

光的两种模式间的一种非经典性质的转移^{*}

符 建 高孝纯 许晶波 邹旭波

(浙江大学浙江近代物理中心和浙江大学物理系, 杭州 310027)

(1997 年 9 月 11 日收到)

利用与不变量有关的么正变换方法并利用数值计算, 研究了光的两种模式间的一种非经典性质的转移问题: Fock 态(为非经典态)与相干态的相互转换问题.

PACC: 4250; 0365; 4210; 4220

1 引 言

光的非经典性质主要指亚泊松统计、压缩及反聚束等性质. 1987 和 1990 年先后用激光器与微波激射器产生了相应频段的亚泊松辐射. 人们预期非经典光将会在光通讯等众多方面得到应用, 这使非经典光的研究日益受到重视^[1]. 空腔中的电磁场量子化后, 如无模间耦合, 则其中量子辐射场的研究一般就归结为单模的研究或一个含时谐振子的研究; 而如果其中有两种模式发生耦合, 一般就归结为两个含时耦合谐振子的研究^[2]. 一些人认为单光子激光器基本上是经典器件而双光子激光器则是非经典的器件^[3]. 双光子激光器中两种光的模式发生耦合, 这使得研究两种模式的耦合(等价于两个含时谐振子的耦合)及相关的非经典性质的产生和转移具有重要的实际意义. 过去大量工作都是研究单模问题的, 近年来才有少量工作研究双模耦合及非经典性质的转移问题^[2]. 本文用我们最近研究含时量子场论的工作中提出的与不变量有关的么正变换方法^[4], 并利用数值计算来研究光的两种模式间的一种非经典性质的转移问题: Fock 态(为非经典态)与相干态的相互转换问题. 研究结果表明采用适当的哈密顿, 一种模式可从相干态转换为 Fock 态, 与此同时另一种模式则从 Fock 态转换为相干态.

2 与不变量有关的么正变换及含时耦合谐振子

Lewis 和 Riesenfeld^[5,6]提出的量子不变量理论是研究含时量子系统的有力工具. 近年来, 我们推广了这一理论并用于研究含时系统的几何相因子^[7], 并引入了一种与不变量有关的么正变换方法, 研究与宇宙演化有关的含时量子场论问题^[4]. 本节中, 先简要介绍一下与不变量有关的么正变换方法, 然后用此方法研究含时耦合谐振子.

若含时系统的哈密顿为 $\hat{H}(t)$, 则此系统的不变量 $\hat{I}(t)$ 满足如下方程:

^{*} 国家自然科学基金(No. 19775040)、高等学校博士学科点专项科研基金和浙江省自然科学基金资助的课题.

$$\partial \hat{I}(t)/\partial t - i[\hat{I}(t), \hat{H}(t)]/\hbar = 0. \quad (1)$$

$\hat{I}(t)$ 的本征值方程为

$$\hat{I}(t)|\lambda_n, t\rangle = \lambda_n|\lambda_n, t\rangle \quad \partial \lambda_n/\partial t = 0, \quad (2)$$

描写系统状态的波矢满足含时 Schrödinger 方程

$$i\hbar \partial |\Psi(t)\rangle_S / \partial t = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle_S. \quad (3)$$

按 Lewis-Riesenfeld 不变量理论, 方程(3)的特解 $|\lambda_n, t\rangle_S$ 与 $\hat{I}(t)$ 的本征态 $|\lambda_n, t\rangle$ 仅相差一个相因子 $\exp[i\gamma_n(t)]$. 于是方程(3)的通解可写为

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_n C_n \exp[i\gamma_n(t)] |\lambda_n, t\rangle, \quad (4)$$

$$\gamma_n(t) = \int_0^t \langle \lambda_n, t' | i\partial/\partial t' - \hat{H}(t')/\hbar | \lambda_n, t' \rangle dt',$$

$$C_n = \langle \lambda_n, 0 | \Psi(0) \rangle_S.$$

在 Lewis-Riesenfeld 不变量理论的基础上, 我们提出了与不变量有关的么正变换方法^[4].

