

叠加的奇偶 $SU(1, 1)$ 相干态的统计性质*

路 洪^{1) 2)} 郭光灿²⁾

¹⁾ (广东佛山科学技术学院应用物理与通信工程系, 佛山 528000)

²⁾ (中国科学技术大学物理系和非线性科学中心, 合肥 230026)

(1998 年 11 月 9 日收到)

研究了将两个 $SU(1, 1)$ 相干态 $|\zeta, k\rangle$ 和 $|\zeta^*, k\rangle$ 叠加起来得到的新的量子态的统计性质. 偶 $SU(1, 1)$ 相干态 $|\zeta, 1/4\rangle$ 和奇 $SU(1, 1)$ 相干态 $|\zeta, 3/4\rangle$ 分别对应于压缩真空态和压缩单光子数态. 适当选取 $SU(1, 1)$ 态的相位角和叠加时的相对相位, 得到的新的量子态比单个 $SU(1, 1)$ 相干态表现出大大增强的正交分量压缩和光子反群聚效应. 也说明了怎样准备这样的叠加态.

PACC: 4250; 3280

1 引 言

利用量子力学中的叠加原理从“经典态”构造出具有各种非经典特性的新的量子态是近年来十分令人感兴趣的课题. 在这些工作中, 最早的尝试是将振幅相等、相位差为 π 的两个相干态 $|\alpha\rangle$ 与 $|\alpha\rangle$ 叠加起来^[1], 后来又扩展为 $|\alpha\rangle$ 与 $|\alpha^*\rangle$ 的叠加^[2] 及一般的 $|\alpha_1\rangle$ 与 $|\alpha_2\rangle$ 的叠加^[3], 并推广到多模情形^[4]. 这些叠加态被称为薛定谔猫态^[5], 它们都显示出某些非经典的特征.

另一方面, 那些本来就是非经典的态的叠加^[6-9] 也有可能产生新的非经典效应, 或使原有的非经典效应得到增强. Xin 和 Zhu 等^[6] 讨论了两个压缩相干态的叠加态 $c[S(\zeta)D(\alpha)|0\rangle \pm S(\zeta)D(-\alpha)|0\rangle]$ 的统计特性, 发现叠加后的态显示出比单个压缩相干态强得多的压缩效应, 光子反群聚效应也得以增强. 在本文中, 我们考虑两个 $SU(1, 1)$ 相干态^[10, 11] $|\zeta, k\rangle$ 和 $|\zeta^*, k\rangle$ 的叠加, 对于 $k=1/4$ 和 $k=3/4$ 的情形, $|\zeta, 1/4\rangle$ 和 $|\zeta, 3/4\rangle$ 分别表示偶的和奇的 $SU(1, 1)$ 相干态^[12], 它们分别对应于熟知的压缩真空态和压缩单光子数态, 文献^[12] 已经研究和比较过它们的统计性质及对原子动力学行为的影响. 我们发现, 对于两个 $SU(1, 1)$ 相干态的叠加态, 原有的非经典性质如正交分量压缩和光子反群聚都大大增强, 原来光子群聚的偶 $SU(1, 1)$ 相干态叠加后也呈现明显的光子反群聚. 最后, 说明可以用腔场与二能级原子的非共振相互作用产生这样的叠加态.

* 国家自然科学基金(批准号: 19874056)资助的课题.

2 叠加 $SU(1, 1)$ 相干态的统计性质

$SU(1, 1)$ 相干态被定义为^[10, 11]

$$|\zeta, k\rangle = (1 - |\zeta|^2)^k \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(n+2k)}{n! \Gamma(2k)} \right]^{1/2} \zeta^n |n, k\rangle, \quad (1)$$

式中 ζ 为复参数, 本文中取为 $\zeta = -r \exp(-i\theta)$, k 为 Bargman 指标. 若取 $SU(1, 1)$ 李代数的生成元为

$$K_- = \frac{1}{2} a^2, \quad K_+ = \frac{1}{2} a^{+2}, \quad K_0 = \frac{1}{2} \left[a^+ a + \frac{1}{2} \right], \quad (2)$$

则(1)式中的 k 取 $1/4$ 或 $3/4$, 而态 $|n, 1/4\rangle$ 和 $|n, 3/4\rangle$ 分别表示数态 $|2n\rangle$ 和 $|2n+1\rangle$ ^[13], 因此, $|\zeta, 1/4\rangle$ 被称为偶 $SU(1, 1)$ 相干态, $|\zeta, 3/4\rangle$ 被称为奇 $SU(1, 1)$ 相干态.

