

利用混沌信号驱动实现各子系统间的同步^{*}

刘玉怀 马 军 路轶群

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

(1998 年 4 月 20 日收到; 1998 年 6 月 11 日收到修改稿)

通过对非同参数 Lorenz 系统驱动模型的讨论, 发现对于非同参数情况, 驱动系统与响应系统间严格的混沌同步关系是不存在的, 同步只具有相对的意义. 同时, 探讨了在混沌信号驱动下稳定系统的动力学行为, 说明其输出同样是混沌的. 指出利用混沌信号驱动两个非同参数的子系统, 可以实现两子系统之间的混沌同步输出. 给出同步条件, 得出的结论在实际应用中可能具有指导意义.

PACC: 0545

1 引 言

混沌系统之间的同步研究不但具有理论意义, 而且在实际应用中涉及到诸多领域, 其特殊的应用之一就是保密通讯. 因此, 利用混沌信号驱动响应系统来实现两系统间的混沌同步的概念一经提出^[1], 立刻引起人们的研究兴趣, 并把驱动的概念应用到 Lorenz 系统和 Rössler 系统^[2].

近年的研究工作表明^[3-5], 对于两个混沌系统, 其混沌同步的实现方法是: 利用其中一系统作为驱动源, 另一系统作为响应, 响应系统的动力学行为受驱动源影响, 但驱动源并不受响应系统的影响. 系统间同步的定义是: 对于一自治的 N 维动力学系统 $\dot{u} = f(u)$, 任意将系统分成两个子系统 $u = [(v, w)]$, 其中 v, w 满足动力学方程 $\dot{v} = g(v, w)$, $\dot{w} = h(v, w)$, 这里 $v = (u_1, \dots, u_m)$, $g = (f_1, \dots, f_m)$, $w = (u_{1+m}, \dots, u_n)$, $h = (f_{1+m}, \dots, f_n)$. 现在对于与 w 子系统全同的 w' 子系统, $w' = h(v, w')$, 定义 $\Delta w = w' - w$, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta w \rightarrow 0$ 而与两子系统的初始条件无关, 则两子系统同步. 可见, 同步所涉及的两子系统 w 和 w' 是全同的. 以 Lorenz 系统为例, 意味着驱动系统与响应系统的参数 σ, r 和 b 是完全相同的.

本文将研究非同参数的 Lorenz 系统间驱动信号与响应信号的动力学行为. 目的在于指出, 对于 Lorenz 系统, 参数不同的子系统间严格地实现同步是不可能的. 同时将讨论对于稳定系统, 利用混沌信号驱动此系统将得到混沌输出; 基于此结论, 阐明存在另一种同步方案, 即利用一混沌系统 s 去驱动两个稳定的自治系统 u 和 v : $u = f(u, s)$, $v = h(v, s)$. 这里系统 u 和系统 v 具有类似的结构, 但参数与初始条件不同. 我们所关心的是

^{*} 中国科学院基础研究重点基金(KJ952-J1-703)资助的课题.

系统 u 与系统 v 间的混沌同步行为, 而不去研究驱动源与响应系统之间的混沌同步. 依据上述同步的定义, 同样定义 $\Delta u = u - v$, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u \rightarrow 0$, 则称两响应子系统之间存在混沌同步. 作为一个例子, 研究混沌信号驱动下的两个激光子系统的混沌同步行为, 并给出混沌同步的条件.

2 非全同 Lorenz 系统的驱动及响应

文献[2]中讨论了著名的 Lorenz 系统^[6]的驱动及响应, 其所构成的动力学, 对 y 驱动为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, & (\text{驱动系统}) \\ \dot{z} &= xy - bz; \\ \dot{x}_1 &= \sigma_1(y - x_1) & (\text{响应系统}) \\ \dot{z}_1 &= x_1 y - b_1 z_1, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\sigma = \sigma_1 = 16$, $b = b_1 = 4$, $r = 45.92$. 参数的选取保证了驱动源处于混沌区. 但在这里我们所关心的是当系统参数发生偏差时, 即 $\sigma \neq \sigma_1$, $b \neq b_1$, 响应系统还能与驱动系统保持同步吗? 答案是否定的. 如图 1 所示, 其中图 1(a) 为 $z - z_1$ 的时间序列, 图 1(b) 为 $x - x_1$ 的时间序列, 参数为 $\sigma = 16$, $\sigma_1 = 16.1$, $b = b_1 = 4$, $r = 45.2$, 初始条件相同.

