

# 对数型折射率饱和和非线性介质中光孤子 高斯型呼吸模式

唐永林 李大义 陈建国 康 俊

(四川大学光电系, 成都 610064)

(1998 年 10 月 26 日收到; 1998 年 11 月 24 日收到修改稿)

根据对数型折射率饱和和非线性介质中光束尺寸和波阵面曲率变化所遵循的方程, 详细描述了空间光孤子高斯型呼吸模式. 采用势函数分析方法, 对光束尺寸一阶导数的正、负号进行了正确的选择, 并计算了呼吸模式的光束尺寸、波阵面曲率半径、呼吸周期等重要参量.

PACC: 4265

## 1 引 言

脉冲光束在非线性介质中的传输一直是一个颇受关注的问题<sup>[1-5]</sup>. 前人已经对克尔介质进行了大量的研究, 在二维(一个横向  $x$  和一个传播方向  $z$ ) 情况下获得了传播方程的解析解, 即双曲正割形式的孤子解<sup>[6]</sup>. 不过, 对三维情形的求解还需借助数值计算的方法. 文献[1]说明了在克尔介质中产生高斯光束自陷的可能性, 并指明了这种空间孤子是不稳定的, 一旦受到小的扰动, 就可能会引起光束的一直发散或强烈收缩而崩塌. 文献[2]则指出由于饱和效应的出现, 光束可能在崩塌前形成稳定的孤子. 文献[3]采用变分法和数值法讨论了时空非对称的初始光脉冲在饱和克尔介质中的传输情况, 用自相似假定, 以高斯型光脉冲为例研究了脉冲宽度和束宽随传输距离的变化.

研究表明, 不少非线性介质具有对数型折射率饱和特性<sup>[7,8]</sup>. 与此同时, 科学家对在这种对数型折射率饱和和非线性介质(LSNM)中传播的光束特性进行了研究. Snyder 等人<sup>[7]</sup>预言了在 LSNM 中形成空间光孤子高斯型呼吸模式, 即光束尺寸准周期变化的一种空间孤子形态(mighty morphing soliton)的可能性; Tikhonenko<sup>[8]</sup>在实验上观察到这种空间光孤子形态. 本文根据导出的光束尺寸和波前变化所遵循的方程, 详细描述了高斯光束在 LSNM 中形成的空间光孤子高斯型呼吸模式. 采用势函数分析方法, 对光束尺寸一阶导数的正、负号进行了正确的选择, 并计算了呼吸模式的光束尺寸、波阵面曲率半径、呼吸周期等重要参量.

## 2 基本方程

把形为  $A(x, y, z, t)\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_0 t)]$  的电场代入麦克斯韦方程, 可得<sup>[5]</sup>

$$i\partial A/\partial z + (1/2k_0)(\partial^2 A/\partial x^2 + \partial^2 A/\partial y^2) - (k_2/2)\partial^2 A/\partial \tau^2 + k_0(\delta n/n_0)A = 0, \quad (1)$$

式中  $k$  为波矢,  $\omega_0$  为中心频率,  $\tau (= t - k_1 z)$  为延迟时间,  $\delta n$  为非线性效应引起的折射率变化,  $n_0$  为背景折射率. 在推导(1)式时, 我们已假设电场包络  $A$  为  $z$  的慢变函数, 波矢  $k$  沿传播方向  $z$ , 其大小为  $2\pi n(I)/\lambda$  ( $n$  为光强为  $I$  时的折射率,  $\lambda$  为真空波长),  $k_m$  的定义为

$$k_m = (\partial^m k / \partial \omega^m)_{\omega=\omega_0} \quad (m = 0, 1, 2). \quad (2)$$

在一般情况下, 光强  $I$  远大于 LSNM 的阈值  $I_t$ , 因而 LSNM 的  $\delta n$  可表示为<sup>[7]</sup>

$$\delta n = n_2 \ln(I/I_t), \quad (3)$$

式中  $n_2$  为非线性系数. 当考虑空间中传播的光束时, (1)式与  $\tau$  无关, 于是问题变成了空间 2+1 维问题. 作为研究的第一步, 首先考虑圆对称高斯光束, 其普遍形式为

$$A(r, z) = B(z) \exp\{-r^2/2\sigma^2(z) + i[\alpha(z) + \beta(z)r^2]\}. \quad (4)$$

