

试样的内耗值与振动系统内耗值的比较

水嘉鹏 刘咏松 裴慧元

(中国科学院固体物理研究所内耗与固体缺陷开放研究实验室, 合肥 230031)

(1997 年 8 月 25 日收到)

推导了四个力学模型和它们对应振动系统的内耗表达式, 并给出了试样内耗值与振动系统内耗值的关系. 发现对于不同的力学模型, 或者说不同力学性质的材料, 试样的内耗值与振动系统的内耗值有不同的关系.

PACC: 6240; 0320

1 引 言

内耗研究往往离不开振动系统, 测量内耗的振动系统通常由试样和惯量组成, 因此, 人们测量的内耗值是包括惯量在内的振动系统的内耗值, 然而, 内耗机制的讨论是针对试样内耗值的, 于是, 振动系统的内耗值与试样内耗值关系的问题便是内耗研究中人们关心的一个重要的问题. 在《结晶固体的滞弹性弛豫》一书中, 用复模量的概念, Nowick 和 Berry^[1]推导了在强迫振动情况下的试样内耗($\tan \phi$)与振动系统内耗($\tan \vartheta$)的关系

$$\tan \vartheta = \frac{\omega_r^2 \tan \phi}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (1)$$

式中 ϕ 和 ϑ 分别是作用在试样上和振动系统上的力与位移之间的相角, 有惯量测量的 ϑ 和无惯量测量的 ϕ 是不同的; ω 是测量频率; $\omega_r^2 = k_1/m$; k_1 是试样的刚度; m 是振动系统的惯量. 然而, 我们发现这个试样的内耗值与振动系统内耗值的关系仅在线性滞弹性的 Voigt 模型情况下成立, 对于其它模型(或者说其它力学性质的材料)、包括标准滞弹性固体(三参量模型), (1)式不能严格地成立. 在本工作中, 我们用二参量和两个三参量力学模型分别推导了在强迫振动情况下的试样内耗值($\tan \phi$)与振动系统内耗值($\tan \vartheta$)的表达式, 并给出了四个模型的 $\tan \phi$ 与 $\tan \vartheta$ 之间的表达式.

2 力和位移之间的相位差与内耗值的关系

如果作用在试样上的力是 $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, 如图 1(a)所示, 在线性条件下, 试样的位移可以写为 $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t - \phi)$, 式中 $\omega = 2\pi f$ 是测量的圆频率; ϕ 是位移滞后于力的相角, 则振动一周损耗的振动能 ΔW 为

$$\Delta W = \oint \sigma d\epsilon = \epsilon_0 \sigma_0 \pi \sin \phi. \quad (2)$$

试样的储能 W 为

$$W = \int_0^{T/4} \sigma d\epsilon - \frac{1}{4} \Delta W = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 \cos \phi. \quad (3)$$

这里 $T=1/f$ 是振动周期; $\Delta W/4$ 项是考虑到在 $1/4$ 周期中已经损耗了的能量. 根据内耗的基本定义, 可以得到试样的内耗值 Q_s^{-1} 与力和位移之间相角差的关系

$$Q_s^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} = \tan \phi. \quad (4)$$

这个结果指出: 在强迫振动情况下, $\tan \phi$ 是试样的内耗值.

如果作用在振动系统上的力是 $F = F_0 \sin \omega t$ [图 1(b)], 振动系统的位移为 $X = X_0 \sin(\omega t - \vartheta)$, 式中 ϑ 是位移滞后于力的相角, 用完全一样的方法可以得到振动系统的内耗值 Q_v^{-1} 与力和位移之间相角差的关系

$$Q_v^{-1} = \tan \vartheta. \quad (5)$$

因此, $\tan \vartheta$ 是强迫振动情况下的振动系统的内耗值.

3 $\tan \phi$ 和 $\tan \vartheta$ 与材料参量之间的关系

为了避免重复, 在这里只给出有关 Voigt 模型的 $\tan \phi$ 和 $\tan \vartheta$ 表达式的推导过程和结果, 其余的三个模型 {Maxwell 模型[图 2(B)和图 2(b)]、Voigt 型[图 2(C)和图 2(c)]及 Maxwell 型[图 2(D)和图 2(d)]三参量模型} 推导的结果将列入表 1 中.

