

耦合压缩 Landau 态

田 旭

(武汉汽车工业大学基础课部, 武汉 430070)

黄湘友

(北京大学物理系, 北京 100871)

(1998 年 10 月 14 日收到)

引入 Landau 体系(带电粒子在垂直于均匀磁场平面内的运动)的耦合压缩态. 这类耦合压缩态所给出的关于带电粒子圆周运动的信息与非耦合压缩 Landau 态所给出的信息存在很大的差异.

PACC: 0365; 4250; 0520

1 引 言

带电粒子在垂直于均匀磁场平面内的运动是一个有价值的二维量子力学体系. 由于回旋加速器、质谱仪、霍耳效应及回旋共振测量等应用问题的关系, 人们始终关注 Landau 体系的理论研究工作. 一般量子力学方面的文献大多借助正则动量或正则角动量给出 Landau 体系的描述^[1-7], 但是正则动量和正则角动量都不具有规范不变性. 文献[8]借助具有规范不变性的圆心坐标算符和初机械动量算符, 找到 Landau 体系的非耦合压缩算符, 得到了非耦压缩 Landau 态. 这类压缩态对 Landau 体系描述的结果与规范的选择无关. 本文将进一步找出 Landau 体系的耦合压缩算符, 进而得到 Landau 体系的另一类很有特点的压缩态——耦合压缩 Landau 态. 这类耦合压缩态对 Landau 体系描述的结果也与规范的选择无关.

2 耦合压缩算符及耦合压缩上升、下降算符

设均匀磁场沿 z 轴方向, 磁感应强度大小为 B , 则带电粒子的机械动量算符和哈密顿量分别为

$$\pi_x = p_x - qA_x, \quad \pi_y = p_y - qA_y, \quad (1)$$

$$H = \frac{1}{2\mu}(\pi_x^2 + \pi_y^2), \quad (2)$$

其中 μ 和 q 分别为带电粒子的质量和电荷; 矢量 $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ 满足关系

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{e}_3. \quad (3)$$

带电粒子的海森伯方程的解可写为^[8]

$$\begin{aligned}
\pi_x &= \pi_{x0} \cos(\omega t) + \pi_{y0} \sin(\omega t), \\
\pi_y &= \pi_{y0} \cos(\omega t) - \pi_{x0} \sin(\omega t), \\
x &= x_c - \frac{1}{qB} \pi_y = x_c - \frac{1}{qB} \pi_{y0} \cos(\omega t) + \frac{1}{qB} \pi_{x0} \sin(\omega t), \\
y &= y_c + \frac{1}{qB} \pi_x = y_c + \frac{1}{qB} \pi_{x0} \cos(\omega t) + \frac{1}{qB} \pi_{y0} \sin(\omega t),
\end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\omega = qB/\mu$; x_c 和 y_c 为粒子的圆心坐标算符; π_{x0} 和 π_{y0} 为粒子的初机械动量算符; x_c, y_c, π_{x0} 和 π_{y0} 均为具有规范不变性的不变量.

借助圆心坐标算符和初机械动量算符, 可引入下列两套 Landau 体系的上升、下降算符^[8]:

$$A_1^\dagger = \left[\frac{|q|B}{2\hbar} \right]^{1/2} \left[y_c - i \frac{q}{|q|} x_c \right], \quad A_1 = \left[\frac{|q|B}{2\hbar} \right]^{1/2} \left[y_c + i \frac{q}{|q|} x_c \right], \quad (5)$$

$$A_2^\dagger = \left[\frac{1}{2\hbar|q|B} \right]^{1/2} \left[\pi_{x0} - i \frac{q}{|q|} \pi_{y0} \right], \quad A_2 = \left[\frac{1}{2\hbar|q|B} \right]^{1/2} \left[\pi_{x0} + i \frac{q}{|q|} \pi_{y0} \right]. \quad (6)$$

它们满足如下关系:

$$[A_1, A_1^\dagger] = [A_2, A_2^\dagger] = 1, \quad (7)$$

$$[A_1, A_2] = [A_1^\dagger, A_2^\dagger] = [A_1^\dagger, A_2] = [A_1, A_2^\dagger] = 0, \quad (8)$$

$$H = \left[A_2 A_2^\dagger + \frac{1}{2} \right] \hbar |\omega|, \quad (9)$$

$$x_c^2 + y_c^2 = \left[A_1 A_1^\dagger + \frac{1}{2} \right] \frac{2\hbar}{|q|B}. \quad (10)$$