设叠加态为

$$|\phi\rangle = c \left[|\zeta, k\rangle + \exp(i\phi) |\zeta^*, k\rangle \right], \quad (3)$$

式中 c 为归一化常数, ϕ 为两个 $SU(1, 1)$ 态的相对相位角. 由文献[11]给出的生成函数

$$\langle \zeta_1, k | \exp(c_1 K_+) \exp(c_2 K_-) | \zeta_2, k \rangle = \frac{[1 - |\zeta_1|^2]^k [1 - |\zeta_2|^2]^k}{f(1 - \zeta_1^* c_1)(1 - \zeta_2 c_2) - \zeta_1^* \zeta_2}^{2k}, \quad (4)$$

不难计算 K_0 , K_+ 和 K_- 的各阶矩. 对于(3)式给出的态 $|\phi\rangle$, 不难得到

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \operatorname{Re} \left[e^{i\phi} \frac{(1 - |\zeta|^2)^{2k}}{(1 - \zeta^2)^{2k+1}} \right] \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

$$\langle K_0 \rangle = 2kc^2 \left[\frac{1 + |\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2} + \operatorname{Re} \left[e^{i\phi} \frac{(1 + \zeta^2)(1 - |\zeta|^2)}{(1 - \zeta^2)^{2k+1}} \right] \right], \quad (6)$$

$$\langle K_+ \rangle = 4kc^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\zeta^*}{1 - |\zeta|^2} + e^{i\phi} \frac{\zeta(1 - |\zeta|^2)^{2k}}{(1 - \zeta^2)^{2k+1}} \right], \quad (7)$$

$$\langle K_- \rangle = \langle K_+ \rangle, \quad (8)$$

$$\langle K_+ K_- \rangle = 4kc^2 \left[\frac{2k|\zeta|^2 + |\zeta|^4}{(1 - |\zeta|^2)^2} + \operatorname{Re} \left[e^{i\phi} (1 - |\zeta|^2)^{2k} \frac{(2k\zeta^2 + \zeta^4)}{(1 - \zeta^2)^{2k+2}} \right] \right]. \quad (9)$$

光场的二阶相干度被定义为

$$g^{(2)}(0) = \langle a^{+2} a^2 \rangle / \langle a^+ a \rangle^2. \quad (10)$$

当 $g^{(2)}(0) > 1$, 光场中的光子是群聚的; $g^{(2)}(0) < 1$, 光子是反群聚的.

光场的两个相位正交分量被定义为

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad (11)$$

其涨落为

$$a_{1,2}^2 = \frac{1}{4}(2\langle a^+ a \rangle + 1 \pm \langle a^2 + a^{+2} \rangle \mp \langle a \pm a^+ \rangle^2). \quad (12)$$

当 Δa_1^2 或 Δa_2^2 小于 $1/4$, 称光场处于压缩态. 光场的压缩和光子反群聚都是重要的非经典效应^[14]. 由(2)式, 可将(10)和(12)式写为

$$g^{(2)}(0) = \frac{4\langle K_+ K_- \rangle}{(2\langle K_0 \rangle - 1/2)^2} \quad (13)$$

$$\Delta a_{1,2}^2 = \langle K_0 \rangle \pm \langle K_+ \rangle. \quad (14)$$

以下用数值计算的方法来讨论 $SU(1, 1)$ 相干态的参量 $|\zeta|$ 和 θ 以及叠加时的相对相位角 ϕ 对 $g^{(2)}(0)$ 和 $\Delta a_{1,2}^2$ 的影响. 为了直观起见, 将参量 $|\zeta|$ 用 $SU(1, 1)$ 相干态的平均光子数 $\bar{n}$ 表示^[12]

$$|\zeta_e| = [\bar{n}_e / (\bar{n}_e + 1)]^{1/2}, \quad (15)$$

$$|\zeta_o| = [(\bar{n}_o - 1) / (\bar{n}_o + 2)]^{1/2}. \quad (16)$$

图 1—4 给出了 (13) 式的数值结果. 从图 1 可以看到, 当 $\bar{n}$ 很小时 (图 1 中取 $\bar{n} =$

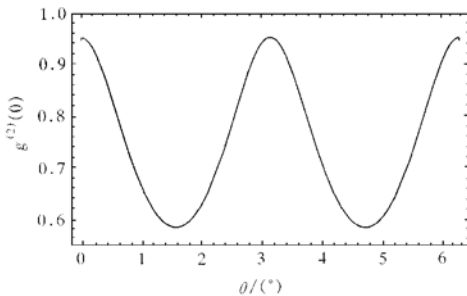


图 1 叠加的偶 $SU(1, 1)$ 相干态的二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 与 θ 的关系 $\bar{n}_e = 0.2$; $\phi = \pi$

