载的分布密度和转动惯量分别取为 l , E , q 和 I (在此各量皆取无量纲形式).



图1 岩板顺层斜坡的变形弯曲 (a)为向上弯曲;(b)为向下弯曲

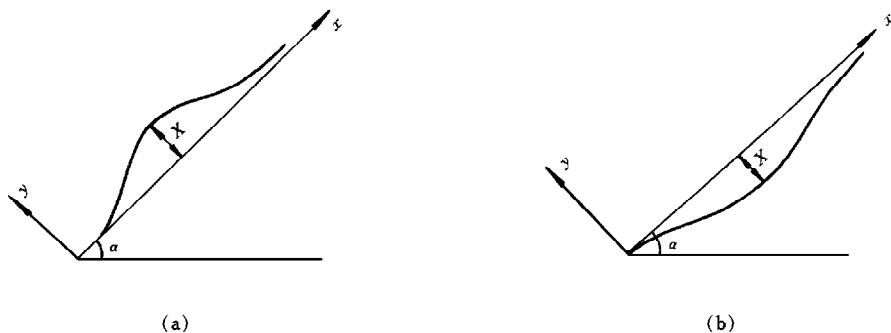


图2 对图1情形的简化

由梁柱弹性理论,岩板由于变形弯曲而增加的弹性势能为

$$\Delta U_1 = \int M(E, I, \phi) d\phi, \quad (2)$$

其中 $M(E, I, \phi)$ 为梁柱上某点由弯曲所引起的单位曲线弧度上的力矩. $d\phi$ 又可表示为

$$d\phi = \frac{ds}{r} \approx (y'')^2 [1 + (y')^2]^{-3/2} dx, \quad (3)$$

其中 ds 是弧度为 $d\phi$ 的曲线段所对应的曲线线段长度, r 为该处曲线的曲率半径.把方程(3)代入方程(2)可得

$$\Delta U_1 \approx \int_0^l M(E, I, \phi) \frac{(y'')^2}{(1 + y'^2)^{3/2}} dx. \quad (4)$$

方程(4)适用的条件是 $l \gg X$.岩板弯曲所引起的重力势能增加为

$$\Delta U_2 \approx \int_0^l q(x) y \cos \alpha dx. \quad (5)$$

在方程(5)中也用到了条件 $l \gg X$. 于是, 我们得到岩板的总势能增加

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \int_0^l M(E, I, \phi) \frac{(y'')^2}{(1 + y'^2)^{3/2}} dx + \int_0^l qy \cos \alpha dx. \quad (6)$$

把方程(1)代入方程(6), 并对方程(6)中的 $\frac{1}{(1 + y')^{3/2}}$ 作泰勒展开可得

$$\Delta U = \left[A(E, I, l) \left(\frac{2\pi^2}{l^2} \right)^2 X^2 - B(E, I, l) \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi^2}{l^2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 X^4 + \dots \right] + c_1 X, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} A(E, I, l) &= \int_0^l M(E, I, x) \left(\cos \frac{2\pi X}{l} \right)^2 dx, \\ B(E, I, l) &= \int_0^l M(E, I, x) \left(\cos \frac{2\pi X}{l} \right)^2 \left(\sin \frac{2\pi X}{l} \right)^2 dx, \\ c_1 &= \cos \alpha \int_0^l q(x) \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) dx. \end{aligned}$$

由于 $l \gg X$, 方程(7)中的展开式可以只取前两项. 于是, 方程(7)变为

$$\Delta U = b_1 X^2 - a_1 X^4 + c_1 X, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 &= A(E, I, l) \left(\frac{2\pi^2}{l^2} \right)^2, \\ a_1 &= B(E, I, l) \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi^2}{l^2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2. \end{aligned}$$

3 模型的引入

在梁柱作用模型中, 我们曾取条件 $l \gg X$. 在该条件下可以把作用到岩板上的合力近似为只作用于 $x = l/2$ 处的力 F . 由(8)式可以得到

$$F = - \frac{\partial \Delta U}{\partial X} = 4a_1 X^3 - 2b_1 X - c_1. \quad (9)$$

