

平顶高斯光束与超高斯光束传输特性的比较研究^{*}

罗时荣 吕百达 张 彬

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(1998 年 10 月 23 日收到; 1998 年 11 月 30 日收到修改稿)

对平顶高斯光束与超高斯光束的传输特性作了研究和比较, 并给出了典型的数值计算例. 所得的主要结论是有相同 M^2 因子和束宽的平顶高斯光束与超高斯光束在通过光学系统时, 具有非常相似的包括光强分布和光阑衍射效应在内的传输变换特性.

PACC: 4255; 4200

1 引 言

建立实际光束正确的物理模型并研究其传输变换特性是光束变换光学中的一个主要研究内容. 在强激光技术领域, 例如对聚变激光驱动器中的强激光^[1,2], 超高斯反射率镜腔输出激光^[3], 用超高斯光束描述^[4]. 虽然可以用推广的 ABCD 定律来描述超高斯光束在光阑效应可忽略光学系统中的传输^[5], 但计算甚为繁冗. 为了简化问题, Gori 在 1994 年引入了平顶高斯光束的概念^[6], 用以描述这类强度分布近似为平顶的光束. 平顶高斯光束的主要优点是, 可以展开成有限个拉盖尔-高斯光束(柱坐标系中)或厄密-高斯光束(直角坐标系中)之和, 而拉盖尔-高斯光束和厄密-高斯光束在一阶光学系统中的传输遵从熟知的 Kogelnik 公式, 即 ABCD 定律. 文献中对超高斯光束和平顶高斯光束的特性已作了许多计算分析和实验研究, 并给出了柱坐标系下的 M^2 因子的表达式, 例如可参考文献[1—11]. 然而, 迄今针对同一平顶分布的实际光束, 用这两类光束来进行模拟时的分析比较尚未见有文献作深入研究. 本文从直角坐标系下这两类光束的场分布出发, 推导出它们的 M^2 因子和光束参量间的关系, 并比较它们通过光阑透镜的传输特性. 研究表明, 具有相同 M^2 因子和束宽的这二类光束有极为相似的传输变换特性. 最后, 对平顶高斯光束与超高斯光束的异同之处作了总结. 本文有关研究结果和所得结论对实际激光束的传输变换研究有应用意义.

2 平顶高斯光束与超高斯光束的场分布

在直角坐标系下, $z = 0$ 处二维平顶高斯光束的场分布 $E(x, 0)$ 为^[8]

^{*} 国家高技术惯性约束聚变(ICF)基金(批准号: 863-416-2-1.2)资助的课题.

$$E(x, 0) = A_0 \exp \left[- \frac{(N_{\text{FGB}} + 1)x^2}{w_0^2} \right] \sum_{k=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{1}{k!} \left[\frac{(N_{\text{FGB}} + 1)x^2}{w_0^2} \right]^k, \quad (1)$$

式中 N_{FGB} 为平顶高斯光束的阶数 ($N_{\text{FGB}} = 0, 1, \dots$), w_0 为光腰宽度, $A_0 = E(0, 0)$ 是场中心处的振幅. 在(1)式中令 $x = w_0$ 得到

$$\frac{E(w_0, 0)}{E(0, 0)} = \exp \left[- (N_{\text{FGB}} + 1) \right] \sum_{k=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{(N_{\text{FGB}} + 1)^k}{k!}. \quad (2)$$

由(2)式知, 对平顶高斯光束, $z = 0$ 处的光腰宽度可定义为场振幅等于中心(0, 0)处振幅

的 $\exp \left[- (N_{\text{FGB}} + 1) \right] \sum_{k=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{(N_{\text{FGB}} + 1)^k}{k!}$ 倍(等效地, 光强等于中心光强的 $\exp \left[- 2(N_{\text{FGB}} + 1) \right] \left[\sum_{k=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{(N_{\text{FGB}} + 1)^k}{k!} \right]^2$ 倍)的横坐标值. 值得注意的是, $\frac{E(w_0, 0)}{E(0, 0)}$ 随 N_{FGB} 的增加而增大,

但当 N_{FGB} 足够大时, $\frac{E(w_0, 0)}{E(0, 0)}$ 随 N_{FGB} 的变化变得缓慢.