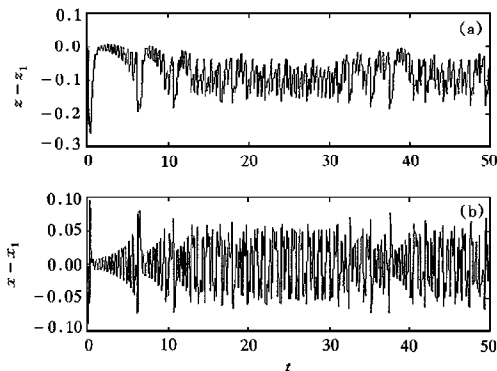


图 1 y 驱动 Lorenz 子系统 x 分量与 z 分量之差的时间序列 ($\sigma = 16$, $\sigma_1 = 16.1$) (a) $z - z_1$; (b) $x - x_1$

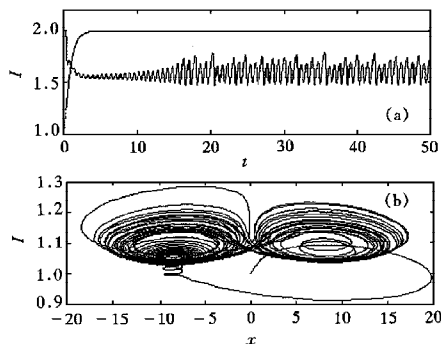
由图 1 可以看出, 偏差 ($x - x_1$, $z - z_1$) 并不是随着时间的增加而减小, 而是在一个稳定的范围内变化. 并且这个范围随着参数 σ' 与 σ 之偏差的增大而增大. 这与 $\sigma = \sigma'$ 的情况不同^[2]. 后者是随着时间而迅速衰减.

3 稳定自治系统受混沌信号驱动的动力学行为

本节将说明, 当受混沌信号驱动时, 稳定自治系统的动力学行为是混沌的. 这在物理直观上不难理解. 在数学上, 对于 $\dot{u} = f(u, s)$, 其中 s 是混沌信号. 方程的线性化给出自治系统对外界微扰的反应, 即 $\Delta \dot{u} = D_u f(u, s) \Delta u + \dot{f}_s \Delta s I$, 这里 $D_u f(u, s)$ 是响应系统的雅可比矩阵, $\dot{f}_s$ 是对 s 的偏导数, I 是单位矩阵, 由于 $\Delta s \sim e^{\lambda t}$, λ 为驱动子系统的

Lyapunov 指数, 考虑驱动信号是混沌的, 即 $\lambda > 0$.

这里, 我们以一维系统举例说明. $D_u f(u, s)$ 成为对 $f(u, s)$ 关于 u 的偏导数, 因而 Δu 具有如下解: $\Delta u \sim e^{-\int f_u dt} e^{\lambda \int f_u dt} \propto g(t) e^{\lambda t}$, 由此看出, 对于稳定的响应系统, 当



存在外部混沌驱动信号时, Δu 将随着外部微扰呈指数增大, 即响应系统的输出是混沌的.

图 2 给出系统 $I = I(\alpha - \beta I - rx^2)$ 的时间序列及相图, 该方程描述的是激光系统光强变化, 其中 I 是光强, α 是增益因子, β 是饱和因子, 第三项是引入的衰减项, 其中 x 是驱动源 Lorenz 系统中 x 分量, 式中参数选取为: $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.8$, $r = 0.005$. 注意, 本文中各个物理量经过归一化处理, 可取任意单位. 为使 x 为混沌信号, Lorenz 系统参数选为

如下: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\gamma = 28$. 图 2(a) 表明, 对于我们所关心的系统 $I = I(\alpha - \beta I)$, 引入混沌信号前, 系统光强经过暂态后达到稳定; 引入混沌信号后, 系统光强输出表现为混沌

振荡行为. 图 2(b) 表示驱动信号与系统光强构成的混沌吸引子.

