

超高斯纯态的一些性质

阎珂柱 孔祥和 夏云杰

(曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

(1997 年 9 月 15 日收到; 1997 年 12 月 8 日收到修改稿)

引入一种坐标概率密度分布介于高斯分布和矩形分布之间的量子力学纯态——超高斯纯态, 研究了这种态的某些量子力学性质、压缩和高阶压缩以及 Shannon 熵等, 并讨论了 Shannon 熵与压缩的关系。

PACC: 0365; 4250

1 超高斯纯态的引入

高斯纯态^[1]概括了一大类十分有意义的微观体系的状态, 如相干态和压缩态等. 近年来, 超高斯光束引起了人们较大的兴趣^[2-4], 得到了一些很有价值的结果. 我们知道, 高斯光束或高斯纯态从数学上代表了一类分布, 即高斯分布, 这类分布所表示的物理状态在实际应用中是极其重要的. 我们过去曾讨论了高斯纯态的 Shannon 熵与压缩之间的关系^[5], 本文试图把光强超高斯分布的概念移植到量子力学和量子光学中, 研究概率密度具有超高斯分布的量子力学纯态——超高斯纯态的某些性质. 仿照光强的超高斯分布函数, 我们可把超高斯纯态的波函数在坐标表象中写为

$$\Psi(x) = A \exp\left[-\frac{(x/\sigma)^{2n}}{2}\right], \quad (1)$$

其中 A 为归一化常数, n 为正整数, 与超高斯光束类似, 姑且称之为超高斯纯态的阶数.

(1) 式表示的态其坐标概率分布函数为

$$\rho(x) = |\Psi(x)|^2 = A^2 \exp\left[-(x/\sigma)^{2n}\right]. \quad (2)$$

利用归一化条件, 容易得到

$$A = \sqrt{\frac{n}{\sigma \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}}. \quad (3)$$

文献[2]证明了超高斯分布作为对光束的描写, n 应为有限的, 而作为对量子态的描写, 根据量子力学中波函数的标准条件, 超高斯纯态的阶数可以是无限的.

很显然, $n=1$ 对应高斯纯态, 因此超高斯纯态是高斯纯态很自然的推广. 本文将在第二部分研究超高斯纯态的某些量子力学性质, 在第三部分给出这种态的坐标起伏和压缩性质, 其中包括 Hong 和 Mandel 的高阶压缩, 在第四部分给出 Shannon 熵与压缩的关系.

2 超高斯纯态的某些量子力学性质

由(2)式,容易得到对应不同 n 的超高斯纯态的坐标概率密度分布函数随参数 σ 的变化规律,图 1 即为这一函数的变化曲线.在参数 σ 不变的情况下,超高斯纯态的概率密度随着阶数 n 的增大,由高斯分布趋于矩形分布.而在阶数不变的条件下,参数 σ 实际上代表了概率分布的半宽度.因此超高斯纯态是介于高斯分布和矩形分布之间的量子力学态,我们有理由认为这种态可能包含有尚未认识的特性质.

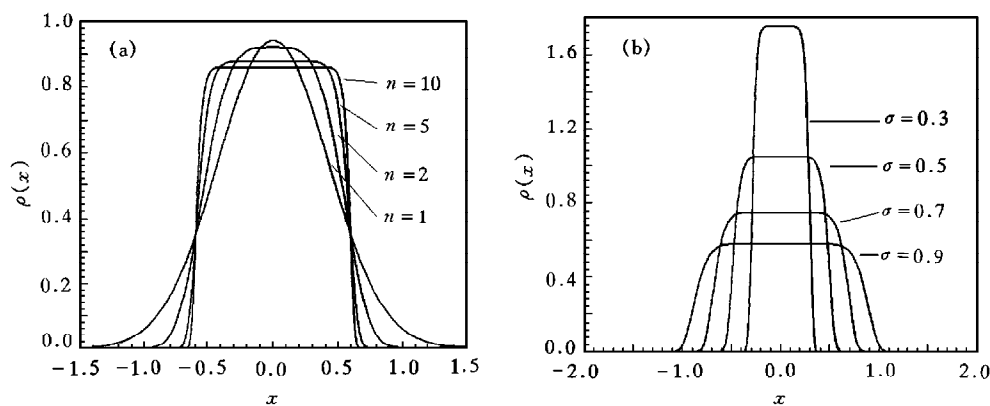


图 1 超高斯纯态的坐标概率密度分布 (a)为 $\sigma=0.6$, (b)为 $n=5$

下面给出动量表象下超高斯纯态的波函数,依据量子力学的表象理论,其动量表象下的波函数为

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \Psi(x). \quad (4)$$

把(1)式代入上式后,其积分是相当困难的,但对较小的 n 还是可以得到解析表达式的,例如,对 $n=2$ 有

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2}}{2^{1/4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} {}_0F_2\left[\left\{\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}, \frac{\sigma^4 k^4}{128}\right] \\ &\quad - \frac{\sigma^{5/2} k^2}{2^{11/4} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} {}_0F_2\left[\left\{\right\}, \left\{\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right\}, \frac{\sigma^4 k^4}{128}\right]; \end{aligned} \quad (5)$$