对纯粹的梁柱模型而言, 应当有 $F = M_c \ddot{X}_c$ (其中 M_c 为梁柱的总质量, $\ddot{X}_c$ 为质心处的加速度, 此处可以把它近似取为 $\ddot{X}$). 对于所研究的岩板顺层坡体, 还应当把坡体演化过程中的阻尼因素(天然的或人为的)、小范围内的断裂破坏及其他一些因素考虑进去. 这样得到坡体演化的运动方程

$$F = M\ddot{X} + \beta_1 \dot{X} + \beta_2 (\dot{X})^2 + \dots, \quad (10)$$

这里把阻尼因素、小范围内的断裂破坏因素等看作只与速度 $\dot{X}$ 有关. 把阻尼因素看作只与 $\dot{X}$ 有关容易理解(如液体中的布朗粒子、空气中的高速运动的物体等都可以作此理

解). 把小范围内的断裂因素看作只与 $\dot{X}$ 有关可以这样理解: 当 $\dot{X}$ 较大时, 岩板的变形拉伸速度(不同质点间的移动速度)也较快, 从而使小范围内的断裂破坏也较多; 当 $\dot{X}$ 较小时, 岩板的变形拉伸速度较慢, 由此而引起的小范围内的断裂破坏也较少. 由于坡体的演化过程可看作一个准静态运动过程, 因而 $\ddot{x} \approx 0$; 另外, 对于岩板顺层斜坡和直坡, 只考虑一种极简单的情况, 即力 F 的大小只与 $\dot{X}$ 的一次项有关(而把 $\dot{X}$ 的高次非线性项忽略掉). 于是, 得到顺层斜坡和直坡演化过程的运动方程为

$$\dot{X} = \frac{4a_1}{\beta_1} X^3 - \frac{2b_1}{\beta_1} X - \frac{c_1}{\beta_1} \quad (11)$$

把每年四季及每天的温度、湿度、大气压等的周期性变化考虑进去, 方程(11)就变为

$$\dot{X} = aX^3 - bX - c + A \sin \omega t \quad (12)$$

这里我们把外部环境输入系统的周期性信号(周期力)近似取为 $A \sin \omega t$, A 为周期信号的幅度. 在方程(12)中, $a = 4a_1/\beta_1$, $b = 2b_1/\beta_1$ 和 $c = c_1/\beta_1$. 其次, 再把坡体所受到的一些随机因素考虑进去, 最后就得到如下岩板顺层斜坡和直坡的演化方程

$$\dot{X} = aX^3 - bX - c + A \sin \omega t + \xi(t), \quad (13)$$

其中 $\xi(t)$ 是随机力, 把它近似为高斯白噪声, 其均值为零且关联函数为 $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$.

方程(13)就是本文研究顺层岩板斜坡和直坡演化过程简化模型的运动方程.

4 随机共振及混沌

4.1 随机共振

当随机系统有外部周期信号输入时, 若小的输入周期信号可被放大为大的输出信号, 并且可以通过控制噪声的大小(噪声强度)使输出信号达到一个最大值(此时系统的固有频率与输入信号的频率相同), 就称该随机系统发生了随机共振. 发生随机共振的必要条件是: (1) 必须是非线性系统, 且系统的势函数(或有效势函数)有两个或两个以上的势阱; (2) 有周期信号的输入; (3) 系统必须是一个随机系统(可通过控制系统随机力的大小而使系统的固有频率发生变化). 随机共振是随机力诱发扩散效应的结果.

对于方程(13), 在一定的条件下它满足上述发生随机共振的三个必要条件. 因而岩板顺层坡体在一定的条件下其演化过程中有随机共振现象发生. 此时随机力起着放大输出信号的作用. 在一定的条件下, 即使很小的随机力也可对系统的演化起很大的作用. 下面具体分析方程(13).

1) $a < 0$

此时系统的演化为一平稳过程. 定态下(因坡体的演化时间比其弛豫时间要长得多,

因而只考虑定态) X 的平均值为^[4,5]

$$\langle X(t) \rangle_{st} \approx M \sin \omega t, \quad (14)$$

其中下标“st”表示定态.