联立(1)和(4)式, 可求得 4 个耦合方程. 而在此我们感兴趣的是两个量, 即光束尺寸  $\sigma(z)$  和曲率  $\beta(z)$ , 它们所满足的方程为

$$d\sigma/dz - 2\beta\sigma/k_0 = 0, \quad (5a)$$

$$d\beta/dz - 1/(2k_0\sigma^4) + 2\beta^2/k_0 + k_0 n_2/(n_0\sigma^2) = 0, \quad (5b)$$

由此可导出

$$d^2 F/dZ^2 - 1/F^3 + 1/F = 0, \quad (6)$$

式中归一化光束尺寸  $F = \sigma/\sigma_s$ , 传播距离  $Z = z/z_p$ , 且

$$\sigma_s = (n_0/2n_2k_0^2)^{1/2}, \quad (7a)$$

$$z_p = n_0/(2k_0n_2). \quad (7b)$$

分析表明,  $F=1$  为(6)式的特解, 它对应静空间孤子. 当高斯光束以束腰射入 LSNM (即  $dF/dZ=0$ ), 且腰斑半径为  $\sigma_s$  (即  $F=1$ ) 时, 高斯光束在传播过程中光束尺寸不变, 波阵面始终保持为平面. 在一般情况下, 入射条件不一定满足这种静孤子条件, 从而形成呼吸模式<sup>[7]</sup>. 换言之, 高斯光束在传播过程中, 横向场为高斯光束分布不变, 但光束尺寸在一个最大值与一个最小值之间周期变化.

### 3 呼吸模式

#### 3.1 呼吸的必然性

首先采用势函数分析方法, 利用势场中粒子的运动规律来说明高斯光束在 LSNM 中呼吸的必然性. 事实上, 将  $F$  看作位移,  $Z$  看作时间, (6)式与势场  $V(F)$  作用下质量为 1 的粒子运动方程是一致的, 其中  $V(F)$  满足

$$-\partial V(F)/\partial F = 1/F^3 - 1/F. \quad (8)$$

除去一个在势函数中并不重要的常数外, 可把势函数写作

$$V(F) = 1/(2F^2) + \ln F. \quad (9)$$

简单的计算表明,  $F=1$  时, 势取最小值  $V_m$ . 同时, 由粒子的运动方程可导出粒子的能量守恒式为

$$\frac{1}{2} f^2 + V(F) = \frac{1}{2} f_{in}^2 + V(F_{in}) = W, \quad (10)$$

式中  $f$  为光束尺寸  $F$  对传播距离  $Z$  的一阶导数(即  $f = dF/dZ$ ), 对应粒子运动的速度. 下标  $in$  为入射处高斯光束的参量,  $F_{in}$  和  $f_{in}$  分别对应粒子的初始位移和初始速度. 按照类比,  $f^2/2$  代表粒子的动能, (10) 式等号右端则给出了粒子的能量  $W$ .

图 1 给出粒子的势函数曲线, 同时给出总能量为  $W$ 、初始位移为  $F_{in}$  的粒子所处的位置  $C$ . 由于粒子的总能量为  $W$ , 因而当粒子运动到代表  $W$  的水平线与势函数曲线的两个交点  $A$ (或  $B$ ) 时, 粒子的速度为零, 全部能量都转化为势能. 此后粒子将从  $A$ (或  $B$ ) 向势阱底部  $D$  点回落. 当粒子达到  $D$  时, 粒子的势能达到最小值  $V_m$ , 速度和动能达到最大. 然后粒子向  $B$ (或  $A$ ) 运动, 到达  $B$ (或  $A$ ) 点后粒子速度降为零, 接着又由  $B$ (或  $A$ ) 经过  $D$  最后回到  $A$ (或  $B$ ), 形成一个周期运动. 由此分析可知, 光束尺寸将在  $A$  和  $B$  对应的  $F_A$  和  $F_B$  之间来回周期变化, 形成光束的呼吸模式.