有了两套上升、下降算符(5)和(6)式, 它们与文献[8]定义非耦合压缩算符

$$S_1 = \exp \left[\frac{1}{2} (Z_1^* A_1^2 - Z_1 A_1^{\dagger 2}) \right], \quad Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad (11)$$

$$S_2 = \exp \left[\frac{1}{2} (Z_2^* A_2^2 - Z_2 A_2^{\dagger 2}) \right], \quad Z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (12)$$

不同, 现定义 Landau 体系的耦合压缩算符 S 如下:

$$S = \exp \left[\frac{1}{2} (Z^* A_1 A_2 - Z A_1^\dagger A_2^\dagger) \right], \quad Z = r e^{i\theta}. \quad (13)$$

这样便可得到两套耦合压缩上升、下降算符

$$C_1^\dagger = S^\dagger A_1^\dagger S = \cosh \left[\frac{r}{2} \right] A_1^\dagger - e^{-i\theta} \sinh \left[\frac{r}{2} \right] A_2, \quad (14)$$

$$C_1 = S^\dagger A_1 S = \cosh \left[\frac{r}{2} \right] A_1 - e^{-i\theta} \sinh \left[\frac{r}{2} \right] A_2^\dagger, \quad (15)$$

$$C_2^\dagger = S^\dagger A_2^\dagger S = \cosh \left[\frac{r}{2} \right] A_2^\dagger - e^{-i\theta} \sinh \left[\frac{r}{2} \right] A_1, \quad (16)$$

$$C_2 = S^\dagger A_2 S = \cosh \left[\frac{r}{2} \right] A_2 - e^{-i\theta} \sinh \left[\frac{r}{2} \right] A_1^\dagger. \quad (17)$$

它们满足如下关系:

$$[C_1, C_2] = 0, \quad (18)$$

$$[C_1, C_1^\dagger] = [C_2, C_2^\dagger] = 1, \quad (19)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[C_1, H] = \frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[C_2, H] = 0. \quad (20)$$

3 耦合压缩 Landau 态

我们称 C_1 和 C_2 的共同本征态 $|c_1, c_2\rangle$ 为 Landau 体系的耦合压缩态. 在这类压缩态中, 可具体算得

$$\begin{aligned} \langle x_c \rangle &= \langle c_1, c_2 | x_c | c_1, c_2 \rangle = i \frac{q}{|q|} \left[\frac{\hbar}{2|q|B} \right]^{2r} \cosh\left[\frac{r}{2}\right] (c_1^* - c_1) + \\ &\quad \sinh\left[\frac{r}{2}\right] (c_2 e^{-i\theta} - c_2^* e^{i\theta}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle y_c \rangle &= \langle c_1, c_2 | y_c | c_1, c_2 \rangle \\ &= \left[\frac{\hbar}{2|q|B} \right]^{2r} \cosh\left[\frac{r}{2}\right] (c_1^* + c_1) + \sinh\left[\frac{r}{2}\right] (c_2 e^{-i\theta} + c_2^* e^{i\theta}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi_{x0} \rangle &= \langle c_1, c_2 | \pi_{x0} | c_1, c_2 \rangle \\ &= \left[\frac{\hbar|q|B}{2} \right]^{2r} \sinh\left[\frac{r}{2}\right] (c_1 e^{-i\theta} + c_1^* e^{i\theta}) + \cosh\left[\frac{r}{2}\right] (c_2^* + c_2), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi_{y0} \rangle &= \langle c_1, c_2 | \pi_{y0} | c_1, c_2 \rangle \\ &= i \frac{q}{|q|} \left[\frac{\hbar|q|B}{2} \right]^{2r} \sinh\left[\frac{r}{2}\right] (c_1 e^{-i\theta} - c_1^* e^{i\theta}) + \\ &\quad \cosh\left[\frac{r}{2}\right] (c_2^* - c_2), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle c_1, c_2 | x | c_1, c_2 \rangle \\ &= \langle x_c \rangle - \frac{1}{qB} \langle \pi_{y0} \rangle \cos(\omega t) + \frac{1}{qB} \langle \pi_{x0} \rangle \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle y \rangle &= \langle c_1, c_2 | y | c_1, c_2 \rangle \\ &= \langle y_c \rangle - \frac{1}{qB} \langle \pi_{x0} \rangle \cos(\omega t) + \frac{1}{qB} \langle \pi_{y0} \rangle \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi_x \rangle &= \langle c_1, c_2 | \pi_x | c_1, c_2 \rangle \\ &= \langle \pi_{x0} \rangle \cos(\omega t) + \langle \pi_{y0} \rangle \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi_y \rangle &= \langle c_1, c_2 | \pi_y | c_1, c_2 \rangle \\ &= \langle \pi_{y0} \rangle \cos(\omega t) - \langle \pi_{x0} \rangle \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$(\Delta x_c)^2 = (\Delta y_c)^2 = \frac{\hbar}{2|q|B} \cosh(r), \quad (29)$$

