

Gelfand-Dickey 算子分解, Bäcklund-Darboux 变换及对称

王 宁

(青岛海洋大学技术科学学院, 青岛 266003)

(1998 年 11 月 9 日收到)

利用 Gelfand-Dickey 算子的分解导出了 GKdV 方程的 n 个 Bäcklund-Darboux (BD) 变换及对应的对称的精确形式. 这一结果推广了 Lou 等最近关于 KdV, Kadomtsev-Petviashvili (KP) 等方程的 BD 变换同非局所对称性的结果. 作为副产品同时给出 Generalized-KdV 方程的行列式形式解.

PACC: 0340K

1 引 言

Bäcklund-Darboux (BD) 变换是(偏)微分方程的一种对称变换, 能连接同一方程的不同解或不同方程间的解, 其最大用途是可以直接构造孤立子系的孤立子解^[1]. 最近 Lou 等^[2]发现利用 BD 可以直接导出非线性孤立子系的非局所对称, 并构造了 KdV, Kadomtsev-Petviashvili (KP) 等方程的非局所对称.

首先以 KdV 方程为例, 说明 Lou 等的基本思路. KdV 方程有 Darboux 变换

$$u = u' + 2\partial \left[\frac{\phi_x(x, \lambda)}{\phi(x, \lambda)} \right],$$

式中 ϕ 为对应 Schrödinger 方程的解, λ 为谱参数. 将上式在谱参数 $\lambda=0$ 附近基展开

$$u' = u - 2\partial^2 \ln \phi \Big|_{\lambda=0} - 2\lambda \partial^2 \left[\frac{\phi_\lambda}{\phi} \right] \Big|_{\lambda=0} + o(\lambda^2).$$

由于 $u_0 \equiv u - 2\partial^2 \ln \phi \Big|_{\lambda=0}$ 本身是 KdV 方程的解, 根据对称的定义所以量 $\sigma \equiv \partial^2 \left[\frac{\phi_\lambda}{\phi} \right] \Big|_{\lambda=0}$ 实际上是 KdV 方程的一个对称. 显然 Lou 等利用了 KdV 方程的 Darboux 变换可以利用谱方程的解表示这一基本事实.

本文的目的是将上述思路推广到由 Gelfand-Dickey (GD) 算子决定的 Generalized-KdV (一般 KdV) 方程族^[3]. Adler^[4]在 Kuperschmidt-Wilson (KW)^[5]工作的基础上给出了 GD 算子决定的孤立子系的 BD 变换, 并指出这些对称实质上是由 KW 辅助动力学变量的置换子群所导致. 然而, Adler 的结果难以给出 Generalized-KdV 方程 BD 变换的精确形式 (必须通过 Miura 变换), 但导出一般对称, 必须知道其精确形式. 为了克服这一问题, 本文中采用了一种不同的分解表示形式, 由此不但可以构造对应的 n 个 BD 变换的精确形式,

而且可以简单地构造对应的非局所对称. 简单的例将用于说明.

2 算子分解与 BD 变换

考虑一般 KdV 方程的 Lax 算子, GD 算子^[3]

$$L_n = \partial^n + u_{n-2}\partial^{n-2} + \dots + u_0, \quad (1)$$

式中 $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial$. 动力学变量 $(u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_0)$ 满足 Lax 方程

$$\frac{dL_n}{dt_m} = [(L^{m/n})_+, L_n]. \quad (2)$$

假定 GD 算子分解为

$$L_n = (\partial + y_n)(\partial + y_{n-1}) \dots (\partial + y_1) \equiv l_n l_{n-1} \dots l_1. \quad (3)$$

可以证明动力学变量 $(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$ 满足以下的非线性动力学方程^[6]:

$$\frac{dl_i}{dt_m} = P_i l_i - l_i P_{i-1}, \quad (4)$$

$$P_i \equiv (L_{\Omega}^{m/n})_+, \quad (5)$$

式中 Ω 定义了一个置换

$$\Omega: l_n \rightarrow l_1, l_{n-1} \rightarrow l_n, \dots, \quad (6)$$

$$L_{\Omega}^i = l_i l_{i-1} \dots l_{i+1}. \quad (7)$$

不难验证相邻算子 $L_{\Omega}^i, L_{\Omega}^{i+1}$ 之间满足下列关系:

$$l_{i+1} L_{\Omega}^i = L_{\Omega}^{i+1} l_{i+1}. \quad (8)$$

命题 1 算子 L_{Ω}^i 满足动力学方程

$$\frac{dL_{\Omega}^i}{dt_m} = [(L_{\Omega}^{m/n})_+, L_{\Omega}^i], \quad (9)$$

即置换 Ω 实际上是一个动力学系统的对称群变换.