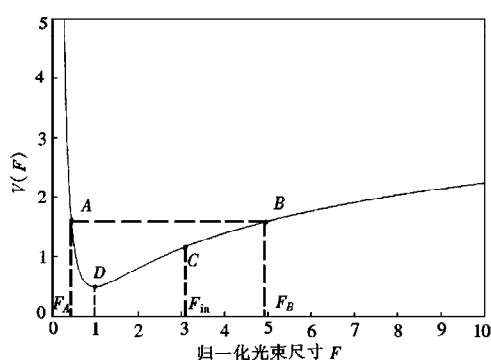


图 1 粒子的势函数曲线  $F_{in}$  为初始位置,  $F_A$  和  $F_B$  分别为光束尺寸的最小和最大值

考察势函数表达式(9)可知, 当  $F$  趋于零和  $\infty$  时,  $V$  都趋于  $\infty$ . 亦即我们研究的这个势阱的阱壁是无限高, 那么在这样的势阱中运动的粒子, 永远不可能越出势阱. 于是  $F_A$  不可能为零,  $F_B$  始终存在. 由此可知, 在 LSNM 中传播的高斯光束必然呼吸, 它既不可能形成崩塌式的自聚焦, 也不可能一直发散, 这是与不包括饱和效应的克尔介质的重要区别之处. 当然, 这种结论是基于光强足够强的假设情况下得出的理论结果而不是实验结果. 虽然研究表明不少介质的饱和特性可用对数函数来描述<sup>[7]</sup>, 而且在实验中也观察到对数饱和性<sup>[8]</sup>, 但严格说来对数函数并不能表达常规意义下的饱和(即它在光强无穷大时并不收敛), 只不过是降低了非线性效应增长的速度而已. 可见对数函数只能在某一范围内较好地描述某些介质的非线性特性, 因此(9)式具有局限性. 在实际的非线性介质中形成的呼吸模式的光束尺寸的变化应该有一定范围. 由此分析可知, 只要光束的输入条件偏离孤子条件不太大时, 光束的呼吸模式必然存在; 超过一定限度则光束在非线性介质中传播一段距离后还是可能发散.

### 3.2 呼吸的上下限

如果粒子开始时静止于势阱底部,势能为  $V_m$ ,速度  $f_{in}=0$ ,总能量  $W=V_m$ ,粒子将永远处于势阱底部平衡位置  $D$  处.这就是静空间孤子状态.当粒子能量大于  $V_m$  时,光束将形成呼吸模式,其最小和最大光束尺寸将满足方程

$$1/(2F_{A,B}^2) + \ln F_{A,B} = f_{in}^2/2 + 1/(2F_{in}^2) + \ln F_{in}. \quad (11)$$

从前面的分析可知,势函数形成一个具有无限高阱壁的势阱,则(11)式应该有且只有两个解.值得一提的是:如果入射高斯光束的腰斑与 LSNM 的输入端面重合(即  $f_{in}=0$ ),那么入射高斯光束的束腰必然是光束呼吸模式的最大或最小光束尺寸中的一个,即如果  $\sigma_{in}$  小于  $\sigma_s$ ,则  $F_{in}=F_A$ ;如果  $\sigma_{in}$  大于  $\sigma_s$ ,则  $F_{in}=F_B$ .

图 2 给出不同输入参量(能量)  $W$  下的归一化光束尺寸的最大值和最小值.从图 2 可见,当  $W=V_m$  时,  $F_A=F_B$ ,光束形成静空间孤子;否则  $F_A \neq F_B$ ,光束形成呼吸模式.

