

高速公路交通流元胞自动机模型的一种统计平均解耦处理^{*}

汪秉宏

(中国科学技术大学近代物理系及非线性科学中心, 合肥 230026)

邝乐琪 许伯铭

(香港中文大学物理系, 香港新界)

(1997 年 7 月 2 日收到)

对于高速公路交通流的一维元胞自动机模型, 提出一种从微观格点状态更新规则出发, 经过逐步的统计系综平均和截断退耦近似处理, 推导宏观演化规律, 从而获得描述车流稳态平均速度与车辆密度之间关系的基本图曲线的平均场方程方法. 宏观演化规律表现为相继两个时刻车流平均速度的一个非线性映射. 平均场论可以作为这一非线性映射的吸引子得到. 将此法应用于 Fukui-Ishibashi 建议的高速运动车模型, 计算表明: 在单辆车最大速度为 M 的情形, 可以采用截断退耦到仅保留 $M+1$ 格点耦合的近似法计算空间关联函数. 对于不考虑随机减速的决定论模型, 所得到的平均场论是精确的, 对于随机减速模型, 所得到的平均场结果亦与数值模拟符合甚好.

PACC: 0550; 0520; 6470

1 引 言

交通流是一个复杂系统, 对这类系统的研究通常采用大容量高速并行计算机的数值模拟方法. 元胞自动机模型由于其简单性和在计算机上的易操作性, 越来越多地被应用于交通流的模拟^[1]. 这一模型能够揭示交通流这种复杂系统的非线性行为, 例如二维交通流的 Biham-Middleton-Levine (BML) 元胞自动机模型能够呈现城市交通流的自由运动相与全局堵车相之间的相变行为^[2], 而且, 显示出对模型进行修改的极大灵活性, 以考虑各种真实交通条件的影响, 因而成为目前对交通流进行高速微观模拟所采用的主要模型.

对于高速公路的一维交通流, 人们最关注的问题是: 一条公路上的车辆密度应该维持在多大才能获得最大的车流量? 交通工程中的基本图提供了车流量或者车流平均速度作为道路车辆密度的函数曲线^[3]. 真实交通流的基本图一般通过实地观察和测量得到. 各种交通流模型的基本图可以通过数值模拟产生. 对于一些简单的模型, 也可以从某些定性的考虑和简化物理假设给出描述基本图的平均场方程, 这些平均场方程可以加深我们对于相关模型的物理理解^[4-7]. 如果所给出的平均场理论与基本图曲线在定量上一致, 则

^{*} 国家攀登计划和国家自然科学基金资助的课题.

在交通工程中甚有意义,可以作为交通控制的定量依据^[3].然而在一般情况下,人们无法获得与基本图定量符合的平均场方程.对于交通流的元胞自动机模型,仅在单个粒子最大速度 $v_{\max}$ 为 1 的最简单一维模型情况下可以给出平均场方程,并证明它是精确解.对于考虑到车的加速和随机减速机制的 Nagel-Schreckenberg (NS) 模型^[8,9] 和 Fukui-Ishibashi (FI) 模型^[10],当 $v_{\max}$ 不限于 1 时的基本图曲线,均只有数值模拟的结果,而无平均场论.对于二维交通流 BML 元胞自动机模型, Nagatani 给出了可以呈现阻塞相变然而仅能定性相符的平均场方程^[4,5].汪秉宏等^[11,12]进一步给出了在定量上与模拟结果更符合的改进平均场论.然而,所有这些平均场理论,都不是从模型的微观相互作用机制出发通过严格的统计力学平均处理得到的,而只是一种唯象的平均场论.在一般情况下与数值模拟结果在定量上有较大差异.

我们的目的是:从交通流元胞自动机模型的微观运动方程,即严格的格点状态更新规则出发,给出交通流的平均速度或流量等宏观量的严格微观表达式,进行系统的统计力学系综平均处理,在求系综平均的过程中对元胞自动机空间关联函数依据概率论进行逐步的解耦近似,从而获得描述宏观动力学演化的映射规则.平均场理论应该作为由这一宏观动力学映射描述的非线性动力系统的吸引子而得到.这种从微观运动方程导出宏观运动方程的方法更符合统计物理学和非线性动力学的观点,对于理解交通流复杂系统中的相互作用机制显然是有益的.作为对这种方法可行性的首次研究,本文将其应用于 FI 含高速运动车的一维车流元胞自动机模型^[10].对于单辆车的最大速度为 2 的 FI 模型,得到了描述宏观动力学演化的关于相继两个时步平均速度变化的非线性映射.对于决定论模型,从非线性映射的不动点方程,可以得到与数值模拟结果完全符合的精确平均场论.对于一般的随机减速模型,非线性映射的吸引子将能够给出以减速概率为参数的平均场方程,与数值模拟结果相比较,不论是在定性上还是在定量上都较好相符.本文方法对于 NS 一维模型^[8,9]、描述城市交通流的 BML 二维元胞自动机模型^[2]以及考虑各种真实交通条件的交通流模型获得精确的平均场方程具有明显的意义.