$z = 0$ 处的二维超高斯光束的场分布 $E(x, 0)$ 为^[4]

$$E(x, 0) = A_0 \exp \left[- \left(\frac{x}{w_0} \right)^{N_{\text{SGB}}} \right], \quad (3)$$

式中 N_{SGB} 为超高斯光束的阶数 ($N_{\text{SGB}} \geq 2$), w_0 为光腰宽度, $A_0 = E(0, 0)$ 为场中心(0, 0)处的振幅. 在(3)式中令 $x = w_0$ 得到

$$\frac{E(w_0, 0)}{E(0, 0)} = e^{-1}. \quad (4)$$

(4)式表明, 与平顶高斯光束不同的是, 对超高斯光束, w_0 定义为场振幅降为中心振幅的 e^{-1} (光强降为中心光强 e^{-2}) 处的横坐标, 它与超高斯光束的阶数 N_{SGB} 无关.

3 平顶高斯光束与超高斯光束的 M^2 因子

基于二阶矩定义的 M^2 因子概念是由 Siegman^[12] 提出的, 较为确切地可称为光束传输因子^[13]. 按文献[12]的方法, 对任意光束, 只要其空间域和空间频率域中光束参量的二阶矩有意义, 其 M^2 因子都可用解析或数值计算的方法求出. 对(1)式定义的平顶高斯光束, 经繁冗数学推导后求得其空间域中的光强二阶矩为

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{2(N_{\text{FGB}} + 1)} \frac{\sum_{m_1=0}^{N_{\text{FGB}}} \sum_{m_2=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{2^{-(m_1+m_2)}}{m_1! m_2!} \Gamma(m_1 + m_2 + 1.5)}{\sum_{m_1=0}^{N_{\text{FGB}}} \sum_{m_2=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{2^{-(m_1+m_2)}}{m_1! m_2!} \Gamma(m_1 + m_2 + 0.5)}. \quad (5)$$

类似可得到空间频率域中的二阶矩为

$$\sigma_k^2 = \frac{2^{-(2N_{\text{FGB}}+1)} (N_{\text{FGB}} + 1)}{\pi^2 w_0^2 (N_{\text{FGB}}!)^2} \frac{\Gamma(2N_{\text{FGB}} + 1.5)}{\sum_{m_1=0}^{N_{\text{FGB}}} \sum_{m_2=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{2^{-(m_1+m_2)}}{m_1! m_2!} \Gamma(m_1 + m_2 + 0.5)}. \quad (6)$$

于是

$$M_{\text{FGB}}^2 = \frac{2^{1-N_{\text{FGB}}}}{N_{\text{FGB}}!} \frac{\Gamma(2N_{\text{FGB}} + 1.5) \sum_{m_1=0}^{N_{\text{FGB}}} \sum_{m_2=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{2^{-(m_1+m_2)}}{m_1! m_2!} \Gamma(m_1 + m_2 + 1.5)}{\sum_{m_1=0}^{N_{\text{FGB}}} \sum_{m_2=0}^{N_{\text{FGB}}} \frac{2^{-(m_1+m_2)}}{m_1! m_2!} \Gamma(m_1 + m_2 + 0.5)}. \quad (7)$$

对(3)式定义的超高斯光束, 对应于(5)–(7)式有

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{4^{1/N_{\text{SGB}}}} \frac{\Gamma(3/N_{\text{SGB}})}{\Gamma(1/N_{\text{SGB}})}, \quad (8)$$

$$\sigma_k^2 = \frac{N_{\text{SGB}}^2 4^{1/N_{\text{SGB}}}}{16\pi^2 w_0^2} \frac{\Gamma(2 - 1/N_{\text{SGB}})}{\Gamma(1/N_{\text{SGB}})}, \quad (9)$$

$$M_{\text{SGB}}^2 = N_{\text{SGB}} \frac{\sqrt{\Gamma(2 - 1/N_{\text{SGB}}) \Gamma(3/N_{\text{SGB}})}}{\Gamma(1/N_{\text{SGB}})}. \quad (10)$$

(5)–(10)式中的 Γ 是伽码函数. (7), (10)式分别为在直角坐标系下的平顶高斯光束和超高斯光束的 M^2 因子的一般公式.

