

混沌 Lorenz 系统的控制研究

余建祖 苏楠

(北京航空航天大学飞行器设计及应用力学系, 北京 100083)

T. L. Vincent

(美国亚利桑那大学航空航天及机械工程系, 图桑 AZ85721)

(1997 年 4 月 23 日收到; 1997 年 7 月 23 日收到修改稿)

研究了利用非线性控制理论控制混沌 Lorenz 系统的方法. 通过施加 bang-bang 控制, 可以把 Lorenz 系统的混沌运动转化成包含有短期和间断混沌态的多种不同形式的运动. 特别是运用控制手段, 可消除初始状态对运动不确定性的影响, 使混沌运动转化并最终精确地维持在希望的平衡状态.

PACC: 0545; 4265

1 引言

混沌现象广泛存在于现实世界中. 在过去 20 年中混沌是一项热门的研究课题, 研究人员揭示出了混沌隐藏在表面无规律性后面的“秩序”, 并进一步发现许多混沌系统对模拟现实世界一些不可预见现象非常有用. 由 Lorenz 方程描述的系统就是这样的一个混沌系统. 但是混沌在许多情况下是不利因素, 人们总是期望能够找到一些方法来控制混沌, 例如利用某种方法实现对混沌系统(或吸引子)中所期望的不稳定周期态的稳定控制或使其保持在某个希望的平衡状态, 这样就可以使混沌系统变为多用途系统. 本文运用非线性控制理论, 构造一个非线性控制器, 实现了对 Lorenz 系统的混沌控制.

2 Lorenz 方程

1963 年 Lorenz^[1]提出了著名的 Lorenz 方程

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sigma x_1 + \sigma x_2, \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1 x_3, \quad (2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - bx_3. \quad (3)$$

Lorenz 的初衷是想探求一个常微分方程组, 以模拟某些与天气有关的变化过程. 他最终使用的方程(1)–(3)是从一个对流模型得出的: 一个两维的流体室, 底部加热, 顶部冷却, 从而产生对流. 式中 x_1 正比于对流运动的强度, x_2 正比于水平方向温度变化, x_3 正

比于垂直方向温度变化; σ , r 和 b 则分别为与 Prandtl 数、Rayleigh 数及容器大小有关的正参数.

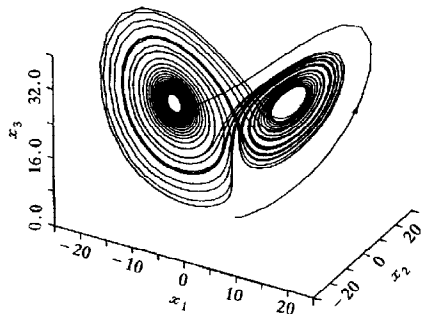


图 1 Lorenz 系统在状态空间产生的轨迹
起始点为 $x = (0, 1, 0)$

对各参数在一个宽的范围内取值并在计算机上对 Lorenz 方程求解, 其结果看上去特别复杂. 图 1 表示当 $\sigma = 10$, $b = 8/3$ 及 $r = 28$ 时方程 (1)–(3) 在三维状态空间的轨迹. 随着过程的演化, 该轨迹为 Lorenz 系统确定了一个“奇怪吸引子”, 基于奇怪吸引子的运动描绘出复杂的“湍流”特性.

由于明显的湍流特性可以用确定的微分方程 (1)–(3) 描述, 因此自 1963 年以来许多学者都研究 Lorenz 方程. Haken 等十余位作者先后在天气、对流、斜波等现象及水轮机、发电机、激光器真实物理系统发现, Lorenz 方程可以作为许多现实混沌运动的精确模型^[2–11].

鉴于 Lorenz 方程广泛的适用性, 我们选择 Lorenz 方程作为研究混沌系统控制的起点. 在方程 (2) 的右边增加一个控制输入 u , 于是得到一个受控的 Lorenz 系统

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sigma x_1 + \sigma x_2, \quad (4)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1 x_3 + u, \quad (5)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - bx_3. \quad (6)$$

3 Lorenz 系统的稳定性分析

用 Lyapunov 第一方法(间接法)进行无控制的 Lorenz 系统 (1)–(3) 的稳定性分析. 此法通过考查在平衡点邻域内线性化运动方程可得该局部稳定性.