从图 2(A), 利用 Hooke 定律、Newton 粘滞定律和各元件的关系可以不难写出 Voigt 模型材料的运动方程式

$$\sigma = k\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (6)$$

式中 k 是理想弹簧的刚度; η 是粘壶的粘滞系数. 在强迫振动力 $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ 的作用下, 如果位移 ϵ 可以写成 $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t - \phi)$, 将 σ 和 ϵ 代入(6)式, 经过简单的数学运算, 可以得到强迫振动条件下的试样内耗 Q_s^{-1} 的表达式为

$$Q_s^{-1} = \tan \phi = \eta \omega / k. \quad (7)$$

从图 2(a), 同样可以写出 Voigt 模型振动系统的运动方程式

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + \eta \frac{dX}{dt} + kX = F, \quad (8)$$

式中 m 是惯量. 将力 $F = F_0 \sin \omega t$ 和位移 $X = X_0 \sin(\omega t - \vartheta)$ 代入(8)式, 可以得到强迫振动条件下的振动系统内耗值 Q_v^{-1} 的表达式为

$$Q_v^{-1} = \tan \vartheta = \frac{\eta \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (9)$$

式中 $\omega_0^2 = k/m$ 是无阻尼时系统的共振频率. 比较(7)与(9)式可以得到(1)式, 这个结果说明: 我们所用的方法和思路都是正确的. 根据这个结果, 在实验上为了得到试样的内耗

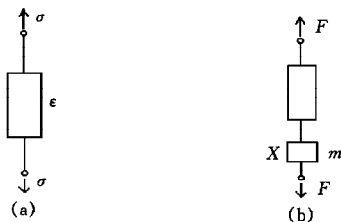


图 1 试样(a)和振动系统(b)的力和位移

值,通常要求测量频率 ω 远小于系统的共振频率 ω_0 .

在表 1 中,列出了最简单的四种力学模型推导的结果及对应的运动方程式,对于更复

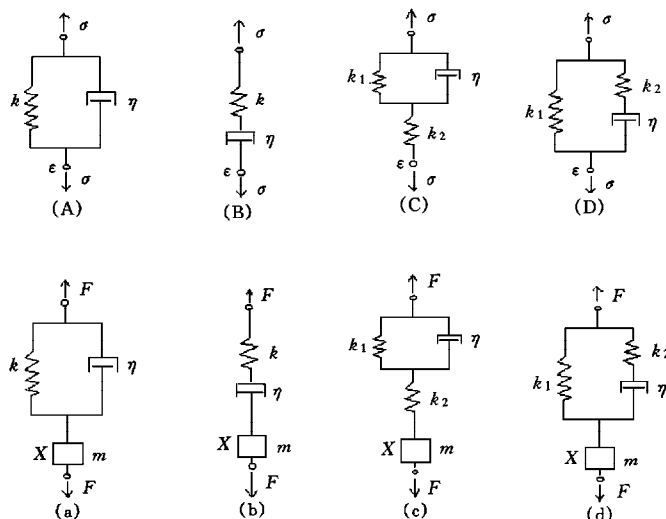


图 2 各种模型和对应的振动系统的力和位移

杂的力学模型都可以用类似的方法得到 $\tan \phi$ 和 $\tan \vartheta$ 的表达式,不过其结果更为复杂.在表 1 中,还列入了各个模型的自由振动系统的对数减缩量 δ 的表达式,自由振动系统的内耗 Q_f^{-1} 可以由^[2]

$$Q_f^{-1} = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\delta}) \quad (10)$$

计算.由于在自由振动的情况下,如果没有惯量,即使将试样激发起振,试样也不能自由振动,因此,只能写出振动系统的内耗表达式,而不能写出试样内耗的表达式.

4 讨 论

在表 1 中,我们写出了二参量和两个三参量模型的 $\tan \vartheta$ 与 $\tan \phi$ 之间的关系式,线性滞弹性 Voigt 模型的 $\tan \vartheta$ 和 $\tan \phi$ 的关系式与(1)式相同,而其它模型的 $\tan \vartheta$ 和 $\tan \phi$ 的关系式是与(1)式不相同的.这个结果表明:(1)式只适用于线性滞弹性的 Voigt 模型,对于不同的模型或者不同的材料,(1)式没有普适性.我们工作的初衷是希望找到一个 $\tan \vartheta$ 和 $\tan \phi$ 关系的普适关系式,然而,我们发现,对于不同的力学模型或者说对于不同力学性质的材料 $\tan \vartheta$ 和 $\tan \phi$ 之间有不同的关系式,不存在 $\tan \vartheta$ 和 $\tan \phi$ 关系的普适表达式,这个结果给内耗测量数据的分析带来了很大麻烦,在分析内耗测量数据时,需要知道被测量材料的其它力学性质,或者说需要知道测量的材料属于那种力学模型,才能得到试样的内耗值,这一点对内耗测量数据的分析,特别是对于大内耗材料的测量数据的分析带来困难.然而,当得到试样的内耗值后,对于分析内耗产生的机制是有利的.