证明: 同约束 KP 方程的证明完全一样, 可参见文献[6].

算子分解(3)式可以不唯一, Kuperschmidt-Wilson^[5]首先引入了一种分解, 但这种分解对直接推导非局所对称并不方便, 我们使用另一种分解形式. 当假定 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 是算子 L_n 的一组基本解时, 我们有

命题 2 分解(3)式中

$$y_i = \partial \left[\ln \frac{W_{i-1}}{W_i} \right], \quad (10)$$

式中 $W_i = W[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i]$ 表示 Wronskian 行列式, 其中 $1 = W[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^{[7]}$.

记

$$L_{\Omega}^i \equiv \partial^n + u_{n-2}^i \partial^{n-2} + \dots + u_0^i, \quad (11)$$

$$L_{\Omega}^{i+1} \equiv \partial^n + u_{n-2}^{i+1} \partial^{n-2} + \dots + u_0^{i+1}, \quad (12)$$

将方程(11), (12)式代入(8)式, 方程两侧均为 $n+1$ 阶微分算子, 比较系数得到 ∂^{n-1} 系数

$$u_{n-2}^i = u_{n-2}^{i+1} + n \partial y_i, \quad (13)$$

∂^{n-2} 系数

$$u_{n-3}^i + y_i u_{n-2}^i + \partial u_{n-2}^i = \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \partial^2 y_i + u_{n-2}^{i+1} y_i + u_{n-3}^{i+1}, \quad (14)$$

∂^{n-i} 系数

$$u_{n-i-1}^i + y_i u_{n-i}^i + \partial u_{n-i}^i = \sum_{k=0}^i u_{n-k}^{i+1} \begin{bmatrix} n-k \\ n-i \end{bmatrix} \partial^{i-k} y_i + u_{n-i-1}^{i+1}, \quad (15)$$

...

∂^0 系数

$$\partial u_0^i + y_i u_0^i = \partial^n y_i + u_{n-2}^{i+1} \partial^{n-2} y_i + \dots + u_0^{i+1} y_i. \quad (16)$$

当 $(u_{n-2}^i, \dots, u_0^i)$ 已知是孤立子系的一组解时, 由 (12) – (16) 式依次可以确定 $(u_{n-2}^{i+1}, \dots, u_0^{i+1})$, 这样恰好构成一个 BD 变换. 上述步骤可以依次实施, 构成 n 个 BD 变换. 显然这些变换或对称的存在起源于置换对称群 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 上式中未知数 $(u_{n-2}^{i+1}, \dots, u_0^{i+1})$ 有 $n-1$ 个, 但关系式却有 n 个, 最后一个关系式实际上只给出 y_i 应满足的方程. 这一点可以在第四节的应用例看得更清楚.

注:

在 Adler 的 BD 变换公式使用了 KW 辅助动力学变量, 而 KW 辅助动力学变量与原动力学变量之间必须通过一般 Miura 变换连接, 对于高阶 Generalized KdV 方程这种关系变得非常繁杂, 没有 (13) – (16) 式简明.

现在给出以上变换的一个副产品, 解的行列式表示形式. 取

$$u_{n-2}^i = 0, \dots, u_0^i = 0, \quad (17)$$

由 (13) – (16) 式有

$$u_{n-2}^{i+1} = -n \partial y_i, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \partial^2 y_i + u_{n-2}^{i+1} y_i = -u_{n-3}^{i+1}, \quad (19)$$

...

由于参量 y_i 是行列式, 上式实际上给出了一种行列式表示形式.

3 非局所对称

下面我们将由 BD 变换导出对称. 同文献 [2] 中 Prop. 2 的证明一样, (13) – (16) 式在 $\lambda = 0$ 近旁形式展开得到

$$u_{n-2}^{i+1} = u_{n-2}^i - n \partial y_i \Big|_{\lambda=0} - n \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \partial y_i \Big|_{\lambda=0} + o(\lambda^2), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_{n-3}^{i+1} &= u_{n-3}^i + \partial u_{n-2}^i + u_{n-2}^i y_i \Big|_{\lambda=0} - \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \partial^2 y_i \Big|_{\lambda=0} - (u_{n-2}^i - n \partial y_i) y_i \Big|_{\lambda=0} \\ &+ \lambda \left[y_i, u_{n-2}^i - \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \partial^2 y_i, \lambda + n \partial y_i, y_i - (u_{n-2}^i - n \partial y_i) y_i, \lambda \right] \Big|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

$$+ o(\lambda^2), \quad (21)$$

...