由方程 (1)–(3), 可立即获得平衡点 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$. 当 $r > 1$ 时, 方程 (1)–(3) 还有另外两个稳态解 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \pm [b(r-1)]^{1/2}$, $\bar{x}_3 = (r-1)$, 我们分别用 C_1 和 C_2 来表示这两个平衡点. 按文献 [1], 我们令 $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, 那么稳定对流状态由点 $C_1 = (8.4853, 8.4853, 27)$ 和 $C_2 = (-8.4853, -8.4853, 27)$ 代表, 而无对流状态对应于原点 $(0, 0, 0)$. 注意 Lorenz 方程 (1)–(3) 具有对称性: 用 $(-x_1, -x_2, x_3)$ 代替 (x_1, x_2, x_3) , 可得到相同方程.

假定一稳定对流状态是对应某一个有意义的点(例如 C_1). 我们进行控制研究将只考虑 C_1 , 因为对 C_2 的相应研究结果容易根据对称性导出. 为研究在 C_1 邻域的系统特性, 首先利用状态扰动方程将方程 (1)–(3) 在 C_1 点线性化,

$$\frac{dz_1}{dt} = -\sigma z_1 + \sigma z_2, \quad (7)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = z_1 - z_2 - \sqrt{b(r-1)} z_3, \quad (8)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = \sqrt{b(r-1)} z_1 + \sqrt{b(r-1)} z_2 - bz_3, \quad (9)$$

式中

$$z_1 = x_1 - \sqrt{b(r-1)}, \quad (10)$$

$$z_2 = x_2 - \sqrt{b(r-1)}, \quad (11)$$

$$z_3 = x_3 - (r-1) \quad (12)$$

代表相对平衡点 C_1 的微小变化. 系统(7)–(9)的特征方程为

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0. \quad (13)$$

在取 $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$ 的情况下, 可求得根为

$$\lambda_1 = -13.85457, \quad (14)$$

$$\lambda_2 = 0.09395 + 10.1945j, \quad (15)$$

$$\lambda_3 = 0.09395 - 10.1945j. \quad (16)$$

因此平衡点 C_1 是不稳定的. 依此类推, 原点和 C_2 两个平衡点也是不稳定的.

4 bang-bang 控制作用下的 Lorenz 系统

下面将探索用非线性控制技术稳定 Lorenz 系统(4)–(6)的可能性. 我们将利用可控性最小值原理来做这一工作.

可控性最小值原理 如果 $u(x) \in U$ 是一个可容许控制律, 它产生一个轨线 $x(t)$ 满足

$$\frac{dx}{dt} = f[x, u(x)]. \quad (17)$$

对于时间间隔 $0 \leq t \leq t_f$, $x(t)$ 在到规定目标的可控集范围内, 那么必然存在一个非零 N 维矢量 $\lambda(t)$, 对所有 $t \in [0, t_f]$ 有

$$H[x(t), u[x(t)], \lambda(t)] \leq H[x(t), u, \lambda(t)] = 0, \quad (18)$$

对所有 $u \in U$, $\lambda(t)$ 满足伴随方程

$$\left[\frac{d\lambda}{dt} \right]^T = - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (19)$$

式中函数 H 由下式定义,

$$H(x, u, \lambda) \equiv \lambda^T f(x, u). \quad (20)$$

这个原理更完整的讨论和证明见文献[12, 13].

我们利用可控性最小值原理去确定一个控制以驾驭系统到目标 C_1 . 对受控的 Lorenz 系统(4)–(6), H 函数为

$$H = \lambda_1(-\sigma x_1 + \sigma x_2) + \lambda_2(rx_1 - x_2 - x_1 x_3 + u) + \lambda_3(x_1 x_2 - bx_3). \quad (21)$$

伴随方程(19) 具有简单的形式

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_1} = \sigma \lambda_1 - (r - x_3)\lambda_2 - x_2 \lambda_3, \quad (22)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\sigma\lambda_1 + \lambda_2 - x_1\lambda_3, \quad (23)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = x_1\lambda_2 + b\lambda_3. \quad (24)$$

注意 u 在 H 中呈线性, H 可改写为

$$H = \lambda_1(-\sigma x_1 + \sigma x_2) + \lambda_2(rx_1 - x_2 - x_1x_3) + \lambda_3(x_1x_2 - bx_3) + \lambda_2 u, \quad (25)$$

因为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_2, \quad (26)$$

所以 u 或者是奇异控制, 或者是 bang-bang 控制. 因篇幅所限, 略去奇异控制对方程(4)–(6)是不可行的证明过程, 这样就只剩下 bang-bang 控制一种可能性. 但我们利用获得奇异控制的条件 $\lambda_2 \equiv 0$ 可导出 bang-bang 控制所需的开关曲面. 由 $\lambda_2 \equiv 0$, 那么 λ_2 所有的时间导数也必然为零. 于是

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\sigma\lambda_1 + \lambda_2 - x_1\lambda_3 = 0. \quad (27)$$

将 $\lambda_2 \equiv 0$ 代入(25), (27)式, 再由 $H=0$ 的要求可得

$$\lambda_1(-\sigma x_1 + \sigma x_2) + \lambda_3(x_1x_2 - bx_3) = 0, \quad (28)$$

$$-\sigma\lambda_1 - x_1\lambda_3 = 0. \quad (29)$$

以上两式当且仅当

$$-x_1(-\sigma x_1 + \sigma x_2) + \sigma(x_1x_2 - bx_3) = 0 \quad (30)$$

时, 对 λ_1 和 λ_3 有非零解.