在某些物理上感兴趣的情形中, 对一个选定的不变量 $\hat{I}(t)$, 有可能找到一个依赖于时间的么正变换 $\hat{V}(t)$, 使得 $\hat{I}_V = \hat{V}^\dagger(t) \hat{I}(t) \hat{V}(t)$ 不依赖于时间. $\hat{I}_V$ 的本征值方程为

$$\hat{I}_V |\lambda_n\rangle = \lambda_n |\lambda_n\rangle, \quad |\lambda_n\rangle = \hat{V}^{-1} |\lambda_n, t\rangle. \quad (5)$$

这里本征值 λ_n 与(2)式中相同. 在这个么正变换下, $\hat{H}(t)$ 变为 $\hat{H}_V(t)$,

$$\hat{H}_V(t) = \hat{V}^\dagger(t) \hat{H}(t) \hat{V}(t) - i\hbar \hat{V}^\dagger(t) \partial \hat{V}(t) / \partial t. \quad (6)$$

不难证明此么正变换保证: 与 $\hat{H}_V(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程的特解 $|\lambda_n, t\rangle_{SV}$ 与 $\hat{I}_V$ 的本征态 $|\lambda_n\rangle$ 亦仅仅相差一个(4)式中定义相因子 $\exp[i\gamma_n(t)]$, 即

$$|\lambda_n, t\rangle_{SV} = \exp[i\gamma_n(t)] |\lambda_n\rangle. \quad (7)$$

将 $|\lambda_n, t\rangle_{SV}$ 代入 $\hat{H}_V(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程

$$i\hbar \partial |\lambda_n, t\rangle_{SV} / \partial t = \hat{H}_V(t) |\lambda_n\rangle, \quad (8)$$

可得

$$-\hbar \dot{\gamma}_n(t) |\lambda_n\rangle = \hat{H}_V(t) |\lambda_n\rangle. \quad (9)$$

这表明 $\hat{H}_V(t)$ 与 $\hat{I}_V$ 仅差一依赖于时间的相乘 c 数. 因此, 只要能找到么正变换 $\hat{V}(t)$, 含时 Schrödinger 方程(3)的求解就转化为较简单的方程(8)的求解. 在解出方程(8)后, 即可得系统含时 Schrödinger 方程(3)的一般解

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_n C_n \exp[i\gamma_n(t)] \hat{V}(t) |\lambda_n\rangle,$$

$$\gamma_n(t) = - \int_0^t \langle \lambda_n | \hat{H}_V(t') | \lambda_n \rangle dt' = \int_0^t \langle \lambda_n, t' | i\partial/\partial t' - \hat{H}(t')/\hbar | \lambda_n, t' \rangle dt'. \quad (10)$$

以上介绍的是与不变量有关的么正变换方法.

下面运用这一方法研究非经典性质的转移问题. Yuan 等^[8]曾经研究并得到了空腔中

双模耦合的有效哈密顿, 此哈密顿具有耦合含时谐振子哈密顿的形式(见本文讨论 3):

$$\hat{H}(t) = \omega_1 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \omega_2 \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \gamma(t) (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}), \quad (11)$$

其中 $\gamma(t)$ 是一含时的耦合系数. 含时 Schrödinger 方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (12)$$

下面来精确求解含时 Schrödinger 方程(12). 定义算符 $\hat{K}_0$, $\hat{K}_+$ 和 $\hat{K}_-$

$$\hat{K}_0 = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad \hat{K}_+ = \hat{a}^\dagger \hat{b}, \quad \hat{K}_- = \hat{b}^\dagger \hat{a}. \quad (13)$$

其对易关系为

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm 2\hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = \hat{K}_0. \quad (14)$$

