

变质量物体的相对论四维协变方程

方建会

(石油大学(华东)应用物理系, 东营 257062)

(1998 年 9 月 11 日收到; 1999 年 1 月 10 日收到修改稿)

将经典质量的变化和质量随速度而变化这一相对论效应同时考虑, 建立变质量物体的相对论四维协变方程, 阐述方程的物理意义, 并由该方程推出 Ackeret 公式.

PACC: 0330

1 引 言

一变质量物体, 在运动过程中其静止质量连续地并入或分离, 从而使其静止质量连续变化. 假设这种质量的并入或分离是属于这些质量与变质量物体的接触作用, 也就是说, 这些质量与变质量物体相并或分离时发生碰撞而产生速度的突变, 从而使变质量物体的速度发生连续的改变, 并入或分离后, 作用也就停止. 对于这样的经典质量发生变化的物体, 如果再考虑相对论效应引起的质量随速度的变化, 其动力学方程是怎样的呢? 本文就这一问题进行研究, 给出同时考虑有经典质量并入或分离及质量随速度而变化这一相对论效应时物体动力学方程的四维协变形式, 阐述方程的物理意义, 并由该方程推出 Ackeret 公式.

2 相对论四维协变方程及其物理意义

对静止质量 m_0 为常量的物体(质点), 引入四维动量 $p_\mu = m_0 v_\mu$ 后, 可定义四维力 G_μ 为^[1,2]

$$G_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}, \quad (1)$$

其中 $d\tau$ 是固有时微分. 若令

$$G_\mu = (G, G_4), \quad G = \frac{F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2)$$

不难确定出 G_4 ,

$$G_4 = \frac{i}{c} \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}. \quad (3)$$

称(1)式为常质量物体相对论动力学方程的四维协变形式. (1)式中的 G_μ 由(2)和(3)式给出.

对 N 个物体组成的物体系(质点系)也可引入系统的四维动量 $p_\mu = \sum_{j=1}^N m_{0j} v_{\mu j}$, 同样可定义其四维力为

$$G_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}, \quad (4)$$

其中的 p_μ 和 G_μ 是对系统而言的. 若能确定出系统的 G_μ , 则由(4)式就可得到系统的相对论四维协变方程.

现在利用(4)式建立变质量物体的相对论四维协变方程.

由(4)式得到

$$dp_\mu = G_\mu d\tau,$$

积分得

$$p_{\mu 2} - p_{\mu 1} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_\mu d\tau. \quad (5)$$

对相对论情况下静止质量 m_0 有并入或分离(即 m_0 发生变化)的物体, 假设在 τ 时刻, 静止质量为 m_0 的物体以速度 v 运动, 另一静止质量为 Δm_0 的微粒以速度 u 运动, 在 τ 时刻后的 $\Delta\tau$ 时间内两者合并, 合并后的静止质量为 m'_0 , 速度为 v' , 则由(5)式可知

$$m'_0 v'_\mu - m_0 v_\mu - \Delta m_0 u_\mu = \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} G_\mu d\tau.$$

上式除以 $\Delta\tau$ 得到

$$\frac{m'_0 v'_\mu - m_0 v_\mu}{\Delta\tau} - \frac{\Delta m_0}{\Delta\tau} u_\mu = \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} G_\mu d\tau / \Delta\tau.$$

由于 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时, $m'_0 \rightarrow m_0$, $v'_\mu \rightarrow v_\mu$, 故对上式取 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时的极限有

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 v_\mu) - \frac{dm_0}{d\tau} u_\mu = G_\mu. \quad (6)$$

令

$$G_\mu = (G, G_4), \quad G = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7)$$

$\mathbf{F}$ 为作用于 m_0 和 Δm_0 上的三维外力的主矢. 将(6)式与 v_μ 作内乘, 得

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - v^2/c^2} + G_4 \frac{ic}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &= \frac{dm_0}{d\tau} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{1 - v^2/c^2} - \frac{c^2}{1 - v^2/c^2} \right] \\ &\quad - \frac{dm_0}{d\tau} \left[\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} \right], \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} G_4 &= \frac{i}{c} \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{dm_0}{d\tau} \left[\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] \cdot \mathbf{v} \right. \\ &\quad \left. + \frac{dm_0}{d\tau} \left[\frac{c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

(6) 式就是我们得到的变质量物体的相对论四维协变方程, 其中的 G_μ 由(7), (8) 式给出. 方程(6)包括下列两个方程:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] - \frac{dm_0}{d\tau} \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \mathbf{G}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] - \frac{dm_0}{d\tau} \frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} + \frac{dm_0}{d\tau} \left[\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \cdot \mathbf{v}. \quad (10)$$

由(9)和(10)式可得到

$$m_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] = \mathbf{F} + \Phi^*, \quad (9a)$$

$$m_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \Phi^* \cdot \mathbf{v}, \quad (10a)$$

其中 $\Phi^* = \frac{dm_0}{dt} \left[\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]$, $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. 我们称 Φ^* 为相对论性反

推力, 在 $v \ll c$, $u \ll c$ 时, Φ^* 化为经典情况下的反推力 $\Phi = \frac{dm_0}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v})$. 称(9a) 式为相对论性 Мещерский 方程.