4 激光系统的混沌同步

下面, 以激光系统为例, 利用数值模拟, 考察自治系统 $\dot{I}_i = I_i(\alpha_i - \beta_i I_i)$, $i \in [1, N]$, 通过引入 Lorenz 混沌信号 x , 以实现各个子系统间的同步. 需要说明的是, Lorenz 系统在一定条件下与激光理论中的 Maxwell-Bloch 方程完全等价, 而且其 x 分量也就是光场的电场, 因此, 在第三节引入的损耗系数 rx^2 实际上就是与混沌光源的光强成线性关系的损耗调制. 在实际应用过程中也就是利用一混沌激光作为驱动源, 实现其它激光器的同步混沌输出. 图 3 所示为混沌同步原理图.

这里值得指出的是, 我们所说的同步, 不是存在于驱动信号与响应信号之间, 而是存在于具有不同的参数以及不同初始条件的响应子系统的输出之间.

对于激光系统, 由于其光强所满足的动力学方程是一维的, 因此各子系统间是各自独立自治的. 为方便讨论, 我们仅取 $N = 2$ 情况. 对于相同参数情况, 获得混沌同步是容易的, 因此, 我们主要讨论非相同参数情况.

4.1 非同参数子系统动力学行为

当参数存在一定偏差时, 例如取如下参数: $\alpha_1 = 1.6$, $\beta_1 = 0.801$, $r_1 = 0.005$, $\alpha_2 =$

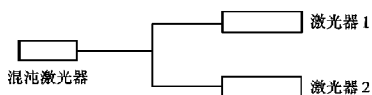


图 3 激光系统混沌同步的一种新方案

1.6, $\beta_2=0.8$, $r_2=0.005$. 驱动源的参数为 $\sigma=10$, $\gamma=28$, $b=8/3$. 图 4 给出了两子系统 I_1 , I_2 的时间序列以及其偏差 $I_1 - I_2$ 的时间序列.

从图 4 不难发现, 对于本节所讨论的两个子系统, 由于其参数相差较小(相对误差 0.125%), 宏观上的同步行为是显而易见的. 但 ΔI 并不是随时间而逐步减小, 而是趋向一个近似恒定的小量. 分析这两个子系统, 可以得到 ΔI 的动力学方程

$$\Delta I = (\alpha_2 - \alpha_1) I_2 - (\beta_2 - \beta_1) I_2^2 - (r_2 - r_1) x^2 I_2 + [\alpha_1 - \beta_1(I_2 + I_1) - r_1 x^2] \Delta I.$$

通常的参数选择是使方程等号右边 ΔI 的系数是负值, 这样也就不难理解参数完全相同的两子系统的指数收敛行为. 对于参数不同的情况, ΔI 的行为与方程等号右边的前三项有很大关系. 同时此 ΔI 动力学方程也暗示着: 在 $\alpha_1 = \alpha_2$ 情况下, 通过适当地选择 r_1 , r_2 的取值, 可以改善 ΔI 的收敛行为. 图 5 显示的是 $\alpha_1 = 1.6$, $\beta_1 = 0.801$, $r_1 = 0.005$, $\alpha_2 = 1.6$, $\beta_2 = 0.8$, $r_2 = 0.005027$ 参数下, ΔI 的时间行为. 从图 5 中可以看出, 通过 r_2 的微小改变, 我们实现了 ΔI 收敛行为的改善, 与图 6 相比, ΔI 的收敛行为以倍数得以提高. 同样的讨论也适合于参数相差较大的情况, 即 ΔI 收敛于一小量(相对与 I_1 , I_2 而言). 但严格地说 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta I \rightarrow 0$ 并不成立, 从这种意

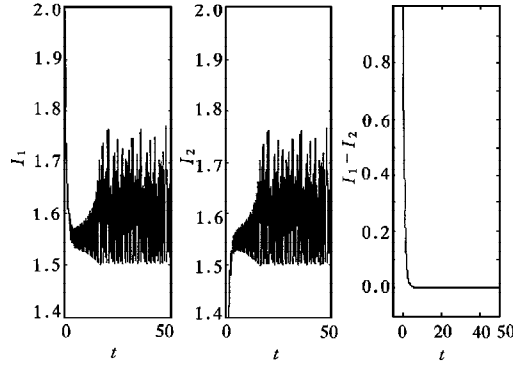


图 4 I_1 , I_2 和 $I_1 - I_2$ 的时间序列 (存在同步行为)