不难证明 $\hat{K}_0$, $\hat{K}_+$, $\hat{K}_-$ 和 $\hat{H}(t)$ 构成准代数^[9], 由此我们可构造系统的 Lewis-Riesenfeld 不变量^[4-7]:

$$\hat{I}(t) = \cos \theta \cdot \hat{K}_0 - e^{-i\phi} \sin \theta \cdot \hat{K}_+ - e^{-i\phi} \sin \theta \cdot \hat{K}_-. \quad (15)$$

这里 θ, ϕ 是辅助方程

$$\dot{\phi} = 2\gamma(t) \cos \phi \cot \theta + \omega_1 - \omega_2, \quad \dot{\theta} = 2\gamma(t) \sin \phi \quad (16)$$

的实数解. 根据与不变量有关的么正变换方法^[4], 可以构造么正变换 $\hat{V}(t)$

$$\hat{V}(t) = \exp[\sigma \hat{K}_+ - \sigma^* \hat{K}_-]. \quad (17)$$

这里 $\sigma = \frac{\theta}{2} \exp(-i\phi)$, $\sigma^* = \frac{\theta}{2} \exp(i\phi)$. 运用方程(14)和(17), 我们得到

$$\hat{I}_V = \hat{V}^\dagger(t) \hat{I}(t) \hat{V}(t) = \hat{K}_0. \quad (18)$$

同时得到

$$\begin{aligned} \hat{H}_V(t) &= \hat{V}^\dagger(t) \hat{H}(t) \hat{V}(t) - i \hat{V}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} \\ &= \left[\omega_1 \cos^2(\theta/2) + \omega_2 \sin^2(\theta/2) - \gamma(t) \cos \phi \sin \theta - \frac{\dot{\phi}}{2} (1 - \cos \theta) \right] \hat{K}_0. \end{aligned} \quad (19)$$

可见 $\hat{H}_V(t)$ 与 $\hat{I}_V = \hat{K}_0$ 只差一个相乘的含时 c 数. 这样, 就能运用与不变量有关的么正变换方法求得系统的一般解

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{nm} C_{nm} \exp[i\gamma_{nm}(t)] \hat{V}(t) |n\rangle_a |m\rangle_b, \quad (20)$$

其中

$$\gamma_{nm}(t) = [(n+1/2) + (m+1/2)]$$

$$\times \int_0^t \left[\omega_1 \cos^2(\theta/2) + \omega_2 \sin^2(\theta/2) - \gamma(t') \cos \phi \sin \theta - \frac{\dot{\phi}}{2} (1 - \cos \theta) \right] dt', \quad (21)$$

且

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle_a = (n+1/2) |n\rangle_a, \quad \hat{b}^\dagger \hat{b} |m\rangle_b = (m+1/2) |m\rangle_b,$$

$$\hat{K}_0(|n\rangle_a |m\rangle_b) = [(n+1/2) + (m+1/2)](|n\rangle_a |m\rangle_b). \quad (22)$$

在下一节里,我们将利用此解研究两谐振子之间非经典性质的转移.

3 非经典性质的转移

最近有人用文献[8]中的哈密顿研究了压缩性等非经典性质的转移问题^[2].上节从文献[8]中的哈密顿出发,用与不变量有关的么正变换方法,得出了一般解.此解特别适用于研究一种新的非经典性质的转移问题:Fock 态与相干态的相互转换问题.本节将采用一种具体的含时耦合系数 $\gamma(t)$ 的形式,利用数值方法研究这一问题.

在量子光学中,一类低量子噪声的态是数相压缩态^[1],Fock 态是一种具有零光子数起伏的高度压缩的数相压缩态,对 Fock 态,其 Q-Mandel 函数为零,故粒子数分布满足泊松分布,且一般也会呈现反聚束效应^[1].故 Fock 态是一种典型的非经典态.近年来,Brune 等^[10]运用量子非破坏测量(QNDM)成功地制备了 Fock 态,这使 Fock 态的实际应用成为可能,也使本节研究的问题具有实际意义.