由势能函数可以分析, 当 $27ac^2 - 4b^3 > 0$ 时, 系统处于双势态; 当 $27ac^2 - 4b^3 \leq 0$ 时, 系统处于单势态. 因而当 $ac^2 - 4b^3 > 0$ 时, 在岩板顺层斜坡和直坡的演化过程中有随机共振出现. 图 3 在 $a = -1, b = -1, c = 0$ 和 $A = 0.2$ 的条件下, 对不同 ω (分别取 0.01, 0.1 和 1) 画出了 $\eta = 4(M/A)^2$ 随噪声强度 D 的变化曲线. 由图 3 可以看到曲线有明显的共振峰出现 (即发生了随机共振). 另外, 由图 3 还可以得出一些有价值的结论: (1) 当噪声强度不在共振峰及其附近时, 噪声对岩板变形弯曲的影响也较小, 此时坡体系统可能要以方程 (14) 的形式周期性演化下去 (由于没有足够大的断裂破坏, 坡体不会发生大规模滑坡). (2) 当噪声强度在共振峰及其附近时, 会发生“共振现象” (坡体的固有频率与周期信号的频率相同或相近), 噪声对岩板变形弯曲的影响很大, 此时可能发生大规模的坡体滑动

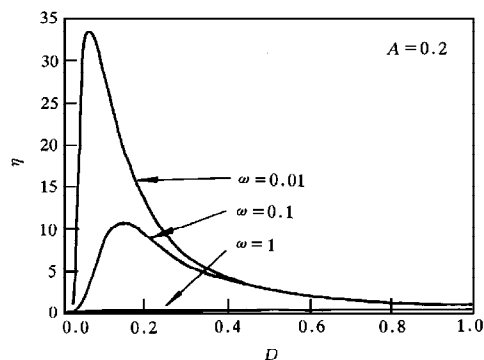


图 3 岩板顺层坡体的随机共振曲线

(由于大的变形弯曲可能引起足够大的断裂破坏). 可见, 由于随机共振的出现, 随机因素也可引起坡体的大规模滑动. 当 $27ac^2 - 4b^3 \leq 0$ 时, 无随机共振出现, 噪声对坡体演化的影响很微弱, 坡体可能要以方程 (14) 的形式周期性演化下去.

2) $a > 0$

当 $a > 0$ 时, 系统的演化为一非平衡过程. 若略去随机力和周期力对系统的影响, 岩板的演化方程为

$$\dot{X} = aX^3 - bX - c. \quad (15)$$

当 $27ac^2 - 4b^3 < 0$ 时, 势能函数有一个极小值和两个极大值, 即系统有一个稳定态和两个亚稳态. 为说明问题方便, 把两个亚稳态点取为 X_1 和 X_2 , 稳态点取为 X_0 , 且 $X_1 < X_0 < X_2$. 显然, 当 $X_1 < X < X_2$ 时坡体一般不会发生大规模滑动; 而当 $X \leq X_1$ 和 $X \geq X_2$ 时坡体才会发生大规模滑动. 当 $27ac^2 - 4b^3 \geq 0$ 时, 系统的势能函数只有一个极大值, 即系统只有一个亚稳态. 此时坡体会发生大规模滑动.

4.2 随机混沌

混沌是非线性系统的特性之一, 它的基本特点是“对初始条件的极度敏感性”, 即一个很小的初始变化总可以引起很大的响应结果, 这种响应结果有着明显的不确定性. 随机混沌是指随机系统中所发生的混沌现象. 通过对方程 (13) 的进一步研究, 发现在岩板顺层斜

坡和直坡的演化过程中有随机混沌出现.

随机微分方程(13)的 Fokker-Planck 方程为^[6]

$$\begin{aligned}\partial_t p(X, t) &= -\partial_X(-U'(X) + F(t))p(X, t) + D\partial^2 p(X, t) \\ &= \hat{L}(X, T)p(X, t),\end{aligned}\quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{L}(X, t) &= -\partial_X + D\partial^2, \\ U(t) &= -\frac{a}{4}X^4 + \frac{b}{2}X^2 + cX, \\ F(t) &= A \sin \omega t.\end{aligned}$$