4 平顶高斯光束与超高斯光束传输特性的比较

若将超高斯光束阶数的取值扩展为大于 2 的正实数, (对应(3)式中的 x 应取绝对值, 或计算中仅对 $x \geq 0$ 进行, 然后对称变换到 $x < 0$ 域), 则由(7), (10)式可得到具有相同 M^2 因子的平顶高斯光束与超高斯光束阶数间的联系, 计算结果见图 1, 分析表明, N_{SGB} 与 N_{FGB} 间的关系可用一个足够好的近似公式来描述

$$N_{\text{SGB}} = \sum_{k=0}^5 a_k (N_{\text{FGB}} - x_0)^k, \quad (11)$$

式中 $x_0 = 26.7619$, $a_0 = 1.1935 \times 10$, $a_1 = 2.04846 \times 10^{-1}$, $a_2 = -1.48356 \times 10^{-3}$, $a_3 = 7.68471 \times 10^{-5}$, $a_4 = -2.43186 \times 10^{-6}$, $a_5 = 2.27512 \times 10^{-8}$. 数值计算例见表 1, 其中对应光强分布的比较见图 2. 由图 2 知, 对有相同 M^2 因子和 w_0 的平顶高斯光束与超高斯光束的光强分布大体上是相同的, 出现小的差异的主要原因是两者的光场表示式中的束宽定义不一样, 且对于平顶高斯光束, 束宽还与 N_{FGB} 有关.

表 1 对应于相同 M^2 因子的平顶高斯光束与超高斯光束的阶数

M^2	1	1.06	1.43	1.61	1.70	1.82	2.09	2.28	2.6
N_{FGB}	0	1	7	12	15	20	35	50	84
N_{SGB}	2	3.0	6.35	8.16	9.07	10.41	13.66	16.27	21.0

为比较这两类光束的传输特性, 我们选取了有相同 M^2 因子和束宽的平顶高斯光束与超高斯光束通过有代表性的光阑透镜系统的变换, 利用广义衍射积分公式^[14]进行了数值计算, 典型例示于图 3. 其中图 3(a) 为在透镜(焦距为 100 mm, 光阑宽度为 1 mm)前表面入射 $N_{\text{FGB}} = 15$, $N_{\text{SGB}} = 9.07$, $M^2 = 1.7$, $w_0 = 1$ mm 的平顶高斯光束与超高斯光束的相对光强分布; 图 3(b) 为通过光阑透镜后在离透镜 $z = 50$ mm 处两光束的相对光强分布;

图 3(c) 为在光阑透镜后焦面处 $z = 100 \text{ mm}$ 处的相对光强分布. 由图 3 可知, 具有相同 M^2 因子和束宽的平顶高斯光束与超高斯光束在经过光阑透镜变换后, 无论它们的菲涅

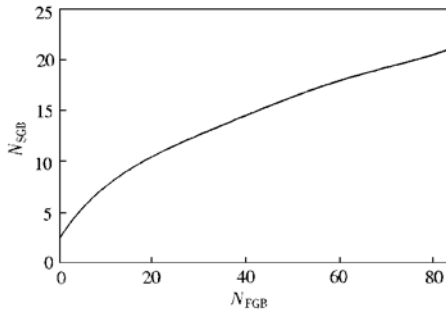


图 1 具有相同 M^2 因子的平顶高斯光束和超高斯光束阶数 N_{FGB} 与 N_{SGB} 的关系

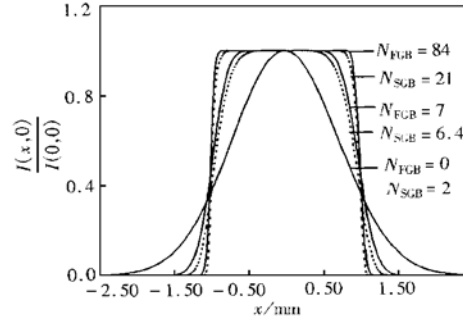


图 2 光腰宽度 $w_0 = 1 \text{ mm}$ 的平顶高斯光束与超高斯光束的相对光强 $I(x, 0)/I(0, 0)$ 分布 参量为 N_{FGB} 和 N_{SGB}