为了研究 Fock 态与相干态的相互转换问题,我们选取第一个谐振子在 $t = t_0$ 时的初始态为 Fock 态 $|m\rangle_a$,第二个谐振子在 $t = t_0$ 时的初始态为相干态 $|\alpha\rangle_b$ ^[11,12]

$$|\alpha\rangle_b = e^{-\alpha\alpha^*/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_b, \quad (23)$$

其中 α 是一复数.

于是我们得到含时 Schrödinger 方程(12)的一个特解为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \exp[-i(m+1/2)\chi(t)] \hat{V}(t) |m\rangle_a \\ &\times \sum_n \exp(-\alpha\alpha^*/2) \exp[-i(n+1/2)\chi(t)] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_b, \end{aligned} \quad (24)$$

$$|\Psi(t_0)\rangle = |m\rangle_a \sum_n \exp(-\alpha\alpha^*/2) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_b,$$

其中

$$\chi(t) = \int_0^t \left[\omega_1 \cos^2(\theta/2) + \omega_2 \sin^2(\theta/2) - \gamma(t') \cos\phi \sin\theta - \frac{\dot{\phi}}{2} (1 - \cos\theta) \right] dt'. \quad (25)$$

这里 $|m\rangle_a, |n\rangle_b$ 为(22)式中定义的 Fock 态.

下面进一步证明当辅助方程的解满足一定条件时,谐振子 a 与谐振子 b 的状态将发生交换.由(24)式得到

$$|\Psi(t)\rangle = \left[e^{-i(m+1/2)\chi(t)} \frac{(\hat{V} \hat{a}^\dagger V^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \right] \left[\sum_n e^{-\alpha\alpha^*/2} e^{-i(n+1/2)\chi(t)} \frac{\alpha^n (V \hat{b}^\dagger V^\dagger)^n}{n!} \right] V |0\rangle_a |0\rangle_b, \quad (26)$$

$V(t)$ 作用到 $\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger$ 上分别得到

$$V \hat{a}^\dagger V^\dagger = \cos \frac{\theta}{2} \hat{a}^\dagger - e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \hat{b}^\dagger, \quad V \hat{b}^\dagger V^\dagger = \cos \frac{\theta}{2} \hat{b}^\dagger + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \hat{a}^\dagger. \quad (27)$$

当选择初始条件 $\theta(t=t_0)=0$ 即 $\cos\theta(t_0)/2=1, \sin\theta(t_0)/2=0$ 时, 有 $\hat{V}(t_0)=1$, $\hat{V}(t_0)\hat{a}^+\hat{V}^\dagger(t_0)=\hat{a}^+$, $\hat{V}(t_0)\hat{b}^+\hat{V}^\dagger(t_0)=\hat{b}^+$; 如适当选择相互作用使辅助方程的解在 $t=t_1$ 相互作用结束时满足 $\cos\theta(t_1)/2=0, \sin\theta(t_1)/2=\pm 1$, 此时有 $\hat{V}(t_1)\hat{a}^+\hat{V}^\dagger(t_1)=\mp\hat{b}^+e^{i\phi}$, $\hat{V}(t_1)\hat{b}^+\hat{V}^\dagger(t_1)=\pm\hat{a}^+e^{-i\phi}$, 可以看出, 经 t_0 至 t_1 的演化 a, b 谐振子的产生算符发生了交换. 进一步研究(26)式中 $\hat{V}(t)|0\rangle_a|0\rangle_b$ 随时间变化的情形

$$\begin{aligned} |0, t\rangle_a|0, t\rangle_b &= \hat{V}(t)|0\rangle_a|0\rangle_b \\ &= \left[1 + (\sigma\hat{K}_+ - \sigma^*\hat{K}_-) + \frac{1}{2!}(\sigma\hat{K}_+ - \sigma^*\hat{K}_-)^2 + \dots \right] |0\rangle_a|0\rangle_b \\ &= |0\rangle_a|0\rangle_b, \end{aligned} \quad (28)$$