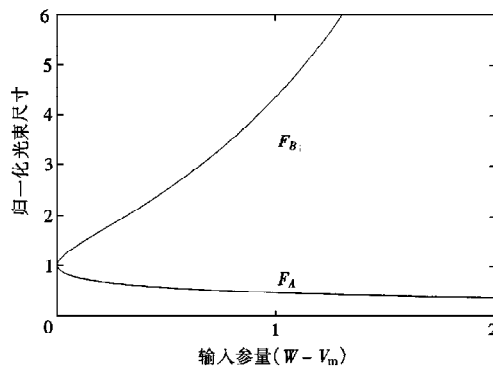


图 2 高斯型呼吸模式的归一化光束尺寸的最大值( $F_B$ )和最小值( $F_A$ )随输入参量的变化

### 3.3 呼吸模式的波阵面

由(10)式得

$$dF/dZ = \pm [2(W - V)]^{1/2}. \quad (12)$$

将(12)式代入(5a)式,得

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2F\sigma_s^2} (W - V)^{1/2}. \quad (13)$$

从高斯光束的一般形式可知  $R = k_0/2\beta$ ,故不难得出波阵面的曲率半径满足

$$R = \pm \frac{\sqrt{2}F\sigma_s^2 k_0}{2} (W - V)^{-1/2}, \quad (14)$$

式中的正负号正是我们要讨论的问题之一.在 Snyder<sup>[7]</sup>的文章中也遇到过符号问题,但因为作者将讨论的范围限制在高斯光束以束腰入射这种特殊情况,从而避开了这个问题.然而,在采用势函数分析后,这个问题便可自动得到解决.现在回到势函数曲线图上去,从图 1 可看出,当粒子从  $A$  向  $B$  运动时,呼吸模式光束尺寸由小变大,此时  $dF/dZ$  为正,从而(12)式取正号;当呼吸模式尺寸由大变小时,(12)式则取负号.考虑到在  $A$  和  $B$  处,波

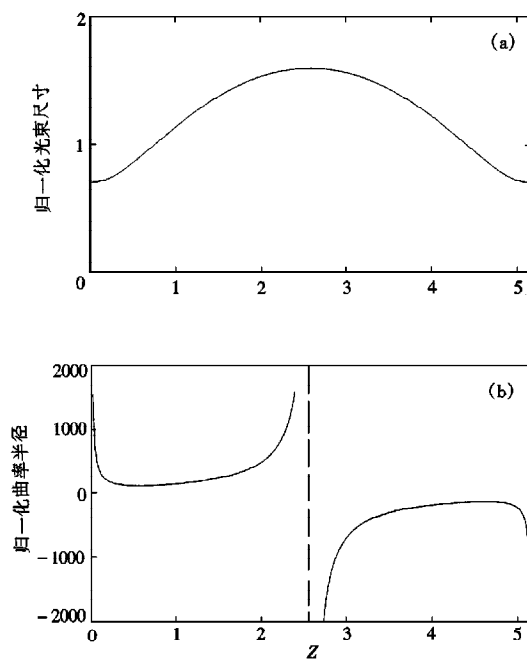


图 3 归一化光束尺寸(a)与曲率半径(b)变化曲线

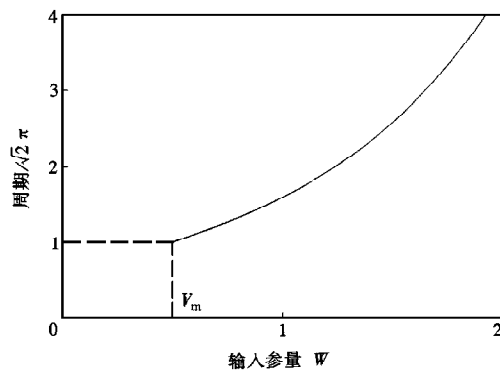
阵面为平面,我们可以得出结论:在呼吸模式沿  $Z$  轴传播的过程中,在光束尺寸由  $F_A$  增大到  $F_B$  的区域内,波阵面向  $Z$  方向凸(对应  $\beta$  和  $R$  取正),而曲率半径随  $Z$  先由大到小,然后再由小到大;在光束尺寸由  $F_B$  减小到  $F_A$  的区域内,波阵面是凹的(对应  $\beta$  和  $R$  取负值),曲率半径的绝对值由大到小,再由小到大.图 3 给出呼吸模式的光束尺寸(a)和曲率半径(b)的变化情况.图 3 使用的参数为  $n_2 = 2 \times 10^{-4}$ ,  $n_0 = 2$ ,  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}^{[9]}$ ,  $F_{\text{in}} = 0.7$ ,  $f_{\text{in}} = 0$ .图 3(a)所示光束尺寸的周期变化已经被观察到,从而这一现象在实验上得到了证实<sup>[8]</sup>.