把 $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$ 代入(30)式得

$$x_1^2 - \frac{8}{3}x_3 = 0. \quad (31)$$

这个方程定义了状态空间的一个奇异表面, 在排除了奇异控制可能性的前提下, 该奇异表面即是 bang-bang 控制的开关曲面. 利用这个曲面写出欲施加的 bang-bang 控制如下:

$$u = -K \operatorname{sgn}\left(x_1^2 - \frac{8}{3}x_3\right). \quad (32)$$

图 2 是当 $K=10$ 时, 系统(4)–(6)在控制(32)式作用下的运动过程. 图中轨迹是先环绕错误平衡点运动两周, 然后进入正确平衡点的轨道, 并沿着一条螺旋轨道渐近稳定到 $C_1=(8.4852, 8.4852, 27)$.

在达到被指定的平衡点 C_1 后, 根据 Lyapunov 指数 σ 的计算公式

$$\sigma_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta x_i(x_0, t)|}{|\delta x(x_0, 0)|} \quad (33)$$

所求得的 Lyapunov 指数谱约为 $(-0.6475, -0.4642, -0.5390)$, 即对整个系统的 Lyapunov 指数为负值, 这也证明系统实现了稳定控制.

图 2 是许多被考查的起始点所得轨迹中的一个典型图象. 从有的起始点出发, 轨迹很快收敛到 C_1 , 其运动形式类似于通常意义上的某些确定运动; 而从另一些起始点出发, 则

须经历长、短时间不等的混沌暂态之后才能稳定到该平衡点.

由于原 Lorenz 系统基于混沌吸引子在平衡点 C_1 邻域内轨迹运动的特性, 上述控制律有可能只在该点的邻域起作用, 特别是如果仅在下式定义的区域施加(32)式的控制,

$$(x_1 - 8.4852)^2 + (x_2 - 8.4852)^2 + (x_3 - 27)^2 \leq R^2. \quad (34)$$

在半径为 R 的球之外, $u=0$. 如图 3 所示, 此时控制系统到平衡点仍是可能的. 图 3 为 $R=5$ 的情形, 为清晰起见, 图中只画出了经历一个长时间混沌暂态的后期运动图象. 图 3 所示现象称之为“预湍流”或“亚稳定混沌”^[11]. 基于吸引子的混沌运动的特性, 系统最终将被驾驭到如(34)式定义的球内. 由于控制器能够驾驭系统从该球内任一点到平衡点, 由控制器产生的混沌暂态就消除了初始条件的影响, 因此从状态空间的任何一点出发系统最终都将是稳定的. 但在系统进入球之前, 其运动仍是真正混沌态的并具有无控制 Lorenz 系统相同的 Lyapunov 指数.

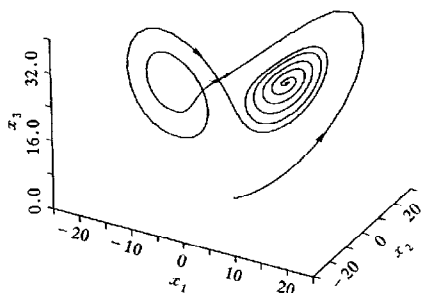


图 2 bang-bang 控制作用下的 Lorenz 系统 起始点为 $x = (0, 1, 0)$

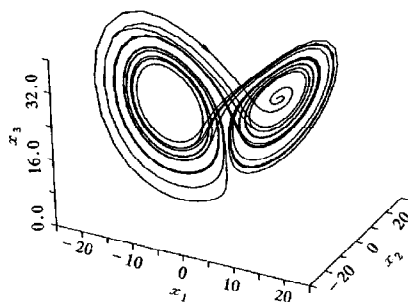


图 3 有约束条件的 bang-bang 控制作用下的 Lorenz 系统 起始点为 $x = (-20, -20, 30)$

通过改变方程(1)–(3)中参数的方法也能使 Lorenz 系统产生如图 2 和图 3 类似的轨迹. 例如 Sparrow^[10]将 r 值由 28 变化到 22.4, 并取起始点为 $(-10, -10, 30)$, 得到如图 4 所示轨迹. 在这种情况下, 初始轨迹也是呈现混沌态, 但经过一段充分长时间, 轨迹沿着一个非常致密的螺旋轨道逐渐演变到平衡点. 但此平衡点并不是我们希望的 $C_1 = (8.4852, 8.4852, 27)$, 而是 $C_1 = (7.5542, 7.5542, 21.4)$; 当 Sparrow 将起始点改变到 $(-12, -12, 30)$ 时, 系统却渐