2 模型及演化方程

描述高速公路上交通流的一维元胞自动机的最原始形式是 Wolfram 所命名的第 184 号规则自动机模型^[1].在这一模型中,汽车被处理为可区分的粒子,道路则以一离散的格点一维链表示.粒子分布在这一格点链上,但每一格点最多仅能被一个粒子占据.整个系统以等间隔离散时步演化.所有的粒子,在每一时步,只要其前方(例如向右)紧邻的格点位置是空的,即尚未被粒子占据,则均可向前移动一个格点.如果其前方紧邻格点被一粒子占据,则所考虑粒子静止不动,即使前方粒子在同一时步中要向前运动.这一模型尽管简单,然而已能够呈现出自由运动相与局部堵车相之间的相变现象.作为第 184 号规则自动机模型的进一步推广, Fukui-Ishibashi 考虑了一辆汽车的最大速度 $v_{\max} = M$ ($M > 1$) 的元胞自动机模型^[10],即如果一个粒子前方紧邻的 M 个格点全部是空的,则该粒子在每一时步中最多可以移动 M 个格点.但若该粒子前方紧邻的空格点数仅为 $N < M$ 时,则该粒子仅可移动 N 个格点.进一步,可以考虑随机减速的机制,即在粒子可以移动 M 个格点

的情况下,它以概率 f 从最大速度 M 慢化为 $M-1$,即仅移动 $M-1$ 个格点. FI 模型中的粒子加速方式不同于 NS 模型,两种模型各自反映了真实交通中不同的汽车加速机制.

对于高速公路交通流的模拟,如果以布尔变量 $S_i(t)$ 表示 t 时步中第 i 格点上的粒子占据数: $S_i(t)=1$ 表示该格点被一粒子占据, $S_i(t)=0$ 表示该格点为空位,则元胞自动机的第 184 号规则可以表示为

$$S_i(t+1) = S_i(t) S_{i+1}(t) + S_{i-1}(t) \bar{S}_i(t), \quad (1)$$

其中 $\bar{S}_i(t) \equiv 1 - S_i(t)$ 称为与第 i 格点布尔变量 $S_i(t)$ 相共轭的布尔变量. 对于布尔变量,如下基本关系成立:

$$S_i(t) S_i(t) = S_i(t), \quad S_i(t) \bar{S}_i(t) = 0. \quad (2)$$

对于 $v_{\max}$ 为 M 的 FI 随机减速模型,相应的格点状态更新方程应推广为

$$\begin{aligned} S_i(t+1) = & S_i(t) S_{i+1}(t) + S_{i-1}(t) \bar{S}_i(t) S_{i+1}(t) + S_{i-2}(t) \bar{S}_{i-1}(t) \bar{S}_i(t) S_{i+1}(t) \\ & + \cdots + S_{i-M+1}(t) \bar{S}_{i-M+2}(t) \cdots \bar{S}_{i-1}(t) \bar{S}_i(t) S_{i+1}(t) \\ & + \theta_{i-M+1,t}(f) S_{i-M+1}(t) \bar{S}_{i-M+2}(t) \bar{S}_{i-M+3}(t) \cdots \bar{S}_{i-1}(t) \bar{S}_i(t) \bar{S}_{i+1}(t) \\ & + \theta_{i-M,t}(1-f) S_{i-M}(t) \bar{S}_{i-M+1}(t) \bar{S}_{i-M+2}(t) \cdots \bar{S}_{i-2}(t) \bar{S}_{i-1}(t) \bar{S}_i(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\theta_{i,t}(f)$ 以概率 f 取值 1, 以概率 $\bar{f} \equiv 1 - f$ 取值 0, 称为第 i 格点在 t 时步中的随机减速因子, 它本身是一种随机布尔变量. 与 $\theta_{i,t}(f)$ 共轭的布尔变量为

$$\overline{\theta_{i,t}(f)} \equiv 1 - \theta_{i,t}(f) = \theta_{i,t}(\bar{f}).$$