表 1 四个力学模型和它们对应振动系统的内耗表达式

模型	Vogt 模型	Maxwell 模型	Vogt 型标准滞弹性固体	Maxwell 型标准滞弹性固体
$Q_s^{-1} = \tan\phi$	$\sigma = k\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$ $\tan\phi = \frac{\eta\omega}{k}$	$\sigma + \frac{\eta}{k} \frac{d\sigma}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$ $\tan\phi = \frac{k}{\eta\omega}$	$\eta \frac{d\sigma}{dt} + (k_1 + k_2)\sigma = k_1 k_2 \varepsilon + \eta k_2 \frac{d\varepsilon}{dt}$ $\tan\phi = \frac{\omega}{k_1(k_1 + k_2)(\eta k_2)^{-1} + \eta\omega^2 k_2^{-1}}$	$\eta \frac{d\sigma}{dt} + k_2 \sigma = k_1 k_2 \varepsilon + \eta(k_1 + k_2) \frac{d\varepsilon}{dt}$ $\tan\phi = \frac{\eta\omega k_2^2}{\eta^2\omega^2(k_1 + k_2) + k_1 k_2^2}$
$Q_v^{-1} = \tan\theta$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = F$	$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k}{\eta} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dF}{dt} + \frac{k}{\eta m} F$	$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k_1 + k_2 d^2x}{\eta dt^2} + \frac{k_2 dx}{m dt} + \frac{k_1 k_2 x}{m\eta} = \frac{1}{m} \frac{dF}{dt} + \frac{k_1 + k_2}{m\eta} F$	$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k_2 d^2x}{\eta dt^2} + \frac{k_1 + k_2 dx}{m dt} + \frac{k_1 k_2 x}{\eta m} = \frac{1}{m} \frac{dF}{dt} + \frac{k_2 F}{m\eta}$
$Q_v^{-1} = \tan\theta$	$\tan\theta = \frac{\omega\omega_0^2}{k(\omega_0^2 - \omega^2)\eta^{-1}}$ $\omega_0^2 = km^{-1}$	$\tan\theta = \frac{\omega_0^2}{\frac{\eta}{k}(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \omega^2) - \frac{k}{\eta}}$ $\omega_0^2 = km^{-1}$	$\tan\theta = \frac{k_2\eta\omega\omega_0^2}{\eta^2\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2) + (k_1 + k_2)^2(\omega_0^2 - \omega^2)}$ $\omega_0^2 = k_1 k_2 [m(k_1 + k_2)]^{-1}$ $\omega_2^2 = k_2 m^{-1}$	$\tan\theta = \frac{k_2\eta\omega\omega_0^2}{\eta^2\omega^2(\omega_0^2 - \omega^2) + k_2^2(\omega_1^2 - \omega^2)}$ $\omega_0^2 = (k_1 + k_2)m^{-1}$ $\omega_1^2 = k_1 m^{-1} \quad \omega_2^2 = k_2 m^{-1}$
$\tan\phi$ 和 $\tan\theta$ 的关系	$\tan\theta = \frac{\omega_0^2 \tan\phi}{\omega_0^2 - \omega^2}$	$\tan\theta = \frac{\omega_0^2 \tan\phi}{\omega_0^2 - (1 + \tan^2\phi)\omega^2}$	$\tan\theta = \frac{\omega_0^2 \tan\phi}{\omega_0^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{k_1 + k_2}{\eta\omega} \tan\phi \right)}$	$\tan\theta = \frac{\omega_0^2 \tan\phi}{\omega_0^2 - \frac{k_2\omega^2}{k_1 + k_2} \left(1 + \frac{k_2}{\eta\omega} \tan\phi \right)}$
自由振动	$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = 0$ $\delta = \frac{\eta}{2m} \frac{1}{f}$	$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k}{\eta} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = 0$ $\delta = \frac{k}{2\eta} \frac{1}{f}$	$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k_1 + k_2 d^2x}{\eta dt^2} + \frac{k_2 dx}{m dt} + \frac{k_1 k_2 x}{m\eta} = 0$ $\delta = \left[\frac{\rho}{3} - \frac{A+B}{2} \right] \frac{1}{f}$ $\rho = (k_1 + k_2)\eta^{-1}$ $q = k_2 m^{-1}$ $s = k_1 k_2 (m\eta)^{-1}$	$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{k_2 d^2x}{\eta dt^2} + \frac{k_1 + k_2 dx}{m dt} + \frac{k_1 k_2 x}{\eta m} = 0$ $\delta = \left[\frac{\rho}{3} - \frac{A+B}{2} \right] \frac{1}{f}$ $q = k_2 \eta^{-1}$ $\rho = (k_1 + k_2)m^{-1}$ $s = k_1 k_2 (m\eta)^{-1}$