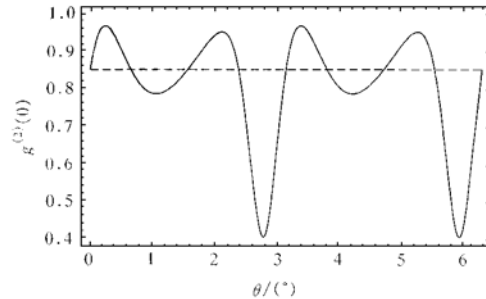


图 2 叠加的奇 $SU(1, 1)$ 相干态的二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 与 θ 的关系 $\bar{n}_o = 1.5$; $\phi = \pi/2$; 虚线表示单个奇 $SU(1, 1)$ 相干态的 $g^{(2)}(0)$ 值

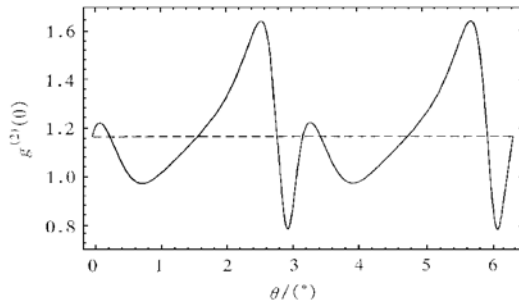


图 3 $\bar{n}_o = 2$, 其他图注同图 2

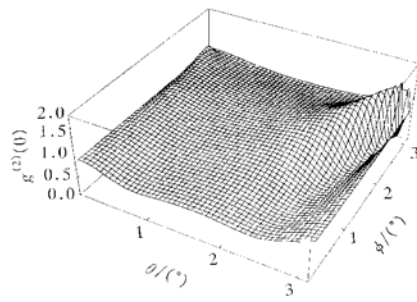


图 4 $g^{(2)}(0)$ 与 θ 和 ϕ 的关系 $\bar{n}_o = 1.5$

0.2), 若取 $\phi = \pi$, 不论 θ 取何值, 叠加的偶 $SU(1, 1)$ 态总是光子反群聚的, 在 $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ 时, $g^{(2)}(0)$ 有最小值. 我们知道, 偶 $SU(1, 1)$ 相干态光场比热光场有更强的光子群聚效应. 图 2 显示, 当 $\phi = \pi/2$, θ 取某些值时, 叠加的奇 $SU(1, 1)$ 相干态表现出比单个态强得多的反群聚效应. 另外, 在文献^[12]中得到当 $\bar{n}_o$ 大于临界值 1.84 时, 奇 $SU(1, 1)$ 态总是光子群聚的, 但图 3 显示, 当 $\bar{n}_o$ 大于这一临界值时, 叠加后的态仍能出现反群聚现象. 图

4 给出了 $\bar{n}_o = 1.5$ 时, 奇的 $SU(1, 1)$ 叠加态的二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 随参数 ϕ 和 θ 变化的全面情况.

图 5 和图 6 给出了 (14) 式的数值结果. 从图 5 可以看到, 将两个偶 $SU(1, 1)$ 态适当地叠加, 可以得到比叠加前大为增强的压缩效应. 而当取 θ 的值为零或 $\pi/2$ (态 $|\zeta, k\rangle$ 和 $|\zeta^*, k\rangle$ 同相位或有 180° 相差) 时, 无论怎样选择 ϕ 都不能得到比单个态更强的压缩效应. 图 6 表明, 将奇的 $SU(1, 1)$ 态叠加后也使压缩的程度有很大增加.