其取值为 0 (概率为 f) 或 1 (概率为 $1-f$). 同一格点同一时步中的随机布尔变量具有与 (2) 式类似的关系,

$$[\theta_{i,t}(f)]^2 = \theta_{i,t}(f), \quad \theta_{i,t}(f) \overline{\theta_{i,t}(f)} = 0. \quad (4)$$

为明确起见, 以下仅讨论 $M=2$ 情形, 对于更高 M 值的推广没有实质性困难. 于是基本的微观演化方程为

$$\begin{aligned} S_i(t+1) = & S_i(t) S_{i+1}(t) + S_{i-1}(t) \bar{S}_i(t) S_{i+1}(t) \\ & + \theta_{i-1,t}(f) S_{i-1}(t) \bar{S}_i(t) \bar{S}_{i+1}(t) \\ & + \theta_{i-2,t}(1-f) S_{i-2}(t) \bar{S}_{i-1}(t) \bar{S}_i(t). \end{aligned} \quad (5)$$

设表示高速公路的一维元胞格点链的长度为 L , 粒子亦即汽车的总数为 N , 可以写出 t 时刻交通流平均速度的微观表达式为

$$V(t) = (1/\rho) [\langle S_i(t) \bar{S}_{i+1}(t) \rangle + \langle \theta_{i,t}(1-f) S_i(t) \bar{S}_{i+1}(t) \bar{S}_{i+2}(t) \rangle], \quad (6)$$

其中 $\rho = N/L$ 表示粒子密度, 亦即高速公路上的汽车分布密度, $\langle \cdots \rangle$ 表示定义于诸元胞格点微观量的空间平均: $\langle \cdots \rangle \equiv (1/L) \sum_{i=1}^L \{ \cdots \}$. 它们给出多格点耦合的空间关联函数.

注意到 $\langle \cdots \rangle$ 只计算仅当诸 $S_j(t)$ 取值 1, 诸 $\bar{S}_k(t)$ 取值 0 的那些布尔变量乘积的贡

献. 因此, 可以将元胞格点微观量的表达式进一步简化, 分别简记为

$$\langle S_i(t) \bar{S}_{i+1}(t) \rangle = \langle 10 \rangle_t,$$

$$\langle S_i(t) S_{i+1}(t) \rangle = \langle 11 \rangle_t,$$

$$\langle S_i(t) \bar{S}_{i+1}(t) \bar{S}_{i+2}(t) \rangle = \langle 100 \rangle_t$$

等等. 至于随机布尔变量 $\theta_{i,t}(f)$, 因为仅当其取值为 1 时, 才对平均有贡献, 故可将其从 $\langle \dots \rangle$ 中取出, 而代之以在 $\langle \dots \rangle$ 外乘一概率因子 f 即可. 于是, t 时刻交通流平均速度的微观表达式(6)式可以简记为

$$V(t) = (1/\rho) [\langle 10 \rangle_t + (1-f) \langle 100 \rangle_t]. \quad (7)$$

从 t 时刻平均速度 $V(t)$ 的微观表达式(6)式, 不难写出 $t+1$ 时刻平均速度 $V(t+1)$ 的微观表达式

$$\begin{aligned} V(t+1) &= (1/\rho) \langle S_i(t+1) [1 - S_{i+1}(t+1)] [2 - \theta_{i,t+1}(f) - \theta_{i,t+1}(1-f) S_{i+2}(t+1)] \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

现在把微观演化方程(5)代入, 利用布尔变量及随机布尔变量的基本关系(2)及(4)式, 采用简化表示, 可得 $t+1$ 时步平均速度表达式如下:

$$\begin{aligned} V(t+1) &= 2 - f - (1/\rho) \\ &\times \{ (2-f) [\langle 111 \rangle_t + \langle 1011 \rangle_t + (1-f) \langle 10011 \rangle_t] \\ &+ (1-f) [\langle 1101 \rangle_t + \langle 10101 \rangle_t + f \langle 1100 \rangle_t + \langle 10011 \rangle_t + \langle 10100 \rangle_t] \\ &+ (1-f) (\langle 100101 \rangle_t + \langle 100011 \rangle_t) + f(1-f) \langle 100100 \rangle_t \}. \end{aligned} \quad (9)$$