令

$$p(X, t) = \Psi(X, t) \exp[(-U(X, t) + XF(t))/(2D)]. \quad (17)$$

把方程(17)代入方程(16)可得

$$-2D\partial_t \Psi(X, t) = \hat{H}(X, t)\Psi(X, t), \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{H}(X, t) &= \hat{H}_0(X) + V(X, t), \\ \hat{H}_0(X) &= -2D^2\partial_X^2 + D(3aX^2 - b) + \frac{1}{2}(-aX^3 + bX + c)^2, \\ V(X, t) &= A(aX^3 - bX - c)\sin \omega t + \frac{1}{2}A^2(\sin \omega t)^2 + A\omega X \cos \omega t.\end{aligned}$$

方程(18)和 Schrödinger 方程相类似, 把它称为 Schrödinger-like 方程. 引入广义动量 $\hat{p} = 2Di\partial_x$, 这里 $i = \sqrt{-1}$. 于是, 可以得到 Hamilton 量

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(x, t), \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}V(x, t) &= D(3aX^2 - b) + \frac{1}{2}(-aX^3 + bX + C)^2 + A(aX^3 - bX - c)\sin \omega t \\ &\quad + \frac{1}{2}A^2(\sin \omega t)^2 + A\omega X \cos \omega t.\end{aligned}$$

方程(18)的解为

$$\Psi(X, t) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(X, t) \exp(\lambda_{\alpha} t), \quad (20)$$

其中 $\phi_{\alpha}(X, t)$ 和 λ_{α} 满足方程

$$g\lambda_{\alpha}\phi_{\alpha}(X, t) = \left[\hat{H}_0(X) + V(X, t) + 2D\frac{\partial}{\partial t} \right] \phi_{\alpha}(X, t). \quad (21)$$

$\phi_{\alpha}(X, t)$ 和 λ_{α} 可用有限元法^[7]由方程(21)求出.

图 4 是在 $a = -1$, $b = -1$ 和 $c = 0$ 下, 对不同的信号强度 (A 分别取 0, 0.05 和 0.10)

在经典相空间中的“strobe”相图($D=0.04$ 和 $\omega=0.1$). 图 5 是在 $a=-1$, $b=-1$, $c=0$, $D=0.2$, $\omega=0.1$ 下, A 分别取 0.1 和 0.2 的“strobe”相图. 由相图可以发现, 随着周期信号的增强(幅度的增大), 会出现混沌现象(此时为随机混沌).

