

黑洞自转角速度的演化特征^{*}

汪定雄

(华中理工大学物理系, 武汉 430074)

(1998 年 7 月 10 日收到; 1998 年 11 月 23 日收到修改稿)

在同时考虑吸积和 Blandford-Znajek 过程的条件下, 详细讨论了吸积盘(包括薄盘和厚盘)中心黑洞的自转角速度 Ω_h 的演化特征. 结果表明, 当黑洞的无量纲角动量 a_* 演化到某一临界值时, Ω_h 对时间的变化率由正变负, 从而推断在顺行吸积过程中 Ω_h 先增后减, 演化非单调, 因而存在一个极大值. 并指出黑洞的无量纲角动量 a_* 比黑洞的角动量 J 和自转角速度 Ω_h 更适合描写吸积盘中心黑洞自转状态的演化.

PACC: 9760L; 0420

1 引 言

类星体和活动星系核(AGNs)的标准模型是巨型黑洞吸积盘^[1]. 作为解释类星体和 AGNs 的能量机制的一种有效模型, Blandford 和 Znajek^[2] 首先提出: 可以通过吸积盘的中心黑洞与其周围的电磁场的相互作用来提取黑洞的旋转能量和角动量. 这个能量机制简称为 B-Z 过程. 已有不少工作在同时考虑吸积过程和 B-Z 过程的条件下, 讨论吸积盘中心黑洞的演化^[3-6]. 在这些工作中, 对描写黑洞自转状态的参量如无量纲角动量 a_* 和角动量 J 的演化特征作了详细讨论. 在顺行吸积条件下, a_* 是单调增加的, 而且会演化到一个稳定值 $a_*^s < 1$, 从而保证了黑洞热力学第三定律的有效性; J 在演化中也是单调增加的, 但理论上 J 的演化没有上限. 另一个描写黑洞自转状态的参量是黑洞的自转角速度 Ω_h , 目前尚未看到有关 Ω_h 演化特征的讨论. 由于黑洞的自转状态与黑洞系统的高能辐射有密切的关系, 我们认为有必要对 J , a_* 和 Ω_h 的演化特征作一比较. 本文在同时考虑吸积过程和 B-Z 过程的条件下, 重点讨论了吸积盘(包括薄盘和厚盘)中心黑洞的自转角速度 Ω_h 的演化特征. 结果表明, 在顺行吸积过程中 Ω_h 先增后减, 演化非单调. 这一结果包含两个含义: 1) Ω_h 在演化过程中存在一个极大值, 本文分别对薄盘和厚盘求出了中心黑洞自转角速度 Ω_h 的极大值; 2) 同一个 Ω_h 值可能对应于两个不同的黑洞自转状态.

通过比较 J , a_* 和 Ω_h 的演化特征, 我们认为黑洞的无量纲角动量 a_* 比黑洞的角动量 J 和自转角速度 Ω_h 更适合描写吸积盘中心黑洞自转状态的演化.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 19773005)资助的课题.

2 薄盘吸积过程中 Ω_h 的演化特征

已经证明在同时考虑顺行吸积过程和 B-Z 过程的条件下, 薄盘中心黑洞的无量纲角动量 a_* 是单调增加的, 而且对于给定的吸积率 a_* 会演化到一个稳定值 $(a_*^s)^1 \approx 0.983^{[5]}$. 一个令人感兴趣的问题是黑洞的自转角速度 Ω_h 如何演化. Kerr 黑洞的角速度可表示为

$$\Omega_h = a_* (2M(1+q))^{-1} = M^{-1}f(a_*), \quad (1)$$

其中 M 为黑洞的质量, $q = \sqrt{1-a_*^2}$, $f(a_*) = a_*/2(1+q)$. 在同时考虑吸积过程和 B-Z 过程的条件下, 可求得黑洞的自转角速度 Ω_h 的变化率为

$$(d\Omega_h/dt)_{BZ}^1 = -M^{-2}f(a_*)(dM/dt)_{BZ}^1 + M^{-1}(df/da_*)(da_*/dt)_{BZ}^1. \quad (2)$$

$$\text{已求得} \quad (dM/dt)_{BZ}^1 = (dM/dt)^1 - P^1, \quad (3)$$

$$(da_*/dt)_{BZ}^1 = 2\sqrt{3}M^{-1}(dM/dt)^1(1-a_*/x_{ms})^2/E_{ms} - (2P^1/Ma_*)(1+q)(k^{-1}-1+q), \quad (4)$$