(7)与(9)式提供了相继两个时步的宏观平均速度 $V(t)$ 与 $V(t+1)$ 之间的关系, 当 $f=1$ 回到 $v_{\max}=1$ 的决定论性模型, 亦即一维交通流的 184 号规则基本元胞自动机模型,

$$V(t) = (1/\rho) \langle 10 \rangle_t, \quad (10a)$$

$$V(t+1) = 1 - (1/\rho) \{ \langle 111 \rangle_t + \langle 1011 \rangle_t \}. \quad (10b)$$

当 $f=0$ 回到 $v_{\max}=2$ 的 FI 决定论性模型,

$$V(t) = (1/\rho) [\langle 10 \rangle_t + \langle 100 \rangle_t], \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} V(t+1) &= 2 - (1/\rho) [2(\langle 111 \rangle_t + \langle 1011 \rangle_t + \langle 10011 \rangle_t) \\ &+ (\langle 1101 \rangle_t + \langle 10101 \rangle_t + \langle 100101 \rangle_t + \langle 100011 \rangle_t)]. \end{aligned} \quad (11b)$$

3 空间关联函数的解耦

为了得到平均速度 $V(t)$ 与 $V(t+1)$ 之间的关系, 必须算出多格点耦合的空间关联函数.

对于 $v_{\max}=1$ 的决定论性模型, 从(10a)式可知两点耦合关联函数

$$\langle 10 \rangle_t = \rho V(t). \quad (10a')$$

由此亦可知

$$\langle 11 \rangle_t = \langle 1 \rangle - \langle 10 \rangle_t = \rho [1 - V(t)], \quad \langle 00 \rangle_t = 1 - \rho - \rho V(t),$$

至于两点以上的耦合关联函数如 $\langle 110 \rangle_t$, 按照其概率论的定义应作如下计算^[9]

$$\langle 110 \rangle_t = \langle 11 \rangle_t P\langle 11|0 \rangle_t,$$

其中 $P\langle 11|0 \rangle_t$ 表示在第 i 和第 $i+1$ 格点分别有粒子占据的条件下第 $i+2$ 格点为空格的条件概率. 由于每一粒子在每一时步中最多走一个格点, 因而在同一时步中对于一个指定格点状态变化有影响的, 仅仅是处在该格点左右两个最近邻格点位置上的那些粒子. 因而我们可以忽略二体以上的空间关联, 只须考虑两元胞格点的耦合, 故有

$$P\langle 11|0 \rangle_t = P\langle 1|0 \rangle_t = \langle 10 \rangle_t / \langle 1 \rangle_t = V(t).$$

于是可得

$$\langle 110 \rangle_t = \rho V(t) [1 - V(t)].$$

对于 $v_{\max}=2$ 的决定论性模型, 由于每一粒子在每一时步中最多可走两个格点, 因而不能将空间关联函数中二体以上的所有耦合都忽略. 在同一时步中对于一个指定格点的状态变化有影响的, 不仅是处在该格点的左右两个最近邻格点位置上的粒子, 还有处在左右两个次近邻格点位置上的粒子. 因而对于 $v_{\max}=2$ 决定论模型的空间关联函数的计算, 应该考虑三个元胞的格点耦合, 而可以将四体及四体以上的耦合都忽略. 那么, 如何确定基本的三体耦合关联函数呢? 从方程(11a)不能唯一地确定 $\langle 10 \rangle_t$ 和 $\langle 100 \rangle_t$. 但我们可以仿照(10a')式近似地假定: $\langle 10 \rangle_t = \rho u$, $\langle 100 \rangle_t = \rho u^2$, 其中的 u 是一个与平均速度 $V(t)$ 有关的待定参数. (这一近似假设的合理性有待于计算结果的检验.) 由此知 $\langle 11 \rangle_t = \rho(1-u)$, $\langle 00 \rangle_t = 1 - \rho - \rho u$, 至于其他三体耦合关联函数, 仍可按 $v_{\max}=1$ 模型下解耦为二体耦合方式计算, 因而有

$$\langle 101 \rangle_t = \langle 10 \rangle_t - \langle 100 \rangle_t = \rho u(1-u),$$

$$\langle 110 \rangle_t = \langle 11 \rangle_t \langle 10 \rangle_t / \langle 1 \rangle_t = \rho u(1-u),$$

$$\langle 010 \rangle_t = \langle 001 \rangle_t = \langle 100 \rangle_t = \rho u^2, \quad \langle 111 \rangle_t = \rho(1-u)^2.$$