### 3.4 呼吸周期

由(12)式积分可得

$$Z_T = 2 \int_{F_A}^{F_B} [2(W - V)]^{-1/2} dF. \quad (15)$$

利用上式进行简单的计算,给出了周期与输入参量(能量)  $W$  的关系曲线,如图 4 所示.从图 4 可见,呼吸周期随输入参量  $W$  的增大而增大,并且这种增大的趋势也随输入参量  $W$  的增大而增大.

图 4 呼吸周期随输入参量  $W$  变化的关系曲线

## 4 结 论

本文导出 LSNM 中传播的高斯光束的尺寸和波前变化所遵循的方程,采用势函数模型详细描述了空间光孤子高斯型呼吸模式.推导证实了在这种介质中可以获得稳定的二

维静空间孤子,其条件是高斯光束以束腰入射,且束腰斑半径与非线性系数满足一定关系.当光束偏离静空间孤子条件入射时,可以形成空间光孤子高斯型呼吸模式.借助势函数分析方法,对光束尺寸一阶导数的正、负号进行了正确的选择,于是可以对非束腰入射的高斯光束在 LSNM 中的传播情况进行分析.展示了光束尺寸和波阵面曲率半径随传播而周期变化的曲线,呼吸周期与输入参数的关系.用势的分析方法与用其他分析方法得到的结果一致,但却在物理图像上更加清晰.它简单可行,可方便地对任何形状的光束脉冲,针对具体的非线性效应,对形成稳定的空间、时间或时空孤子条件进行分析.

- [1] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984). Chap. 17.
- [2] M. Karlsson, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 2726.
- [3] 李建庆、周国生、杨伯君等, *物理学报*, **47**(1998), 19 [Li Jian-qing, Zhou Guo-sheng, Yang Bo-jun *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 19(in Chinese)].
- [4] 王中阳、张正泉、徐至展, *光学学报*, **17**(1997), 937 [Wang Zhong-yang, Zhang Zheng-quan, Xu Zhi-zhan, *Acta Optica Sinica*, **17**(1997), 937(in Chinese)].
- [5] 李大义、唐永林、韩松等, *光学学报*, **18**(1998), 1629 [Li Da-yi, Tang Yong-lin, Han Song *et al.*, *Acta Optica Sinica*, **18**(1998), 1629(in Chinese)].
- [6] J. S. Aitchison, A. M. Weiner, Y. Silberberg *et al.*, *Opt. Lett.*, **15**(1990), 471.
- [7] W. Snyder, J. D. Michell, *Opt. Lett.*, **22**(1997), 16.
- [8] V. Tikhonenko, *Opt. Lett.*, **23**(1998), 594.
- [9] D. N. Christodoulides, T. H. Coskun, R. I. Joseph, *Opt. Lett.*, **22**(1997), 1080.

## GAUSSIAN-TYPE BREATH MODES OF SPATIAL SOLITON FORMED IN LOGARITHMICALLY SATURABLE NONLINEAR MEDIA

TANG YONG-LIN LI DA-YI CHEN JIAN-GUO KANG JUN

(Department of Optoelectronics Sichuan University, Chengdu 610064)

(Received 26 October 1998; revised manuscript received 24 November 1998)

### ABSTRACT

Using equations governing the variation of the beam size and the curvature of wave front in the logarithmically saturable nonlinear media, the Gaussian-type breath mode of spatial soliton has been described in detail. With the aid of a potential method, the positive and negative signs can be assigned to the first order derivative of the beam size with respect to the propagation distance. Thus, important parameters of the breath mode, such as the beam size, curvature radius of the wave front, the period, etc., have been calculated.

PACC: 4265