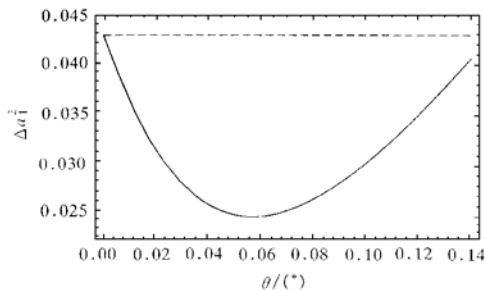


图 5 叠加的偶 $SU(1, 1)$ 态的 Δa_1^2 与 θ 的关系 $\bar{n}_o = 1$; $\phi = 0.9\pi$; 虚线表示单个偶 $SU(1, 1)$ 态在 θ 取不同值时的最小 Δa_1^2 值

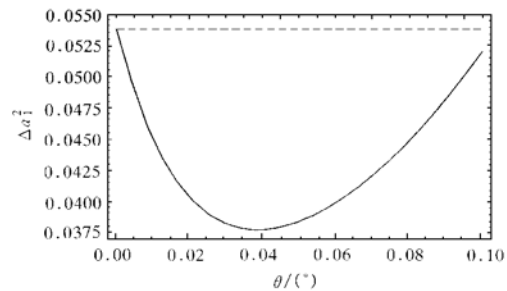


图 6 叠加的奇 $SU(1, 1)$ 态的 Δa_1^2 与 θ 的关系 $\bar{n}_o = 10$; $\phi = 0.8\pi$; 其他图注同图 5

3 叠加的 $SU(1, 1)$ 相干态的制备

本节说明怎样将腔内原来处于 $SU(1, 1)$ 相干态的光场制备成 (3) 式所表示的叠加态.

先假定单模腔中的光场已经处在偶 $SU(1, 1)$ 相干态

$$|\zeta, \frac{1}{4}\rangle = (1 - |\zeta|^2)^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(n + 1/2)}{n! \Gamma(1/2)} \right]^{1/2} \zeta^n |2n\rangle, \quad (17)$$

其中 ζ 为实数. 将一个处于叠加态

$$|\phi_a(0)\rangle = \cos\beta |e\rangle + \exp(i\gamma) \sin\beta |g\rangle \quad (18)$$

的原子注入腔内, 原子与场的相互作用由 Jaynes-Cummings 模型描述. 当原子与腔模之间的失谐量 $\Delta = \omega - \omega_0$ 远大于耦合常量 g 时, 原子与腔场不交换能量, 只是腔模的相位受到调制. 在相互作用绘景中, 系统的有效哈密顿量为^[15]

$$H_e = \frac{g^2}{\Delta} S_z a^\dagger a. \quad (19)$$

光场-原子体系的初态为

$$|\phi(0)\rangle = |\phi_a(0)\rangle |\zeta, 1/4\rangle. \quad (20)$$

$t > 0$ 后系统的态的演化由

$$|\phi(t)\rangle = \exp(-iH_e t) |\phi(0)\rangle \quad (21)$$

决定. 设原子穿越光腔所用的时间为 τ , 在原子从腔内射出时, 系统的态矢演化为

$$|\phi(\tau)\rangle = \cos\beta|e\rangle \left| \zeta \exp\left[-i\frac{2g^2}{\Delta}\tau\right], \frac{1}{4} \right\rangle + \exp(i\gamma)\sin\beta|g\rangle \left| \zeta \exp\left[i\frac{2g^2}{\Delta}\tau\right], \frac{1}{4} \right\rangle \quad (22)$$

让原子从腔内出来后马上进入一个经典场, 这个经典场能对原子施加一个么正变换^[16]

$$|\phi_a\rangle = \cos\alpha|e\rangle + \exp(i\delta)\sin\alpha|g\rangle \rightarrow |e\rangle, \quad (23)$$

$$|\phi_a^*\rangle = \exp(-i\delta)\sin\alpha|e\rangle - \cos\alpha|g\rangle \rightarrow |g\rangle. \quad (24)$$

参量 α 和 δ 可以通过调节经典场的幅度与相位来加以控制^[17]. 然后, 对原子所处的态进行测量. 假如测量到原子处于激发态 $|e\rangle$, 则可断定原子进入经典场之前是处在态 $|\phi_a\rangle$, 而腔内的光场将坍缩到如下的叠加偶 $SU(1, 1)$ 相干态

$$|\phi_{Fe}\rangle = N \left[\cos\alpha\cos\beta \left| \zeta \exp\left[-i\frac{2g^2}{\Delta}\tau\right], \frac{1}{4} \right\rangle + e^{i(\gamma-\delta)}\sin\alpha\sin\beta \left| \zeta \exp\left[i\frac{2g^2}{\Delta}\tau\right], \frac{1}{4} \right\rangle \right], \quad (25)$$

其中 N 为归一化因子. 适当的调节 α 和 δ 可以控制叠加态的权重因子和相对相位, 而改变注入腔内原子的初速可以控制它飞越光腔所用的时间 τ , 从而可以得到我们需要的 $SU(1, 1)$ 态的相位角 θ .