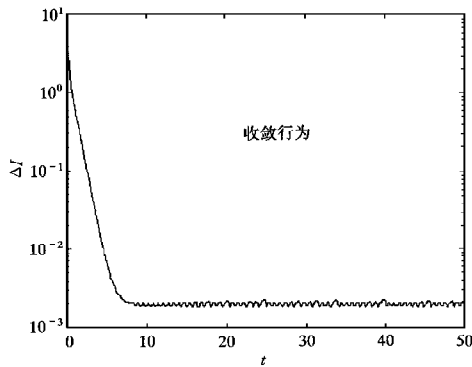


图 5 ΔI 的时间序列 ($\alpha_1 = 1.6$, $\beta_1 = 0.801$, $r_1 = 0.005$, $\alpha_2 = 1.6$, $\beta_2 = 0.8$, $r_2 = 0.005027$)

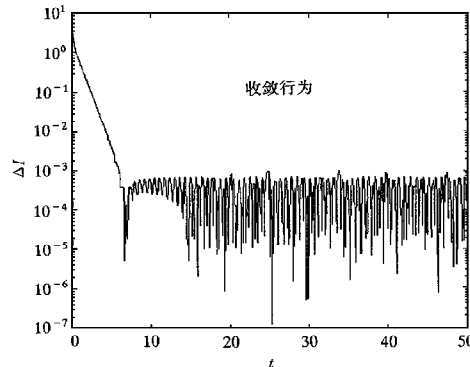


图 6 I_1 与 I_2 之差的绝对值序列 (可观察到收敛行为, 虽然 ΔI 不为零, 但远小于 I_1 或 I_2)

义上讲, 两子系统是不严格同步的. 同步只具有相对的意义, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta I}{I_1} \rightarrow c_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta I}{I_2} \rightarrow c_2$, $\max\{c_1, c_2\} \ll 1$. 在下面我们将从 ΔI 所满足的动力学方程着手, 探讨不同参数条件下, 两激光子系统间混沌的严格同步.

4.2 非同参数子系统间混沌的严格同步

从以上讨论可知,对于激光系统 $\dot{I}_i = I_i(\alpha_i - \beta_i I_i)$, 不同参数条件下,两子系统间的混沌同步并不是严格意义上的同步. 从 ΔI 的动力学方程出发, ΔI 所满足的动力学方程具有形式: $\dot{\Delta I} = f(I_1, I_2, t) + g(I_1, I_2, t)\Delta I$, 这里 f, g 是普通函数. 因此, 如果要求 ΔI 有趋零的收敛行为, 其必要条件是: 对于时间 $t \rightarrow \infty$, $f(I_1, I_2, t) = 0$, 并且对 $t \in [0, \infty)$, $g(I_1, I_2, t) < 0$.

由此看出, 对于各个自治的激光子系统, 在非同参数情况下, 其 ΔI 动力学方程并不满足 ΔI 趋零的收敛条件. 这样宏观上子系统间的混沌同步只能是相对的, 非严格的. 这里相对的同步是指 ΔI 相对 I_1 和 I_2 而言很小.

根据如上讨论, 考虑如下两个混沌驱动下的激光子系统, 并将其中一个子系统作为另一个子系统的抽运源, 即

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= I_1(\alpha_1 - \beta_1 I_1 - r_1 x^2) + \delta I_2, \\ \dot{I}_2 &= I_2(\alpha_2 - \beta_2 I_2 - r_2 x^2).\end{aligned}\quad (2)$$

简单的代数运算表明: 当 $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$, ΔI 的动力学方程是与 $\alpha_i, i=1, 2$ 无关的. 这表明在相同的饱和系数和耦合系数 (β, r) 条件下, 参数 α 不同的两子系统间是可以实现严格的混沌同步的. 如图 7 所示.