可见, 它并不随时间变化. 这样从(26)式就得到了, 经 t_0 至 t_1 的演化, 谐振子 a 的 Fock 态与谐振子 b 的相干态发生了转换, 即

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0)\rangle &= |m\rangle_a \sum_n e^{-\alpha\alpha^*/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_b, \\ |\Psi(t_1)\rangle &= (\mp 1)^m e^{im\phi} e^{-i(m+1/2)\chi(t_1)} |m\rangle_b \\ &\quad \times \sum_n (\pm 1)^n e^{in\phi} e^{-i(n+1/2)\chi(t_1)} e^{-\alpha\alpha^*/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_a. \end{aligned} \quad (29)$$

于是证明了要实现两谐振子状态的转换, 只需选择适当的相互作用对辅助方程(为非线性微分方程)进行研究, 使得辅助方程的解满足上述条件. 经过大量的数值计算, 我们发现采用以下的含时耦合系数的形式

$$\gamma(t) = \frac{\Delta}{\cosh(t/\theta)}, \quad (30)$$

并适当选择参量 Δ (耦合强度), θ (特征时间)与(11)式中的 ω_1 和 ω_2 , 即可实现 Fock 态与相干态的相互转换(见图(1)和图(2)).

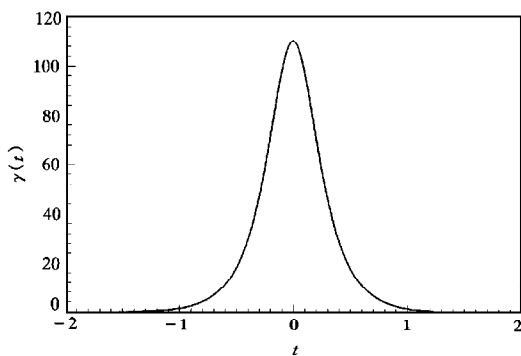


图 1 耦合系数随时间的变化曲线 $\Delta=115, \theta=0.2$

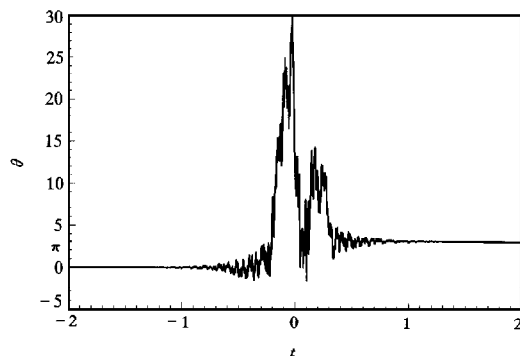


图 2 当 $t_0=-\infty, t_1=+\infty$ 时辅助方程的解 θ 随时间变化的情形 $\omega_1=110, \omega_2=10, \Delta=115, \theta=0.2$

利用以上结果亦不难求出有重要物理意义的不确定关系随时间变化的公式. 引入“坐标”, “动量”算符

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), & p_1 &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(a - a^\dagger), \\x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger), & p_2 &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(b - b^\dagger),\end{aligned}\quad (31)$$

通过计算, 得到了“坐标”, “动量”的不确定量

$$\begin{aligned}\langle (\Delta x_1)^2 \rangle &= m \cos^2(\theta/2) + 1/2, & \langle (\Delta p_1)^2 \rangle &= m \cos^2(\theta/2) + 1/2, \\ \langle (\Delta x_2)^2 \rangle &= m \sin^2(\theta/2) + 1/2, & \langle (\Delta p_2)^2 \rangle &= m \sin^2(\theta/2) + 1/2,\end{aligned}\quad (32)$$

于是可得如下不确定关系随时间变化的公式(见图 3):

$$\langle \Delta x_1 \rangle \langle \Delta p_1 \rangle = m \cos^2(\theta/2) + 1/2, \quad \langle \Delta x_2 \rangle \langle \Delta p_2 \rangle = m \sin^2(\theta/2) + 1/2, \quad (33)$$

其中 θ 为辅助方程(16)的解.