对于一般的 $v_{\max}=2$ 随机减速模型, 我们必须计算当减速概率 f 取 0 至 1 情形下的多元胞格点耦合的空间关联函数. 我们引进的一个近似假设是: 一般 f 的模型应该是 $f=0$ 和 $f=1$ 两种极限情形分别以概率 $(1-f)$ 和 f 为比例的混合. 按此假设, 即有

$$\langle 100 \rangle_t = \rho u \{ (1-f)u + f[1 - \rho - \rho u / (1 - \rho)] \}. \quad (12)$$

这一近似假设的合理性也有待于计算结果的检验. 其余的基本关联平均量的假设均不变, 即仍设

$$\langle 10 \rangle_t = \rho u, \quad \langle 110 \rangle_t = \rho u(1-u), \quad (13)$$

则有

$$\langle 11 \rangle_t = \rho(1-u),$$

$$\langle 00 \rangle_t = 1 - \rho - \rho u,$$

$$\langle 111 \rangle_t = \langle 11 \rangle_t - \langle 110 \rangle_t = \rho(1-u)^2$$

$$\langle 010 \rangle_t = \langle 10 \rangle_t - \langle 110 \rangle_t = \rho u^2,$$

$$\langle 101 \rangle_t = \langle 10 \rangle_t - \langle 100 \rangle_t = \rho u [1 - (1-f)u - f(1 - \rho - \rho u) / (1 - \rho)], \quad (14)$$

$$\langle 000 \rangle_t = \langle 00 \rangle_t - \langle 100 \rangle_t = 1 - \rho - \rho u - \rho u [(1-f)u + f(1 - \rho - \rho u) / (1 - \rho)],$$

$$\langle 001 \rangle_t = \langle 00 \rangle_t \langle 000 \rangle_t = \langle 100 \rangle_t = \rho u \{ (1-f)u + f[1 - \rho u / (1-\rho)] \}.$$

不难验证,以上结果当 $f=0$ 回到 $v_{\max}=2$ 决定论模型,当 $f=1$ 则回到 $v_{\max}=1$ 决定论模型.例如,当 $f=1$,有 $\langle 100 \rangle_t = \rho u [1 - \rho u / (1-\rho)]$,及 $\langle 000 \rangle_t = (1-\rho-\rho u)^2 / (1-\rho)$,这与只考虑二体耦合的计算结果是一致的,即

$$\langle 100 \rangle_t = \langle 10 \rangle_t \langle 00 \rangle_t / \langle 0 \rangle_t = \rho u [1 - \rho u / (1-\rho)],$$

$$\langle 000 \rangle_t = \langle 00 \rangle_t \langle 00 \rangle_t / \langle 0 \rangle_t = (1-\rho-\rho u)^2 / (1-\rho).$$

因此,从假设(12)及(13)式出发,可按解耦至三体关联的相同方法计算所有多格点耦合的空间关联平均

$$\langle 1011 \rangle_t = \langle 101 \rangle_t \langle 011 \rangle_t / \langle 01 \rangle_t$$

$$= \rho u (1-u) [1 - (1-f)u - f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)], \quad (15a)$$

$$\langle 1101 \rangle_t = \langle 110 \rangle_t \langle 101 \rangle_t / \langle 10 \rangle_t = \langle 1011 \rangle_t, \quad (15b)$$

$$\langle 1100 \rangle_t = \langle 110 \rangle_t \langle 1101 \rangle_t$$

$$= \rho u (1-u) [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)], \quad (15c)$$

$$\langle 10011 \rangle_t = \langle 100 \rangle_t \langle 001 \rangle_t \langle 011 \rangle_t / (\langle 00 \rangle_t \langle 01 \rangle_t)$$

$$= \rho^2 u^2 (1-u) [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)] / (1-\rho-\rho u), \quad (15d)$$

$$\langle 100011 \rangle_t = \langle 100 \rangle_t \langle 000 \rangle_t \langle 001 \rangle_t \langle 011 \rangle_t / (\langle 00 \rangle_t^2 \langle 01 \rangle_t)$$

$$= \rho^2 u^2 (1-u) [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)]^2 \\ \times \{ 1 - \rho - \rho u - \rho u [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)] \} \\ \times (1-\rho-\rho u)^{-2}, \quad (15e)$$

$$\langle 100101 \rangle_t = \langle 100 \rangle_t \langle 001 \rangle_t \langle 010 \rangle_t \langle 101 \rangle_t / (\langle 00 \rangle_t \langle 01 \rangle_t \langle 10 \rangle_t)$$