注: $A = [-b/2 + (b^2/4 + a^2/27)^{1/2}]^{1/3}$; $B = -[b/2 + (\delta^2/4 + a^3/27)^{1/2}]^{1/3}$; $a = q - \rho^2/3$; $b = \rho q/3 - 2\rho^3/27 - s$.

比较表 1 中各个模型的强迫振动系统和自由衰减系统的内耗表达式,我们发现,对于每个模型,两种振动系统的内耗表达式都不一样.这个结果表明,强迫振动系统和自由衰减系统的内耗与频率的关系可能是不同的.

当测量的频率远小于振动系统的共振频率时,对于 Voigt 模型,振动系统的内耗值近似地等于试样的内耗值;对于 Maxwell 模型,如果测量频率远小于振动系统的共振频率,而且材料的内耗比较小,即 $\omega_0^2 \gg (1 + \tan^2 \phi) \omega^2$ 时,试样内耗值近似等于振动系统的内耗值;而对于两个标准线性滞弹性固体,只有当 $\omega_2^2 \gg \omega^2 \left(1 + \frac{k_1 + k_2}{\eta \omega} \tan \phi\right)$ 或者 $\omega_2^2 \gg \frac{k_2 \omega^2}{k_1 + k_2} \left(1 + \frac{k_2}{\eta \omega} \tan \phi\right)$ 时,试样内耗值才近似等于振动系统的内耗值.从上面各个模型的讨论可以看出,在强迫振动情况下,只有当测量的频率远小于振动系统的共振频率同时材料的内耗值比较小时,振动系统的内耗值才有可能近似等于试样的内耗值.但是,在自由衰减的情况下,振动系统的内耗值不能与试样的内耗值相比较.

在上述的推导过程中,我们使用了线性假设,例如:Hooke 定律、Newton 粘滞定律等,因此,我们的结果不能用于非线性内耗的研究.

5 结 论

1. 在强迫振动情况下,振动系统和试样的内耗值分别等于 $\tan \vartheta$ 与 $\tan \phi$, ϑ 和 ϕ 是两种情况下的力与位移之间的相角.

2. 对于不同的力学模型或者说对于不同力学性质的材料, $\tan \vartheta$ 与 $\tan \phi$ 之间的关系是不同的,因此,在分析强迫振动法测量的内耗数据时,必须注意到不同材料的 $\tan \vartheta$ 与 $\tan \phi$ 关系的不同.但是,当测量频率远小于振动系统的共振频率和试样的内耗值很小时,振动系统的内耗值可以近似地等于试样的内耗值.

3. 在自由衰减条件下,由于没有强迫振动力,在没有惯量的情况下,试样本身不能自由振动,因此,测量的内耗值只能是包含惯量(试样本身的质量也是惯量)在内的振动系统的内耗值.

- [1] A. S. Nowick and B. S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids* (Academic Press, New York and London, 1972), p. 17.
- [2] Zhu Xian-fang and Shui Jia-peng, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 1010(in Chinese).

COMPARISON BETWEEN THE INTERNAL FRICTION VALUES OF THE SPECIMEN AND THE VIBRATION SYSTEM

SHUI JIA-PENG LIU YONG-SONG PEI HUI-YUAN

(*Laboratory of Internal Friction and Defects in Solids, Institute of Solid State Physics, Academia Sinica, Hefei 230031*)

(Received 25 August 1997)

ABSTRACT

The expressions of internal friction values of four mechanical models and corresponding vibration systems have been deduced. The relationships between the internal friction values of the specimen and the vibration system for two-parameter models and two models of the standard anelastic solid have been obtained. It is found that these relationships for different models or the materials of different mechanical properties are different.

PACC: 6240; 0320