(9a) 式表明, $\mathbf{F}$ 与 Φ^* 之和等于速度 v 变化引起的相对论动量 $\mathbf{p} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 的变化率; (10a) 式表明, $\mathbf{F}$ 与 Φ^* 的功率之和等于 v 变化引起的相对论能量 $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 的变化率. 此物理意义非常清楚, 因由 $\mathbf{p} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 和 $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 知, m_0 变化或 v 变化都会引起 $\mathbf{p}$ 和 E 发生变化, 然而 m_0 的变化取决于其自身的变化规律, 与 $\mathbf{F}$ 和 Φ^* 的作用无关, $\mathbf{F}$ 和 Φ^* 的作用只使 v 发生变化.

从 m_0 与 dm_0 发生相互作用的角度来考虑, 反推力 Φ^* 的功率应等于单位时间内 dm_0 的相对论能量的减少, 即

$$\Phi^* \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{dm_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{dm_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] / dt = \frac{dm_0}{dt} \left[\frac{c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]. \quad (11)$$

注意到(11)式后, 把(9a)和(10a)式改写为

$$m_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] + \frac{dm_0}{dt} \left[\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] = \mathbf{F}, \quad (9b)$$

$$m_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] + \frac{dm_0}{dt} \left[\frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (10b)$$

(9b) 和(10b) 式等号左端的第一项分别表示速度 v 变化引起的动量变化率和能量变化率, (9b) 和(10b) 式等号左端的第二项分别表示质量 dm_0 并入或分离造成的动量变化率和能量变化率.

当 $F=0$ 时, 由(9b) 和(10b) 式可得到

$$d\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] - \frac{dm_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 0, \quad (12)$$

$$d\left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] - \frac{dm_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 0. \quad (13)$$

(12) 和(13) 式正是动量守恒和能量守恒的结果.

3 Ackeret 公式的推导

对略去重力和阻力的相对论火箭, 当只考虑火箭的一维运动时, 注意到(11) 式后, 由(9a) 和(10a) 式可得到(这里 u 与 v 方向相反)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] = -u \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]. \quad (14)$$

于是有

$$\frac{v dm_0 + m_0 dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_0 v^2 dv}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = -\frac{u dm_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{u m_0 v dv}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}}. \quad (15)$$

根据相对论的速度变换公式, 有

$$-u = \frac{-u^* + v}{1 + (-u^*)v/c^2}, \quad (16)$$

式中 u^* 是火箭喷出质量相对火箭的速度. 将(16) 式代入(15) 式整理得到

$$-\frac{dm_0}{m_0} = \frac{dv}{u^*(1-v^2/c^2)}, \quad (17)$$

即

$$-\frac{dm_0}{m_0} = \frac{c}{2u^*} \left[\frac{1}{1-v/c} + \frac{1}{1+v/c} \right] d\left[\frac{v}{c}\right]. \quad (18)$$

若发射时($v=0$) 火箭的起飞质量为 M_0 , 则积分上式可得到

$$\frac{M_0}{m_0} = \left[\frac{c+v}{c-v} \right]^{c/2u^*}. \quad (19)$$

此式就是 Ackeret 公式^[3].

4 讨 论

本文结果具有更一般的意义, 对相对论情形和非相对论情形、变质量物体和常质量物体都适用. 当 m_0 为常量时, 本文结果化为常质量物体的相对论结果^[1, 2]; 当 $v \ll c$, $u \ll c$ 时, 本文结果化为经典变质量物体的结果^[4]; 当 $v \ll c$, $u \ll c$, 且 m_0 为常量时, 本文结果化为经典常质量物体的结果.

[1] 蔡伯濂, 狭义相对论(高等教育出版社, 北京, 1991), 第126页[Cai Bo-lian, Special Theory of Relativity (Higher

- Education press, Beijing, 1991), p. 126(in Chinese)].
- [2] 郭硕鸿, 电动力学(高等教育出版社, 北京, 1979), 第 259 页[Guo Shuo hong, Electrodynamics(Higher Education Press, Beijing, 1979), p. 259(in Chinese)].
- [3] J. Ackeret, *Helv. Phys. Acta*, **19**(1946), 103.
- [4] 杨来伍、梅凤翔, 变质量系统力学(北京理工大学出版社, 1989), 第 3, 59 页[Yang Laiwu, Mei Fengxiang, Mechanics of Variable Mass System (Beijing Institute of Technology, Beijing, 1989), p. 3, 59(in Chinese)].

RELATIVISTIC FOUR-COVARIANT EQUATION OF VARIABLE-MASS BODY

FANG JIAN-HUI

(Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying 257062)

(Received 11 September 1998; revised manuscript received 10 January 1999)

ABSTRACT

In this paper, simultaneously considering the variation of classical mass and the relativistic effect of mass variation with velocity, a relativistic four-covariant equation of variable mass body is built. And the physical meaning of this equation is demonstrated. Ackeret formula is derived from the equation.

PACC: 0330