$$= \rho^2 u^3 (1-u) [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)]^2 \\ \times \{ 1 - (1-f)u - f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho) \} / (1-\rho-\rho u), \quad (15f)$$

$$\langle 10101 \rangle_t = \langle 101 \rangle_t \langle 010 \rangle_t \langle 101 \rangle_t / (\langle 01 \rangle_t \langle 10 \rangle_t)$$

$$= \rho u^2 (1-u) [f\rho u + (1-f)(1-\rho)(1-u)]^2 / (1-\rho)^2, \quad (15g)$$

$$\langle 10100 \rangle_t = \langle 1010 \rangle_t = \langle 10101 \rangle_t$$

$$= \rho u^2 [1 - (1-f)u - f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)] \\ \times [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)], \quad (15h)$$

$$\langle 100100 \rangle_t = \langle 100 \rangle_t \langle 001 \rangle_t \langle 010 \rangle_t \langle 100 \rangle_t / (\langle 00 \rangle_t \langle 01 \rangle_t \langle 10 \rangle_t)$$

$$= \rho^2 u^3 [(1-f)u + f(1-\rho-\rho u) / (1-\rho)]^3 / (1-\rho-\rho u). \quad (15i)$$

4 车流平均速度的非线性映射及平均场方程

把空间关联函数的计算结果(15)式代入表达 $V(t)$ 及 $V(t+1)$ 的(7)与(9)式中,可以得到

$$V(t) = u[1 + (1-f)U_f], \quad (16a)$$

$$\begin{aligned}
 V(t+1) = & (2-f)u\{1+U_f(1-u)[1-(1-f)U_fU_\rho]\} \\
 & - (1-f)u\{(1-U_f)(1-uU_f) + fU_f(1-uU_fU_\rho) \\
 & + (1-f)U_f^2U_\rho[1-U_f(u(1-f) + U_\rho(1-u))]\}, \quad (16b)
 \end{aligned}$$

其中

$$U_f \equiv (1-f)u + f(1-\rho-\rho u)/(1-\rho). \quad (17a)$$

$$U_\rho \equiv \rho u/(1-\rho-\rho u). \quad (17b)$$

而 u 作为参数 f 和 ρ 以及 $V(t)$ 的函数关系可以从(16a)及(17a)式得到,

$$u = \frac{\{(1+f-f^2)^2 + 4(1-f)[1-f/(1-\rho)]V(t)\}^{1/2} - (1+f-f^2)}{2(1-f)[1-f/(1-\rho)]}. \quad (18)$$

将(17), (18)式代入(16b)式, 得到 $v_{\max}=2$ 随机减速模型中车流宏观平均速度随时间演化的非线性映射 $V(t) \rightarrow V(t+1)$. 这一动力学映射的吸引子给出渐近稳态的平均场结果, 其计算结果见图1所示. 图1显示了用本文方法所得到的平均场理论曲线与不同 f 值下 $v_{\max}=2$ 随机减速模型的基本数值模拟给出的基本图的比较^[10]. 比较结果表明, 两者不仅在定性上一致, 而且在定量上也符合较好, 仅在临界点 $\rho=1/2$ 附近, 数值模拟曲线稍高于本文的理论曲线.

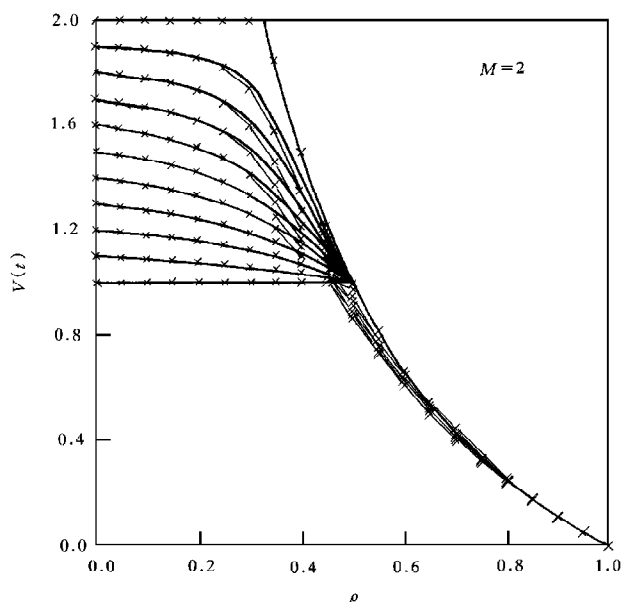


图1 有随机延迟的 $M=2$ 高速车 Fukui-Ishibashi 交通流模型的基本图
粗实线表示模拟结果, “×”及细线表示本文统计力学方法处理所给出
平均场论的理论结果. 由上至下的11条曲线分别对应于延迟概率 $f=$
 $0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ 及 1.0