对 $n=3$ 有

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \frac{2^{7/6} \pi^{1/4} \sigma^{1/2}}{3^{1/2} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} {}_0F_4\left[\left\{\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right\}, -\frac{\sigma^6 k^6}{23328}\right] \\ &\quad - \frac{\sigma^{5/2} k^2}{6^{1/2} \pi^{1/4}} {}_0F_4\left[\left\{\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}\right\}, -\frac{\sigma^6 k^6}{23328}\right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi^{1/4} \sigma^{9/2} k^4}{2^{1/6} 3^{1/2} 36 \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} {}_0F_4\left[\left\{\right\}, \left\{\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\}, -\frac{\sigma^6 k^6}{23328}\right]. \quad (6)$$

其中 ${}_pF_q$ 为超几何函数. 我们知道, 高斯纯态在动量表象下波函数仍是高斯型的, 但超高斯纯态却不同, 它在动量表象下的波函数是十分复杂的函数. 图 2 给出了 $n=2$, $n=3$ 和 $n=15$ 超高斯纯态波函数的变化曲线, 为比较也给出了宽度为 2σ 的矩形分布在动量表象中的波函数 $\sqrt{1/\sigma\pi} \sin(\sigma k)/k$ 的变化曲线, 前者是一种复杂的衰减振荡的函数, 且随 n 的增大趋于后者. 数值计算结果表明, 当 $n=20$ 时超高斯纯态波函数已非常接近矩形分布的波函数, 对任意的 k 值, 二者概率幅之差的绝对值均小于 0.0055; 当 $n=100$ 时, 这个最大偏差是 0.0011.

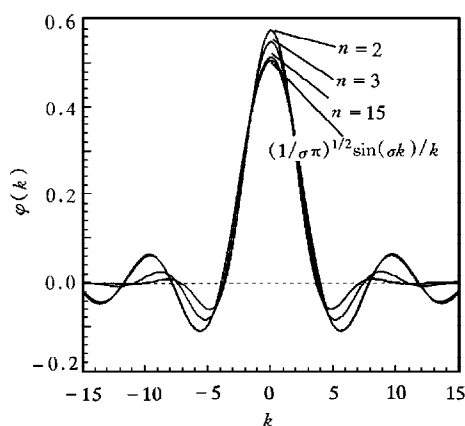


图 2 动量表象下超高斯纯态的波函数 $\sigma=0.8$

3 坐标起伏和压缩

光场压缩效应是光的重要量子统计性质. 下面我们将讨论超高斯纯态的坐标起伏和压缩性质, 其中包括 Hong 和 Mandel 的高阶压缩. 易证在超高斯纯态下的坐标期待值为

$$\overline{x} = 0. \quad (7)$$

其二阶起伏和 $2N$ 阶起伏分别为

$$\overline{(\Delta x)^2} \equiv \Delta x^2 = \sigma^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)} \quad (8)$$

和

$$\overline{(\Delta x)^{2N}} \equiv \Delta x^{2N} = \sigma^{2N} \frac{\Gamma\left(\frac{1+2N}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}. \quad (9)$$

对于 $N=n$ 和 $N=2n$, (9) 式有简单清楚的表示, 分别为

$$\Delta x^{2n} = \frac{\sigma^{4n}}{2n} \quad (10)$$

和

$$\Delta x^{4n} = \sigma^{4n} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \right). \quad (11)$$

容易看出, 各阶起伏均随 σ 的增大而增大, 在 σ 不变的条件下, 超高斯纯态的阶数 n 越

大,其起伏越小,但当 n 很大时,因 $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \approx n$, 有

$$\Delta x^{2N} = \frac{\sigma^{2N}}{2N+1}, \quad (12)$$

坐标起伏变为一常数,即对应矩形分布的坐标起伏.