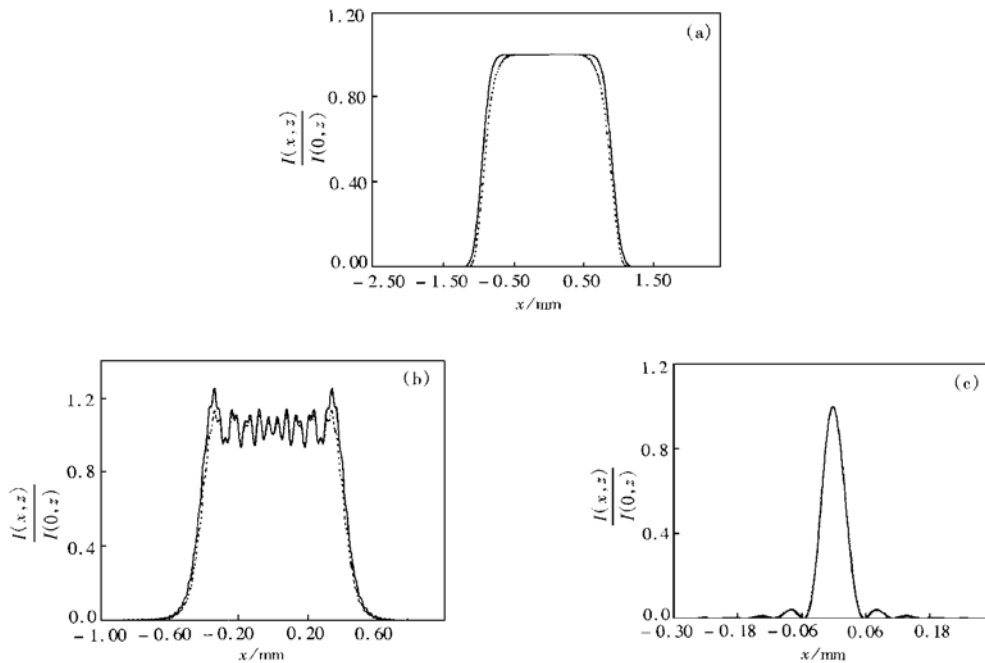


图 3 $M^2 = 1.7$, $w_0 = 1 \text{ mm}$ 的平顶高斯光束和超高斯光束的相对光强 $I(x, z)/I(0, z)$ 分布 实线为平顶高斯分布; 虚线为超高斯分布 (a) 在焦距为 100 mm , 半宽度为 1 mm 的薄透镜前表面(入射参考面 $z = 0$) 处的相对光强分布; (b) 在透镜后 $z = 50 \text{ mm}$ 处的相对光强分布; (c) 在透镜后焦面上($z = 100 \text{ mm}$) 的相对光强分布

耳衍射($z = 50 \text{ mm}$)或夫琅禾费衍射($z = 100 \text{ mm}$)都有极为相似的光强分布, 光阑的衍射效应对这二类光束也是极为相似的. 此外, 还对平顶高斯光束与超高斯光束通过自由空间、空间滤波器等传输变换作了大量计算比较, 表明上述结论同样是正确的. 并且, 对在

自由空间的传输,这一条件还可放宽,即有相同 M^2 因子但不同 w_0 的平顶高斯光束与超高斯光束也有极为相似的传输特性, w_0 的不同仅使光强剖面放大或缩小,而不使光强分布的形状改变,这是因为在自由空间中无光阑衍射效应的缘故.