当 $f \rightarrow 0$ 和 $f \rightarrow 1$ 的理论曲线都严格回到 $v_{\max}=2$ 和 $v_{\max}=1$ 的无随机延迟的决定论模型的精确平均场论结果. 事实上, 当 $f \rightarrow 1$, 车流平均速度的非线性映射(16)式化为

$$V(t+1) = 2V(t) - [1/(1-\rho)]V(t)^2 + [\rho/(1-\rho)]V(t)^3, \quad (19)$$

其渐近不动点 $v = V(t \rightarrow \infty)$ 给出平均场方程

$$v = 2v - [1/(1-\rho)]v^2 + [\rho/(1-\rho)]v^3. \quad (20)$$

它的两个非零解为 $v_1=1$, $v_2=1/\rho-1$, 分别是非线性映射(19)式当参数 ρ 在稳定性区域 $0 < \rho < 1/2$ 及 $1/2 < \rho < 1$ 中的吸引子. 由此得到 $v_{\max}=1$ 决定论模型的精确平均场结果

$$V(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \rho \leq 1/2, \\ 1/\rho - 1 & 1/2 \leq \rho \leq 1. \end{cases} \quad (21)$$

这一平均场结果早已见之于文献[2, 6, 8, 9]. 但是, 我们在这里是从微观运动方程出发, 经过统计系综平均, 然后加以截断退耦处理, 导出一个反映宏观动力学演化的非线性映射, 由此映射的吸引子和吸引域得到的. 吸引子给出精确的渐近稳态的车流平均速度, 吸引域则指明它们各自存在的车密度区域.

当 $f \rightarrow 0$, 非线性映射(16)式化为

$$V(t) = u + u^2, \quad (22a)$$

$$V(t+1) = 2 - (1 - u)$$

$$\times \{(1+u)(1-u)(2+u) + \rho u^4[3 - \rho + (1-\rho)u - \rho u^2]/(1-\rho-\rho u)\}. \quad (22b)$$

这一映射的不动点方程是

$$u + u^2 = 2 - (1 - u)$$

$$\times \{(1+u)(1-u)(2+u) + \rho u^4[3 - \rho + (1-\rho)u - \rho u^2]/(1-\rho-\rho u)\}. \quad (23)$$

它的两个非零实解分别为: $u_1=1$ 及 $u_2+u_2^2=1/\rho-1$, 分别对应于渐近平均速度 $v_1=2$, 和 $v_2=1/\rho-1$. 这两个平均速度解的稳定区域可由非线性映射的吸引域条件

$$|\partial V(t+1)/\partial V(t)| \leq 1$$

确定. 对于 $u_1=1$, 亦即 $v_1=2$, 可得稳定区域 $\rho \leq 1/3$. 对于 u_2 解亦即 $v_2=1/\rho-1$, 稳定性区域是 $\rho \geq 1/3$. 这样, 我们对于 $v_{\max}=2$ 的决定论性模型, 导出宏观平均场方程应该是

$$V(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} 2 & 0 \leq \rho \leq 1/3, \\ 1/\rho - 1 & 1/3 \leq \rho \leq 1. \end{cases} \quad (24)$$

应该指出, Fukui-Ishibashi 从一些直观的考虑, 给出了一般 $v_{\max}=M$ 决定论模型的平均场论, 结果为^[10]

$$V(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} M & 0 \leq \rho \leq 1/(M+1), \\ 1/\rho - 1 & 1/(M+1) \leq \rho \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

这一结果是正确的, 因为与数值模拟一致. 然而, 文献[10]的推导中关于空间关联函数的计算缺乏概率论的根据. 我们的推导方法, 弥补了该文的不足, 并且可以得到考虑随机减速情形更一般的结果.