制备叠加的奇 $SU(1, 1)$ 相干态的方法原则上与上面相同, 但(25)式应当用

$$|\phi_{Fo}\rangle = N \left[\cos\alpha\cos\beta \left| \zeta \exp\left[-i\frac{2g^2}{\Delta}\tau\right], \frac{3}{4} \right\rangle + e^{i(\gamma-\delta+2g^2\tau/\Delta)}\sin\alpha\sin\beta \left| \zeta \exp\left[i\frac{2g^2}{\Delta}\tau\right], \frac{3}{4} \right\rangle \right] \quad (26)$$

代替. 调节参量 δ 决定奇 $SU(1, 1)$ 相干态的相对相位 ϕ 时, 应当按照下面的顺序: 先根据所需要的 θ 值确定原子的初速(从而定出了 τ), 再根据 τ 和 γ 的大小和所需要的 ϕ 值来调节参量 δ .

4 结 语

一般来说, 两个非经典态叠加后, 原有的非经典特性可能增强也可能减弱甚至消失^[8]. 我们将两个相位互为共轭的 $SU(1, 1)$ 相干态叠加起来构成新的量子态, 并研究它们的统计性质, 这里有两个相位因子可供选择, 即 $SU(1, 1)$ 相干态本身的相位和两个态叠加时的相对相位. 研究结果表明, 只要适当选取这两个相因子, 叠加后的新的量子态将比单个 $SU(1, 1)$ 相干态具有大大增强的压缩效应和光子反群聚效应.

- [1] V. V. Dodonov, L. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Physica*, **72**(1974), 547.
- [2] W. Schleich, M. Pernigo and F. Le Kien, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2172; V. V. Dodonov, S. Yu. Kalmykov, V. I. Man'ko, *Phys. Lett.*, **A199**(1995), 123.
- [3] V. Buzek, A. V. Barranco and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 6570.
- [4] Chir-Lin Chai, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 7187.
- [5] 吴锦伟、郭光灿, 物理, **24**(1995), 269 [Wu Jirwei, Guo Guangchan, *Wuli*, **24**(1995), 269(in Chinese)].
- [6] K. Zhu, Q. Wang and X. Li, *J. Opt. Soc. Am.*, **B10**(1993), 1287; Z. Z. Xin, D. B. Wang, M. Hirayama and K. Matur

- moto, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 2865.
- [7] C. C. Gerry and R. Grobe, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 1698.
- [8] C. C. Gerry and R. Grobe, *J. Mod. Opt.*, **44**(1997), 41.
- [9] C. M. A. Dantas, J. R. Queiroz and B. Baseia, *J. Mod. Opt.*, **45**(1998), 1085.
- [10] A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **26**(1972), 222.
- [11] K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
- [12] 路 洪, 彭金生, 物理学报, **43**(1994), 1787 [Lu Hong, Peng Jin-sheng, *Acta Physica Sinica*, **43**(1994), 1787(in Chinese)].
- [13] C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 2146; C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 2683.
- [14] 郭光灿, 量子光学(高等教育出版社, 北京, 1990) [Guo Guang-can, *Quantum Optics*(Higher Education Publishing House, Beijing, 1990) (in Chinese)].
- [15] M. J. Holland, D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 1716.
- [16] M. Freyberger, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 3347.
- [17] G. C. Guo, S. B. Zheng, *Phys. Lett.*, **A223**(1996), 332.

STATISTICAL PROPERTIES OF SUPERPOSITION OF ODD AND EVEN $SU(1, 1)$ COHERENT STATES*

LU HONG^{a) b)} GUO GUANG-CAN^{b)}

^{a)} (Department of Applied Physics and Communication Engineering,
University of Science and Technology of Foshan, Foshan 528000)

^{b)} (Department of Physics and Nonlinear Science Center,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 9 November 1998)

ABSTRACT

We study the statistical properties in the superpositions of $SU(1, 1)$ coherent states $|\zeta, k\rangle$ and $|\zeta^*, k\rangle$. The even $SU(1, 1)$ coherent state ($|\zeta, 1/4\rangle$) and odd $SU(1, 1)$ coherent state ($|\zeta, 3/4\rangle$) correspond to squeezed vacuum state and squeezed one photon number state, respectively. It is shown that the superposed states can exhibit much stronger squeezing and antibunching for the suitable phase of ζ and the relative phase in superposition. We also propose a method of generating such superposed states.

PACC: 4250; 3280

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19874056).