$$(\Delta \pi_{x0})^2 = (\Delta \pi_{y0})^2 = (\Delta \pi_x)^2 = (\Delta \pi_y)^2 = \frac{\hbar|q|B}{2} \cosh(r), \quad (30)$$

$$(\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = \frac{\hbar}{|q|B} \left[\cosh(r) + \frac{q}{|q|} \sinh(r) \cos(|\omega|t - \theta) \right], \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left| \Delta \left[\pi_x - \frac{1}{2} qBy \right] \right|^2 &= \left| \Delta \left[\pi_y + \frac{1}{2} qBx \right] \right|^2 \\ &= \frac{\hbar |q| B}{4} \left| \cosh(r) - \frac{q}{|q|} \sinh(r) \cos(|w|t - \theta) \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

这些结果描述了带电粒子在均匀磁场中的圆周运动. 因为 $x, y, \pi_x, \pi_y, x_c, y_c, \pi_{x0}$ 和 π_{y0} 都是具有规范不变性的实际物理量, 所以结果(21)–(32)式与规范的选择无关. 在回旋加速器(已知带电粒子圆周运动的圆心位置)和质谱仪(已知带电粒子圆周运动的初机械动量)等应用问题中, 使用(25)–(28)式是非常方便的.

从(29)和(30)式可以看出, 在耦合压缩 Landau 态 $|c_1, c_2\rangle$ 中, 共轭量 x_c 和 y_c, π_{x0} 和 π_{y0}, π_x 和 π_y 的不确定度只与压缩参数 r 有关, 与压缩参数 θ 无关.

由(31)和(32)式可知, x 和 y 的不确定度在 $\frac{\hbar}{|q|B} e^{-r}$ 与 $\frac{\hbar}{|q|B} e^r$ 之间振荡; $\pi_x - \frac{1}{2} qBy$ 和 $\pi_y + \frac{1}{2} qBx$ 的不确定度在 $\frac{\hbar |q| B}{4} e^{-r}$ 与 $\frac{\hbar |q| B}{4} e^r$ 之间振荡. 在某些特定时刻 $t = \frac{k\pi + \theta}{|w|}$ (k 为整数), (31)和(32)式分别成为

$$\begin{aligned} (\Delta x)_{t=(k\pi+\theta)/|w|} &= (\Delta y)_{t=(k\pi+\theta)/|w|} = \frac{\hbar}{|q|B} \exp \left[(-1)^k \frac{q}{|q|} r \right], \quad (33) \\ \left| \Delta \left[\pi_x - \frac{1}{2} qBy \right] \right|_{t=(k\pi+\theta)/|w|} &= \left| \Delta \left[\pi_y + \frac{1}{2} qBx \right] \right|_{t=(k\pi+\theta)/|w|} \\ &= \frac{\hbar |q| B}{4} \exp \left[(-1)^{k+1} \frac{q}{|q|} r \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

若粒子带正电, k 取奇数(偶数), x 和 y 的量子噪声被压缩(放大), $\pi_x - \frac{1}{2} qBy$ 和 $\pi_y + \frac{1}{2} qBx$ 的量子噪声遂被放大(压缩); 若粒子带负电, k 取奇数(偶数), x 和 y 的量子噪声被放大(压缩), $\pi_x - \frac{1}{2} qBy$ 和 $\pi_y + \frac{1}{2} qBx$ 的量子噪声遂被压缩(放大). 即在 $t = \frac{k\pi + \theta}{|w|}$ 时刻, 共轭量 x 和 $\pi_x - \frac{1}{2} qBy, y$ 和 $\pi_y + \frac{1}{2} qBx$ 的不确定度均满足如下最小不确定关系:

$$(\Delta x) \left| \Delta \left[\pi_x - \frac{1}{2} qBy \right] \right|_{t=(k\pi+\theta)/|w|} = (\Delta y) \left| \Delta \left[\pi_y + \frac{1}{2} qBx \right] \right|_{t=(k\pi+\theta)/|w|} = \frac{\hbar}{2}. \quad (35)$$