5 结 论

对于描述高速公路交通流的一维元胞自动机, 我们特别考虑了 Fukui-Ishibashi 所建

议的允许高速车在一定限速范围内加速和随机减速的模型. 以布尔变量和随机布尔变量描述格点的状态及其变化, 建立了这种模型的微观演化方程 $S_i(t) \rightarrow S_i(t+1)$, 给出车流平均速度的微观表达式, 然后通过逐步的统计系综平均和截断退耦处理, 可以得到宏观的动力学演化规则. 这些规则表现为相继两个时步的车流平均速度的非线性映射: $V(t) \rightarrow V(t+1)$, 这一映射的吸引子给出相应于车流基本图曲线的平均场方程. 在从微观到宏观的统计系综平均过程中, 涉及到多格点耦合的空间关联函数的计算. 我们依据关联平均的概率论定义并考虑到: 对于 $v_{\max} = M$ 模型, 能对一个格点状态在一时步中的变化发生影响的, 仅仅是那些在其左右紧邻的 $M+1$ 个格点的占据情况, 因而可以假定, 关联函数的计算只须考虑 $M+1$ 格点耦合, 多于 $M+1$ 格点的耦合则可以忽略. 计算结果证明, 对于决定论模型, 上述解耦假设是正确的, 我们的方法可以给出与数值模拟相符的精确平均场方程. 对于减速概率为 $f(0 < f < 1)$ 的 $v_{\max} = M$ 的一般随机减速模型, 如果假设它是 $v_{\max} = M$ 和 $v_{\max} = M-1$ 两种决定论模型分别以 $(1-f)$ 和 f 为比例的混合, 则所得平均场论仍能给出与模拟结果定量符合相当好的基本图曲线. 本文方法可望作进一步的推广而应用于其他交通流模型, 如交通流的 NS 一维模型和 BML 二维模型, 以及考虑实际交通条件的各种元胞自动机模型.

作者之一(汪秉宏)感谢香港中文大学杨振宁访问研究基金的资助及在访问香港中文大学物理系期间所受到的款待, 许伯铭感谢香港政府研究资助局项目 CUHK 4191/97 P 的资助.

- [1] S. Wolfram, *Theory and Application of Cellular Automata*(World Scientific, Singapore, 1986).
- [2] O. Biham, A. A. Middleton, D. Levine, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), R6124.
- [3] N. H. Gartner, N. H. M. Wilson, *Transportation and Traffic Theory*(Elsevier, New York, 1987).
- [4] T. Nagatani, *Phys. Rev.*, **E48**(1993), 3290.
- [5] T. Nagatani, *J. Phys. Soc. Japan*, **62**(1993), 2656.
- [6] K. H. Chung, P. M. Hui, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**(1994), 4338.
- [7] Y. Ishibashi, M. Fukui, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**(1994), 2882.
- [8] K. Nagel, M. Schreckenberg, *J. Phys. France*, **2**(1992), 2221.
- [9] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, N. Ito, *Phys. Rev.*, **E51**(1995), 2939.
- [10] M. Fukui, Y. Ishibashi, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**(1996), 1868.
- [11] B. H. Wang, Y. F. Woo, P. M. Hui, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**(1996), L31.
- [12] B. H. Wang, Y. F. Woo, P. M. Hui, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**(1996), 2345.

STATISTICAL MECHANICAL APPROACH TO CELLULAR AUTOMATON MODELS OF HIGHWAY TRAFFIC FLOW *

WANG BING-HONG

(*Department of Modern Physics and Center of Nonlinear Science,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

KWONG YVONNE-ROAMY HUI PAK-MING

(*Department of Physics, The Chinese University of Hong Kong, New Territories, Hong Kong*)

(Received 2 July 1997)

ABSTRACT

The cellular automaton models for one-dimensional traffic flow problems are considered. Starting with a microscopic relation for the updating rule describing the occupancy on each site of the road, a macroscopic evolution relation for the average speed of cars can be obtained by carrying out statistical averages. Mean field equations are obtained by considering the asymptotic form of the evolution relation. This gives the average car speed in the long time limit as a function of the car density. The evolution relation is a nonlinear mapping between the average speeds at two consecutive time steps. The mean field results can be obtained by studying the attractors of the mapping. The approach is applied to the study of the model recently proposed by Fukui and Ishibashi. Our calculations show that for models in which the maximum speed of each car is M , a decoupling scheme retaining correlations up to $M+1$ sites can be applied to the calculation of spatial correlations involving more than $M+1$ sites. Exact results are obtained using our approach for models without random delay. For models with random delay, results are in good agreement with the simulation results.

PACC: 0550; 0520; 6470

* Project supported by the National Climbing Program and the National Natural Science Foundation of China.