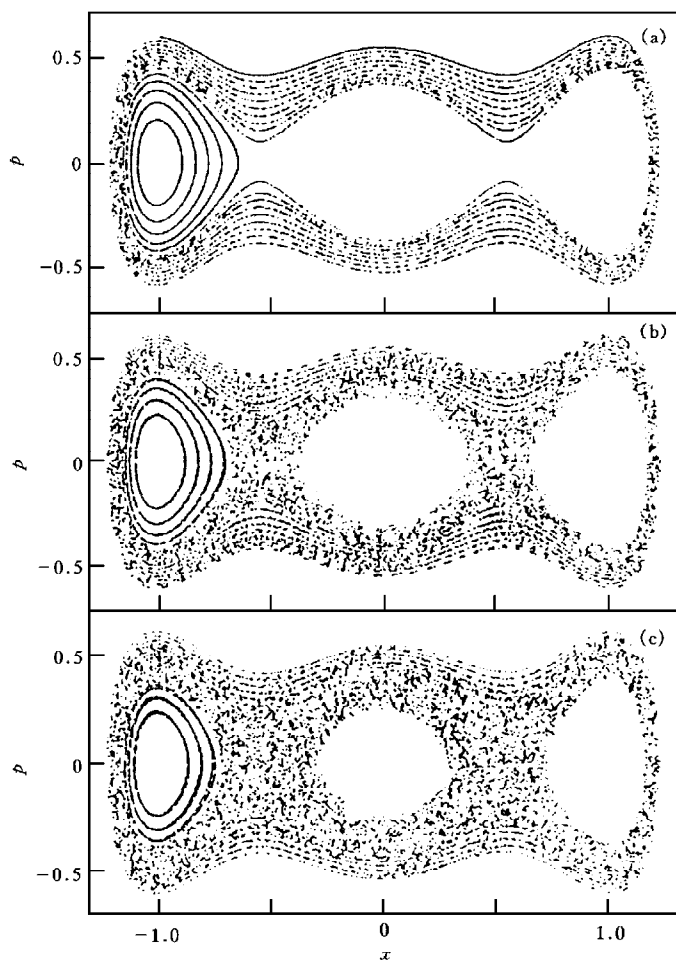


图 4 经典“strobe”相图 (a)为 $A=0$, (b)为 $A=0.05$, (c)为 $A=0.10$

对岩板顺层斜坡和直坡而言, 随着环境的周期性变化(每天或每年的温度、湿度及大气压的周期性变化)的增强, 坡体的演化过程就会变得越来越具有混沌的特性. 一般而言, 由于我国北方的气候比较恶劣, 即环境的周期性变化大, 北方的岩板顺层斜坡和直坡的演化更具有混沌性. 由于南方的气候变化比较小, 使得南方地区的岩板顺层斜坡和直坡的演化表现出较弱的混沌性. 我们知道, 混沌的出现使得对系统未来的状态有不可预测性. 从这个角度分析, 对气候恶劣地区的岩板顺层斜坡和直坡的滑坡预报比较困难; 对气候变化不太大的地区的岩板顺层斜坡和直坡滑坡预报就较为容易.

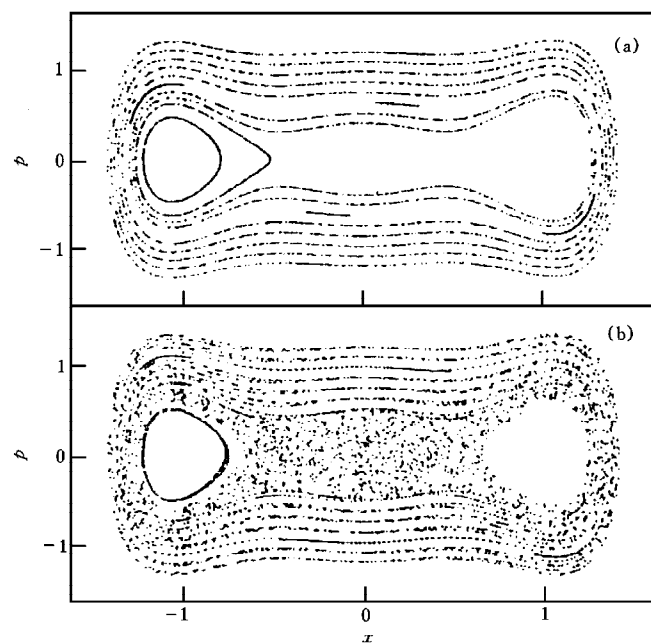


图5 经典“strobe”相图 (a)为 $A=0.1$, (b)为 $A=0.2$

- [1] 孙广忠, 岩体结构力学(科学出版社, 北京, 1988), 第 339—362 页.
- [2] 李 强、张倬元, 成都地质学院学报, **17**(1990), 3.
- [3] 秦四清、张倬元、王士天, 中国地质灾害与防治学报, **4**(1993), 38.
- [4] Hu Gang, G. Nicolis, C. Nicolis, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 2030.
- [5] P. Jung, P. Hänggi, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 8032.
- [6] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer-Verlag, Berlin Heideberg, New York, Tokyo, 1984), pp. 63—125.
- [7] M. Mori, *The Finite Element Method and Applications* (MacMillan, London, 1983), pp. 82—110.

THE STOCHASTIC RESONANCE AND CHAOS IN THE EVOLUTION OF THE CONSEQUENT ROCK BLOCK SLOPE (INCLINED AND VERTICAL)

LI JING-HUI¹⁾²⁾ HUANG ZU-QIA²⁾

1)(*Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093*)

2)(*Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875*)

WANG CUN-YU

(*Institute of Geology, Academia Sinica, Beijing 100029*)

(Received 3 July 1997)

ABSTRACT

The paper studies the evolution of the consequent rock block slope (inclined and vertical). We find that there exist stochastic resonance and chaos in the process of evolution. When stochastic resonance happens, any weaker stochastic factors can cause large deformation and crook for the slope. The stochastic chaos is induced by the periodical change of the environment, so the forecast of landslide is more difficult to make.

PACC: 0540; 0545