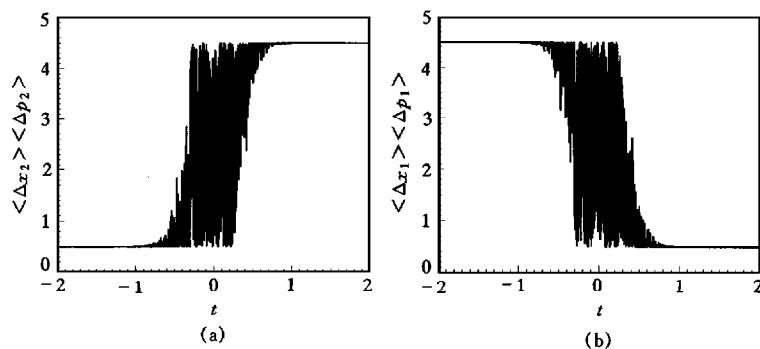


图 3 当 $t_0 = -\infty$, $t_1 = +\infty$ 时, 谐振子坐标动量的不确定关系随时间变化的情形 (a) 初始态处于相干态的谐振子; (b) 初始态处于 Fock 态的谐振子; $\omega_1 = 110$, $\omega_2 = 10$, $\Delta = 115$, $\theta = 0.2$

4 讨 论

1. 我们研究了一种新的非经典性质的转移: Fock 态与相干态的相互转换问题. 由于 $\omega_1 \neq \omega_2$, 通过这种方法, 可以用实验上已经获得的某一频率的 Fock 态^[10], 来制备其它不同频率的 Fock 态.

2. 与不变量有关的么正变换方法把研究 Fock 态与相干态相互转换的问题变成了研究简单的辅助方程的求解问题, 这使 Fock 态与相干态相互转换问题的研究变得十分方便.

3. 本文着重研究 Fock 态与相干态的相互转换, 故没有考虑 $a^\dagger a^\dagger$ 和 aa 这一类项. 运用与不变量有关的么正变换方法也可以研究包含这些项的更一般的含时耦合谐振子.

- [1] L. Davidovich, *Rev. Mod. Phys.*, **68**(1996), 127.
- [2] C. F. Lo, R. Solie, *Phys. Lett.*, **A194**(1994), 7; A. L. Silva, B. Baseia and G. C. Marques, *Mod. Phys. Lett.*, **B9**(1995), 1213.
- [3] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer Verlag, New York, 1984).
- [4] Xiao-Chun Gao, Jun Gao, Tie-Zheng Qian and Jing-Bo Xu, *Phys. Rev.*, **D53**(1996), 4374.
- [5] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10**(1969), 1458.
- [6] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, in *Invariant and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, edited by M. A. Markov (Lebedev Institute, Moscow, 1990).
- [7] Xiao-Chun Gao, Jing-Bo Xu and Tie-Zheng Qian, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 7016.
- [8] H. P. Yuan, *Phys. Lett.*, **A51**(1975), 1; H. P. Yuan, *Phys. Rev.*, **A13**(1976), 2226.
- [9] D. A. Morales, *J. Phys.*, **A21**(1988), L889.
- [10] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond and N. Zagury, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 976; M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich and N. Zagury, *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1992), 5193.
- [11] R. J. Glauber, in *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. D. A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York, 1965); *Phys. Rev.*, **131**(1963), 2766.
- [12] W. M. Zhang, D. H. Feng, R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.*, **62**(1990), 867.

TRANSFERENCE OF A KIND OF NONCLASSICAL PROPERTIES BETWEEN TWO INTERACTING MODES OF LIGHT *

FU JIAN GAO XIAO-CHUN XU JING-BO ZOU XU-BO

(Zhejiang Institute of Modern Physics and Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 11 September 1997)

ABSTRACT

The invariant-related unitary transformation method is used to study the transference of a kind of nonclassical properties between two interacting modes of light. With the aid of numerical computation, it is interesting to find that the mutual conversion of the Fock states (being nonclassical) and the coherent states is attained when the interaction is chosen appropriately.

PACC: 4250; 0365; 4210; 4220

* Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 19775040) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China and the Provincial Natural Science Foundation of Zhejiang, China.