其中 x_{ms} 和 E_{ms} 的意义及表达式同文献[5]. (2)–(4) 式中, 上标“1”代表薄盘吸积的有关量, 下标“B-Z”代表考虑到 B-Z 过程影响的有关量(以下同). 薄盘情况 B-Z 过程对旋转黑洞的提取功率可表为^[5,7]

$$P^1 = (4a_*^2/13)k(1-k)(dM/dt)^1, \quad (5)$$

其中 $(dM/dt)^1 = E_{ms}(dM_0/dt)^1$, $(dM_0/dt)^1$ 为静止质量吸积率, $k = \Omega_f/\Omega_h$, Ω_f 为附着在黑洞视界面上的磁力线的角速度. 当 $k = 0.5$ 时, B-Z 过程提取旋转黑洞的功率取极大值^[8]. 将(3)–(5)诸式代入(2)式得到

$$(d\Omega_h/dt)_{BZ}^1 = F(a_*; k)M^{-2}(dM/dt)^1, \quad (6)$$

$$\text{其中} \quad F(a_*; k) = (2a_*/13)(1-k)[k(1-q)(1+2q^{-1}) - 2q^{-1}] - \frac{a_*}{2(1+q)} + (3(x_{ms}-a_*)^2)[q(1+q)(4x_{ms}-3a_*)]^{-1}. \quad (7)$$

由于在薄盘吸积过程中恒有 $(dM/dt)^1 > 0$, 故 $(d\Omega_h/dt)_{BZ}^1$ 的正负值取决于 $F(a_*; k)$ 的正负值. 可求得对应于 B-Z 过程的最大提取功率的 $F(a_*; 0.5)$ 随 a_* 的变化曲线, 如图 1 所示.

由图 1 易见, 在黑洞的自转角速度 Ω_h 的演化过程中存在一个临界点: $(a_*^c)^1 \approx 0.912$. 当 $a_* < (a_*^c)^1$ 时, $(d\Omega_h/dt)_{BZ}^1 > 0$, 这意味着 Ω_h 在此演化阶段是增加的; 当 $(a_*^c)^1 < a_* < (a_*^s)^1$ 时, $(d\Omega_h/dt)_{BZ}^1 < 0$, 这意味着 Ω_h 在此演化阶段是减小的. 由于 $(a_*^s)^1 \approx 0.983$ 是薄盘中心黑洞 a_* 演化的稳定值. 因此可以预料.

一旦 a_* 演化到这一稳定值后 Ω_h 将随着演化的进行继续单调减小. 显然, $(a_*^c)^1 \approx 0.912$ 对应于黑洞的自转角速度的极大值

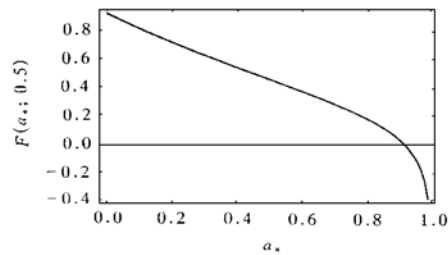


图 1 $F(a_*; 0.5)$ 随 a_* 的变化曲线
 $0 < a_* < 0.983$

$$(\Omega_h)_{\max}^I(0.912) \approx 0.324 M^{-1}. \quad (8)$$

(8) 式中 M 为对应于 $(a_*^c)^I \approx 0.912$ 的中心黑洞的质量. 在 SI 制中求得

$$(\Omega_h)_{\max}^I(0.912) \approx \frac{6.57 \times 10^{-4}}{M_8} \text{ rad s}^{-1}, \quad (9)$$

其中 M_8 是以 $10^8 M_\odot$ 为单位的黑洞质量.

3 厚盘吸积过程中 Ω_h 的演化特征

类似于薄盘, 在同时考虑顺行吸积过程和 B-Z 过程的条件下, 研究厚盘中心黑洞的角速度的演化特征. Kerr 黑洞的角速度仍由(1)式表示, 其变化率可表示为

$$(d\Omega_h/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} = -M^{-2}f(a_*)(dM/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} + M^{-1}(df/da_*)(da_*/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}}. \quad (10)$$

文献[6]已求得 $(dM/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} = (dM/dt)^{\text{II}} - P^{\text{II}}, \quad (11)$

$$(da_*/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} = 2M^{-1}(1 - a_* + \sqrt{1 - a_*})(dM/dt)^{\text{II}} - (2P^{\text{II}}/Ma_*)(1 + q)(k^{-1} - 1 + q). \quad (12)$$