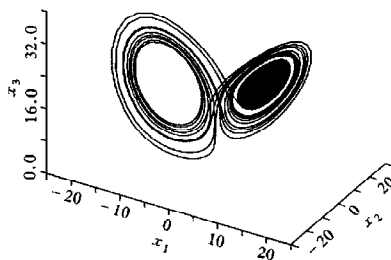


图 4 无控制的 Lorenz 系统 ($\sigma=10, b=8/3, r=22.4$) 起始点为 $x = (-10, -10, 30)$

近稳定到 $C_1 = (-7.5542, -7.5542, 21.4)$; 当 Sparrow 把 r 减小到 14 并仍从图 4 的起始点 $(-10, -10, 30)$ 出发时, 系统却很快终止在 $C_1 = (5.8878, 5.8878, 13)$. 总之, 通过改变参数的方法, Lorenz 系统虽然最后都终止在某一平衡点, 但系统的最终平衡状态依然是不确定的. 但在 bang-bang 控制(32)式作用下, 即使将 K 减至 1, 计算机模拟结果显示, 不论从状态空间任何一点出发, 系统轨迹最终都能稳定到 $C_1 = (8.4852, 8.4852, 27)$, 但在

某些初始条件下, 花费在混沌暂态的时间可能会相当长.

5 结 论

本文利用现代非线性控制理论, 较好地实现了对 Lorenz 系统的控制. 通过施加适当的 bang-bang 控制, 可以把 Lorenz 系统的混沌运动转化成可能包含有短期或间断混沌态的稳定运动. 其最有意义的地方在于: 运用较弱的 bang-bang 控制也能将 Lorenz 系统对初始条件的敏感性控制在某一短暂的时间范围内, 即只在一段时间内系统进行混沌运动, 随后系统运动将转化并精确维持在希望的平衡状态. 即运用控制手段, 能消除初始状态对运动不确定性的影响, 使混沌系统的运动最终按照人们的意愿发展. 这一点无疑具有重要的实用价值.

- [1] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20**(1963), 130.
- [2] H. Haken, *Phys. Lett.*, **53A**(1975) 77.
- [3] J. Brindley, I. M. Motoz, *Phys. Lett.*, **A77**(1980), 130.
- [4] J. D. Gibbon, M. J. McGuinness, *Phys. Lett.*, **A77**(1980), 295.
- [5] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, *Commun. Math. Phys.*, **67**(1979), 93.
- [6] E. Knobloch, *Phys. Lett.*, **A82**(1981), 439.
- [7] M. V. R. Malkus, *Mémoires Société Royale des Sciences de Liège*, **6**(1972), 125.
- [8] J. Pedlosky, *J. Atmos. Sci.*, **29**(1972), 53.
- [9] J. Pedlosky, C. Frenzen, *J. Atmos. Sci.*, **27**(1980), 1177.
- [10] C. Sparrow, *Appl. Math. Sci.*, **41**(1982).
- [11] E. D. Yorke, J. A. Yorke, *J. Stat. Phys.*, **21**(1979), 263.
- [12] W. J. Grantham, T. L. Vincent, *J. Optimization Theory and Applications*, **17**(1975), 93.
- [13] 高为炳, 非线性控制系统导论(科学出版社, 北京, 1988), 第 291—374 页.

STUDY ON CONTROL OF CHAOTIC LORENZ SYSTEM

YU JIAN-ZU SU NAN

(Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

T. L. VINCENT

(Department of Aerospace and Mechanical Engineering, The University of Arizona, Tucson AZ85721, USA)

(Received 23 April 1997; revised manuscript received 23 July 1997)

ABSTRACT

This paper investigates the methods for controlling chaos in the Lorenz system with nonlinear control theory. Applying a bang-bang control, we are able to transform the chaotic motion of the Lorenz system to stable motion which may contain apparent short-(or intermediate-) term chaotic motion. In particular, using the control method, we can eliminate the effect of initial conditions on the indeterminateness of the motion and drive the chaotic system to a specified equilibrium state.

PACC: 0545; 4265