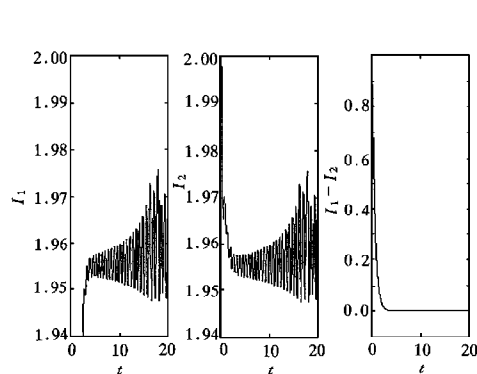


图 7 I_1, I_2 和 $I_1 - I_2$ 的时间序列 ($\alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1.6, \beta_1 = \beta_2 = 0.8, r_1 = r_2 = 0.005$), 存在同步行为

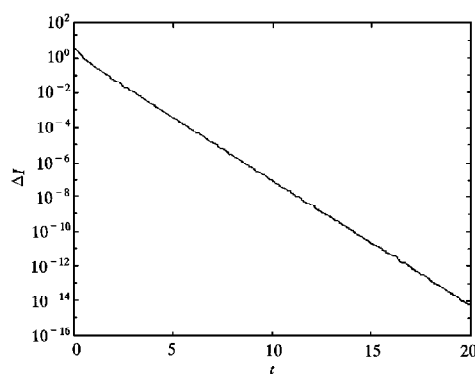


图 8 I_1 与 I_2 之差的绝对值时间序列 ($\alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1.6, \beta_1 = \beta_2 = 0.8, r_1 = r_2 = 0.005$). 虽然 α_1 和 α_2 之差较大, 仍可获得同步.

图 7 给出在 $\beta_1 = \beta_2 = 0.8, r_1 = r_2 = 0.005$ 条件下, 具有不同参数 α ($\alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1.6$) 的两个子系统的混沌信号时间序列. 图 8 表明混沌信号的严格同步, 即 ΔI 的收敛行为, 可以看出, ΔI 随时间很快趋向于零.

5 结 论

本文利用驱动的概念,研究了两个非同参数混沌子系统间的同步行为.考虑到在实际应用中,驱动系统与响应系统间会存在一定的参数差别,我们注意到,当驱动系统与响应系统参数间存在误差时,驱动系统与响应系统间的混沌同步只是相对意义上的同步.同时,对于一稳定自治方程,当利用混沌信号对其进行驱动时,所得到的输出信号是混沌信号.基于这一结论,我们拓宽了驱动与响应子系统混沌同步的应用范围,即利用同一混沌信号去驱动两个子系统,实现两个响应子系统之间的混沌同步.

考虑到混沌在未来激光保密通信中的应用,本文以 Lorenz 模型为驱动源,具体研究了两激光系统间的混沌同步性质.发现在具有相同饱和参数的激光系统之间尽管存在抽运参数的差异,实现其混沌同步是可行的,且实验方案简单.本文的结果对混沌实验研究将具有指导意义.

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2374.
- [3] M. A. Matias, J. Guemez and C. MartIm, *Phys. Lett.*, **A226**(1997), 264.
- [4] T. Yang, L. B. Yang and C. M. Yang, *Phys. Lett.*, **A226**(1997), 349.
- [5] G. Chen, X. Dong, *Int. J. Bifurc. Chaos.*, **3**(1993), 1363.
- [6] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20**(1963), 130.

UTILIZATION OF DRIVING SUBSYSTEMS TO CONSTRUCT SYNCHRONIZATION WITH CHAOTIC SIGNALS

LIU YU-HUAI MA JUN LU YI-QUN

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Science, Hefei 230031)

(Received 20 April 1998; revised manuscript received 11 June 1998)

ABSTRACT

The model of driving Lorenz systems is examined in the case that there are some parameter differences between the drive system and the response system. It is found that the strict synchronization does not exist although the parameter difference is small. We also explore the dynamic behaviors of a stable laser system driven by the chaotic signal, and we show that there is no synchronization between the drive and the response. However, this leads to the concepts of driving two subsystems with the chaotic signal, and leads to the synchronization among the subsystems. We apply these ideas to the laser subsystems, and the synchronization of the two laser subsystems, which are of different parameters and driven by the x component of the Lorenz system, is presented.

PACC: 0545

* Key project of fundamental research of Chinese Academy of Science(No. KJ951-J1-703).