5 结 论

本文对平顶高斯光束与超高斯光束的传输特性作了比较研究,推导出在直角坐标系下的平顶高斯光束与超高斯光束的 M^2 因子的解析表达式和具有相同 M^2 因子的这两类光束阶数 N_{FGB} 与 N_{SCB} 间的关系式.用文献[14]中的方法可证明,无论是平顶高斯光束或是超高斯光束都不满足波动方程,也不是波动方程的近轴近似解^[15].本文得出的一个重要结论是有相同 M^2 因子和束宽的平顶高斯光束与超高斯光束通过光学系统时,有极为相似的传输变换特性.因此,针对同一平顶分布的实际光束,视研究问题的方便,用平顶高斯光束或超高斯光束来进行计算模拟都是可以的,但它们有不同的阶数和不同定义的束宽.对聚变驱动器复杂系统中强激光的传输,国内外用超高斯光束模型已作了大量计算模拟与实验的比较工作.本文的研究表明,若采用适当选取参量的平顶高斯光束模型,原则上应得到相同的结果.并且,对于研究光阑效应可忽略的光学系统和自由空间中的传输时,用平顶高斯光束模型更为简便,有关研究结果将另文发表.

作者之一(吕百达)曾与 H. Weber 教授,杜祥琬院士和林尊琪教授对本文有关强激光的描述和传输变换进行过十分有益的讨论,论文评审专家对(11)式提出了非常中肯的修改意见,特此一并致谢.

- [1] W. W. Simmons, J. T. Hunt, W. E. Warren, *IEEE J Quant. Electron.*, **17**(1981), 1727.
- [2] LLNL. ICF Quarterly Report, Special Issue: Beamlet Laser Project, UCPL-LR-105821-95-15(1994), p. 18.
- [3] V. Magni, G. Valentini, S. D. Silvestri, *Opt. & Quant. Electron.*, **23**(1991), 1105.
- [4] A. Parent, M. Morin, P. Lavigne, *Opt. & Quant. Electron.*, **24**(1992), 1071.
- [5] M. A. Porras, J. Alda, E. Bernabeu, *Appl. Opt.*, **31**(1992), 6389.
- [6] F. Gori, *Opt. Commun.*, **107**(1994), 335.
- [7] C. Palma, V. Bagini, *Opt. Commun.*, **111**(1994), 6.
- [8] V. Bagini, R. Borghi, F. Gori, A. M. Pacileo, M. Santarsiero, *J. Opt. Soc. Am.*, **A13**(1996), 1385.
- [9] C. J. R. Sheppard, S. Saghaei, *Opt. Commun.*, **132**(1996), 144.
- [10] B. Lü, B. Zhang, X. Wang, *Opt. Commun.*, **126**(1996), 1.
- [11] S. Bollanti, P. Di Lazzaro, D. Murra, A. Torre, *Opt. Commun.*, **138**(1997), 35.
- [12] A. E. Siegman, *Proc. SPIE*, **1224**(1990), 2.
- [13] A. E. Siegman, OSA TOPS, Diode Pumped Solid State Lasers: Applications and Issues, **17**(1998), 184.
- [14] 吕百达,激光光学(四川大学出版社,成都,1992),第53,61页 [Lü Bai-da, Laser Optics—Laser Beam Propagation and Beam Quality Control, Second Edit. (Sichuan University Press, Chengdu, 1992), p. 53; 61 (in Chinese)].
- [15] 吕百达,王喜庆,张彬,激光技术, **21**(1997), 206 [Lü Bai-da, Wang Xi-qing, Zhang Bin, *Laser Technology*, **21**(1997), 206 (in Chinese)].

A COMPARISON STUDY ON THE PROPAGATION CHARACTERISTICS OF FLATTENED GAUSSIAN BEAMS AND SUPER-GAUSSIAN BEAMS*

LUO SHI-RONG LÜ BAI-DA ZHANG BIN

(*Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064*)

(Received 23 October 1998; revised manuscript received 30 November 1998)

ABSTRACT

The propagation characteristics of flattened Gaussian beams (FGBs) and super-Gaussian beams (SGBs) have been studied and compared with each other. Numerical illustrative examples have been given. The main result obtained in this paper is that the FGB and SGB with the same M^2 factor and beam width demonstrate the very similar propagation and transformation characteristics, including the intensity distribution and diffraction effect due to the aperture, while they propagate through an optical system.

PACC: 4255; 4200

* Project supported by the National High Technology Inertial Confinement Fusion (ICF) Foundation of China (Grant No. 863-416-2-1.2).