式中下标 λ 表示对参数的微分. 若 BD 变换统一表示为

$$u_k^{i+1} = g_k(u_l^i, y_i) \quad k, l = 0, 1, \dots, n-2, \quad (22)$$

则对应的对称由以下公式决定:

$$\alpha_k(i) = \frac{Du_k^{i+1}}{Dy_i} y_{i,\lambda} \quad k = 0, 1, \dots, n-2; i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

式中 $\frac{Du}{Dy_i}$ 表示 Frechet 微分. 由此可以得到 n 个 $(n-1)$ 维向量对称.

4 应用例

本节考虑简单应用例, 以说明上述一般结果. 对于 $N=3$ 有 Lax 算子

$$L_3 = \partial^3 + u_1 \partial + u_0. \quad (24)$$

对应的非线性动力学方程是 Boussinesq 方程

$$\frac{d}{dt_2} L_3 = [(L_3)^3, L_3].$$

记

$$L^0 \equiv \partial^3 + u_1 \partial + u_0 = (\partial + y_3)(\partial + y_2)(\partial + y_1), \quad (25)$$

$$L^1 \equiv \partial^3 + v_1 \partial + v_0 = (\partial + y_2)(\partial + y_1)(\partial + y_3), \quad (26)$$

$$L^2 \equiv \partial^3 + w_1 \partial + w_0 = (\partial + y_1)(\partial + y_3)(\partial + y_2), \quad (27)$$

对应有三组 BD 变换

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 3\partial y_2, \\ \partial v_1 + v_0 + y_2 v_1 &= u_0 + u_1 y_2 + 3\partial^2 y_2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \partial v_0 + y_2 v_0 &= u_0 + u_1 y_2 + 3\partial^2 y_2, \\ w_1 &= v_1 + 3\partial y_1, \\ \partial w_1 + w_0 + y_1 w_1 &= v_0 + v_1 y_1 + 3\partial^2 y_1, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \partial w_0 + y_1 w_0 &= v_0 + v_1 y_1 + 3\partial^2 y_1, \\ u_1 &= w_1 + 3\partial y_3, \\ \partial u_1 + u_0 + y_3 u_1 &= w_0 + w_1 y_3 + 3\partial^2 y_3, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\partial u_0 + y_3 u_0 = w_0 + w_1 y_3 + 3\partial^2 y_3.$$

行列式形式解

$$\begin{aligned} v_1 &= 3\partial y_i \\ v_0 &= -\frac{3}{2}\partial^2 y_i \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (31)$$

对称向量

$$\{3\partial y_{i,\lambda} - 3\partial(y_i, y_i)\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

最后可以看方程(28)中第三个方程的作用. 利用第一、二方程可以解得

$$v_0 = u_0 - \partial u_1 - 3y_2 \partial y_2, \quad (33)$$

将该式代入第三个方程得到关于函数 y_2 的一个常微分方程式.

本文推广了 Lou 等关于 BD 变换与非局所对称间的关系, 给出了一般 KdV 方程的 n 个 BD 变换及对应非局所对称的精确形式.

- [1] R. Miura, Ed. *Bäcklund Transformations*, Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin, 1976), Vol. 515; V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons* (Springer, Berlin, 1990).
- [2] S. Y. Lou and X. B. Hu, *J. Phys.*, **A30**(1997), L95.
- [3] L. A. Dickey and I. Gelfand, *J. Function Anal. and Appl.*, **10**(1976), 1245.
- [4] M. Adler, *Commun. Math. Phys.*, **80**(1981), 517.
- [5] B. Kuperschmidt and G. Wilson, *Invent. Math.*, **62**(1981), 403.
- [6] Y. Cheng, *Commun. Math. Phys.*, **171**(1995), 661.
- [7] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (London, 1926), Chap. V.

FACTORIZATION OF GELFAND-DICKEY OPERATOR, BÄCKLUND-DARBOUX TRANSFORMATION AND SYMMETRY

WANG NING

(Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

(Received 9 November 1998)

ABSTRACT

Explicit expressions of n Bäcklund-Darboux (BD) transformations and corresponding symmetries for generalized KdV (GKdV) equation, were constructed by using factorization of Gelfand-Dickey operator. This extends Lou's recent result about the BD transformations and non-local symmetries for KdV, Kadomtsev-Petviashvili equations. As a by-product, we also derive a representation of Wronskian determinant for the GKdV solution.

PACC: 0340K