所有压缩的定义实质上都是某一力学量的起伏小于该力学量在真空态或相干态的起伏,比如最早认识的二阶压缩,其压缩条件为

$$\Delta x^2 < \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Hong 和 Mandel 的高阶压缩定义为^[6]

$$\Delta x^{2N} < \frac{(2N-1)!!}{2^N}. \quad (14)$$

显然,高阶压缩是二阶压缩的自然推广,我们可把压缩统一进行研究,定义压缩参数

$$q_{2N} = \frac{\frac{(2N-1)!!}{2^N} - \Delta x^{2N}}{\frac{(2N-1)!!}{2^N}}. \quad (15)$$

$q_{2N}=1$ 对应极限压缩, $q_{2N} \leq 0$ 表示没有压缩存在.

超高斯纯态的二阶压缩和高阶压缩的数值计算结果如图 3 所示, $n=1$ 对应高斯纯

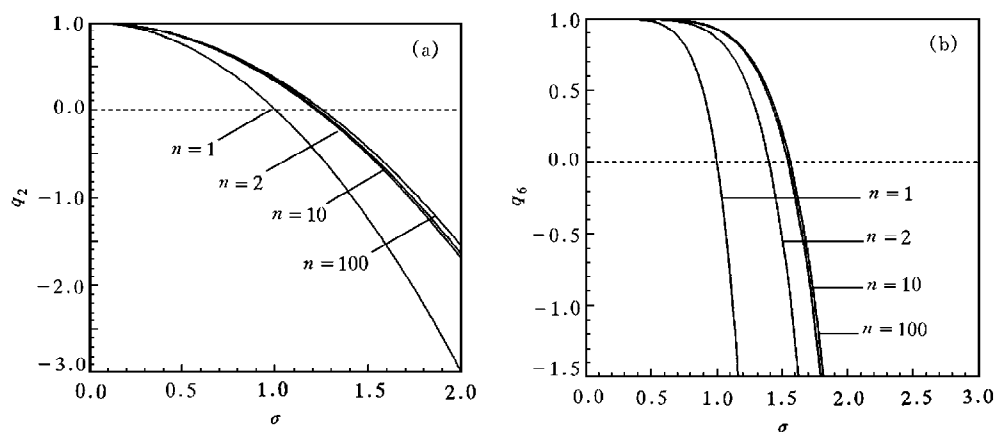


图 3 超高斯纯态的二阶压缩和六阶压缩 (a)为 $N=1$, (b)为 $N=3$

态, $n>1$ 对应不同阶的超高斯纯态.可以看出,对二阶压缩高斯纯态和超高斯纯态有较大的区别,超高斯纯态的压缩较大,而且压缩区域也大(对 σ 参数而言),但不同阶的超高斯纯态的二阶压缩差别很小.对于高阶压缩不同阶的超高斯纯态之间有明显的差别,特别是较低阶的超高斯纯态之间更为明显.但对阶数很大的超高斯纯态,其各阶压缩变化极小.从压缩的产生来看,超高斯纯态比高斯纯态要优越得多,一个是压缩较大,另一个是压缩的范围较宽.

4 Shannon 熵

熵是信息论中的重要物理量,量子信息光学的兴起^[7],对信息熵的研究变得更为重要.以坐标概率分布函数 $\rho(x)$ 定义的 Shannon 熵为

$$S_x = - \int dx \rho(x) \ln \rho(x). \quad (16)$$

把(2)式代入(16)式可得

$$S_x = \frac{1}{2n} + \ln \sigma - \ln \frac{n}{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}. \quad (17)$$

我们把 σ 改用坐标起伏表示,即用 $\Delta x^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$ 表示 σ ,

$$\sigma = \sqrt{\Delta x^2 \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right) / \Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)}. \quad (18)$$

利用(18)式,(17)式可改为

$$S_x = \ln \sqrt{\Delta x^2} + \frac{1}{2n} + \ln \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{n} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)}} \right]. \quad (19)$$

令 $\sigma=1, n=1$, (16)式变为

$$S_x = \frac{1}{2} + \ln \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln \pi). \quad (20)$$

这正是真空态或相干态的 Shannon 熵 S_x^{coh} .从(19)式可以看出,超高斯纯态的 Shannon 熵随着对应力学量起伏的增大而增大,随力学量起伏的减小而减小.但是,相干态的 Shannon 熵并不是最小的,图 4 是超高斯纯态的熵与相干态 Shannon 熵之差随坐标起伏的变化曲线.虽然压缩存在时,这个熵差一定小于零,即超高斯纯态有压缩时其 Shannon 熵一定小于相干态的 Shannon 熵,但是图 4 中也明显地表示出这个熵差小于零并不完全对应压缩的存在,这一点与高斯纯态不同^[5].另外,不同阶数的超高斯纯态的 Shannon 熵差别较大,这一点与其在压缩方面的表现也很不相同.