利用对称规范可求出耦合压缩 Landau 态波函数 $\langle x, y | c_1, c_2 \rangle$. 在对称规范 $\mathbf{A} = \left[-\frac{1}{2} By, \frac{1}{2} Bx \right]$ 下, C_1 和 C_2 的本征方程及薛定谔方程可分别写为

$$\begin{aligned} \left[\frac{|q|B}{2\hbar} \right]^2 \left[-\frac{f}{qB} \left[p_x - i \frac{q}{|q|} p_y \right] + \frac{iqg}{2|q|} \left[x - i \frac{q}{|q|} y \right] \right] \langle x, y | c_1, c_2 \rangle \\ = c_1 \langle x, y | c_1, c_2 \rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{|q|B}{2\hbar} \right]^2 e^{i|w|t} \left[\frac{f}{|q|B} \left[p_x + i \frac{q}{|q|} p_y \right] - \frac{ig}{2} \left[x + i \frac{q}{|q|} y \right] \right] \langle x, y | c_1, c_2 \rangle \\ = c_2 \langle x, y | c_1, c_2 \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x, y | c_1, c_2 \rangle &= \frac{1}{2\mu} \left[\left(p_x + \frac{1}{2} qBy \right)^2 + \left(p_y - \frac{1}{2} qBx \right)^2 \right] \\ &\times \langle x, y | c_1, c_2 \rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $f = \cosh\left[\frac{r}{2}\right] + \frac{q}{|q|} \sinh\left[\frac{r}{2}\right] e^{i(\theta - \frac{1}{2}\omega t)}$; $g = \cosh\left[\frac{r}{2}\right] - \frac{q}{|q|} \sinh\left[\frac{r}{2}\right] e^{i(\theta - \frac{1}{2}\omega t)}$.

解方程(36)–(38), 可得到

$$\begin{aligned} \langle x, y | c_1, c_2 \rangle &= \frac{N}{f^2} \exp \left[-i \left(\frac{1}{2} \omega t - \theta \right) + \frac{c_1 c_2}{\sinh(r/2)f} \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{|q|Bg}{4\hbar f} (x^2 + y^2) - i \left[\frac{|q|B}{2\hbar} \right]^2 \frac{1}{f} \left[\frac{q}{|q|} c_1 \left[x + i \frac{q}{|q|} y \right] \right. \right. \\ &\left. \left. - c_2 e^{-i \frac{1}{2} \omega t} \left[x - i \frac{q}{|q|} y \right] \right] \right], \end{aligned} \quad (39)$$

其中 C_1 和 C_2 的本征值 c_1 和 c_2 可分别取任意复数; N 为归一化常数. 相应波函数(39)式的归一化量子概率密度则为

$$\begin{aligned} &|\langle x, y | c_1, c_2 \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi(\Delta x)(\Delta y)} \exp \left[-\frac{1}{2(\Delta x)(\Delta y)} \left[(x - \langle x \rangle)^2 + (y - \langle y \rangle)^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

4 小 结

本文引入耦合压缩算符(13)式, 得到了耦合压缩 Landau 态, 在这压缩态中, Landau 体系这一双模体系的压缩效应只与一对压缩参量(r, θ)有关. 在文献[8]引入非耦合压缩算符(11)和(12)式而得的非耦合压缩 Landau 态中, Landau 体系的压缩效应则与两对压缩参量(r_1, θ_1)和(r_2, θ_2)有关. 耦合压缩 Landau 态便于描述带电粒子在均匀磁场中的圆周运动, 结果紧凑合理, 很适于在回旋加速器、质谱仪等应用问题中使用.

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics (Pergamon, Oxford, 1976), p. 456.
- [2] S. Gasiorowicz, Quantum Physics (Wiley, New York, 1974), chap. 13.
- [3] I. A. Maf'kin, V. I. Man'ko, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **55**(1968), 1014.
- [4] W. Zimmermann, Am. J. Phys., **57**(1989), 593.
- [5] H. Tsuru, J. Phys. Soc. Jpn., **61**(1992), 2246.
- [6] C. Aragone, Phys. Lett., **A175**(1993), 377.
- [7] 黄湘友等, 物理学报, **42**(1993), 180 [Huang Xiaryou et al., Acta Physica Sinica, **42**(1993), 180(in Chinese)].
- [8] 田 旭等, 物理学报, **47**(1998), 718 [Tian Xu et al., Acta Physica Sinica, **47**(1998), 718(in Chinese)].

COUPLED SQUEEZED LANDAU STATES

TIAN XU

(Division of Fundamental Courses, Wuhan Automotive Polytechnic University, Wuhan 430070)

HUANG XIANG-YOU

(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871)

(Received 14 October 1998)

ABSTRACT

Coupled squeezed states for the Landau system (planar charged particle moving in a uniform magnetic field) are built. These coupled squeezed states and decoupled squeezed Landau states give some information about the circular motion of charged particles respectively.

PACC: 0365; 4250; 0520