我们现在考虑另一种熵差.对一确定的超高斯纯态,当坐标起伏刚好不存在压缩时,即起伏等于相干态的坐标起伏,

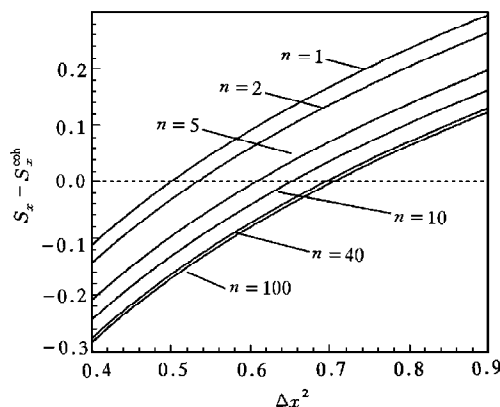


图 4 超高斯纯态与相干态 Shannon 熵之差随坐标起伏的变化曲线

$$\Delta x^2 = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

由(8)式可得这时的参数 σ 满足

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)}. \quad (22)$$

对应的 Shannon 熵为

$$S_0 = \frac{1}{2n} + \ln \left[\frac{1}{n} \sqrt{\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{2n}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}} \right]. \quad (23)$$

超高斯纯态的 Shannon 熵与刚好没有压缩时的 Shannon 熵之差为

$$S_x - S_0 = \ln \sqrt{2\Delta x^2}. \quad (24)$$

若 $\Delta x^2 < 1/2$, 则 $S_x - S_0 < 0$, 即超高斯纯态有压缩时的 Shannon 熵一定小于刚好起伏等于相干态起伏时的 Shannon 熵, 由此可以通过 Shannon 熵判定超高斯纯态是否存在压缩.

5 讨 论

对于更一般的超高斯纯态, 概率密度分布应有一平移, 即波函数应为

$$\Psi(x) = A \exp \left[-\frac{((x - x_0)/\sigma)^{2n}}{2} \right]. \quad (25)$$

从上述分析可知, 这时对本文的结果没有实质性的改变, 概率分布的极值点将从原点移到 $x = x_0$ 处, 但曲线形状不变, 对各阶压缩的存在也不发生任何变化, 这一点与高斯纯态完全相同^[5].

超高斯纯态中的坐标起伏可以很小, 其对应的压缩可以很大, 压缩对应的参数 σ 范围也较大, 故利用超高斯纯态来产生压缩态是极其有利的.

超高斯纯态的 Shannon 熵也是十分有意义的. 一方面熵与坐标起伏有密切的关系, 另一方面熵还可以判定压缩是否存在. 但这类态产生的机制或过程尚需进一步研究.

- [1] B. L. Schumaker, *Phys. Rep.*, **135**(1986), 320.
- [2] Deng Xi-ming, Cao Qing, Guo Hong, *Chinese Journal of Laser*, **23**(1996), 151(in Chinese).
- [3] J. Ojeda-Castaneda, G. Soaveda, E. Lopez-Olazagasti, *Opt. Commu.*, **102**(1993), 21.
- [4] C. Palma, V. Bagiu, *Opt. Commu.*, **111**(1994), 6.
- [5] Xia Yun-jie, Kong Xiang-he, Yan Ke-zhu, Zhao Ming-shan, *Optronics·Laser*, **7**(1996), 244(in Chinese).
- [6] Xia Yun-jie, Li Hong-zhen, Guo Guang-can, *Acta Physica Sinica*, **40**(1991), 386(in Chinese).
- [7] Guo Guang-can, *Physics*, **25**(1996), 336(in Chinese).

SOME PROPERTIES OF SUPERGAUSSAN PURE STATES

YAN KE-ZHU KONG XIANG-HE XIA YUN-JIE

(*Department of Physics, Qufu Normal University, Qufu 273165*)

(Received 15 September 1997; revised manuscript received 8 December 1997)

ABSTRACT

We introduce a kind of quantum pure states — supergaussian pure states, in which the coordinate probability density distribution is between the gaussian distribution and rectangle distribution. Some properties of quantum mechanics, squeezing, higher-order squeezing and Shannon's entropy in this state are studied. The relation between squeezing and Shannon's entropy is also discussed.

PACC: 0365; 4250