(10) —(12) 式中, 上标“II”代表厚盘吸积的有关量(以下同). 厚度吸积的 B-Z 过程对旋转黑洞的提取功率为^[6, 7] $P^{\text{II}} = (4a_*^2/13)k(1 - k)(dM/dt)^{\text{II}}, \quad (13)$

其中 $(dM/dt)^{\text{II}} = E_{\text{mb}}(dM/dt)^{\text{I}}, E_{\text{mb}} = 1$ 为对应于最内束缚圆轨道 r_{mb} 的比能^[9]. 将(11) —(13) 诸式代入(10)式得到

$$(d\Omega_h/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} = G(a_*; k)M^{-2}(dM/dt)^{\text{II}}, \quad (14)$$

其中 $G(a_*; k) = (2a_*/13)(1 - k)[k(1 - q)(1 + 2q^{-1}) - 2q^{-1}] - \frac{a_*}{2(1 + q)} + (1 - a_* + \sqrt{1 - a_*})(q(1 + q))^{-1}. \quad (15)$

由于在厚盘吸积过程中恒有 $(dM/dt)^{\text{II}} > 0$, 故 $(d\Omega_h/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}}$ 的正负值取决于 $G(a_*; k)$ 的正负值. 令 $k = 0.5$, 可求得对应于 B-Z 过程的最大提取功率的 $G(a_*; 0.5)$ 随 a_* 的变化曲线, 如图 2 所示.

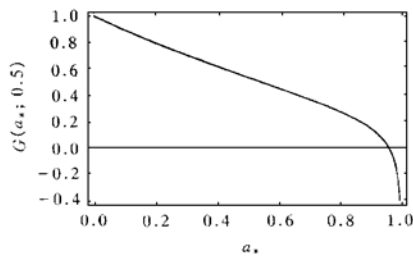


图 2 $G(a_*; 0.5)$ 随 a_* 的变化曲线
 $0 < a_* < 0.992$

文献[6]已求得厚盘中心黑洞的无量纲角动量 a_* 演化的稳定值为 $(a_*^s)^{\text{II}} \approx 0.992$. 由图 2 易见, 在黑洞的自转角速度 Ω_h 的演化过程中存在一个临界点: $(a_*^c)^{\text{II}} \approx 0.956$. 当 $a_* < (a_*^c)^{\text{II}}$ 时, $(d\Omega_h/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} > 0$, 这意味着 Ω_h 在此演化阶段是增加的; 当 $(a_*^c)^{\text{II}} < a_* < (a_*^s)^{\text{II}}$ 时, $(d\Omega_h/dt)_{\text{BZ}}^{\text{II}} < 0$, 这意味着 Ω_h 在此演化阶段是减小的, 由于 $(a_*^s)^{\text{II}} \approx 0.992$ 是厚盘中心黑洞 a_* 演化的稳定值, 因此可以预料一旦 a_* 演化到这一稳定值后

Ω_h 将随着演化的进行继续单调减小. 显然, $(a_*^c)^{\text{II}} \approx 0.956$ 对应于黑洞的自转角速度的极大值 $(\Omega_h)_{\max}^{\text{II}}(0.956) \approx 0.370 M^{-1}. \quad (16)$

(16) 式中 M 为对应于 $(a_*^c)^{\text{II}} \approx 0.956$ 的中心黑洞的质量. 在 SI 制中求得

$$(\Omega_h)_{\max}^{\text{II}}(0.956) \approx \frac{7.51 \times 10^{-4}}{M_8} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (17)$$

4 讨 论

4.1 黑洞自转参量的演化特征比较

通常表征黑洞的自转参量有角动量 J , 无量纲角动量 a^* 及黑洞视界面的自转角速度 Ω_h . 这三个参量虽然都从不同角度反映了黑洞的自转, 但它们的演化特征确有所不同. 文献[5]和[6]已详细讨论了 J 和 a^* 的演化特征, 本文着重讨论了 B-Z 过程对 Ω_h 的演化特征的影响. 将 J , a^* 和 Ω_h 的演化特征加以比较, 如表 1 所示.

表 1 黑洞自转参量的演化特征

变化率	薄吸积盘	厚吸积盘
$(dJ/dt)_{\text{B-Z}}$	$(dJ/dt)_{\text{B-Z}} > 0$, J 单调增加, 无上限	$(dJ/dt)_{\text{B-Z}} > 0$, J 单调增加, 无上限
$(da^*/dt)_{\text{B-Z}}$	a^* 单调增加到稳定值	a^* 单调增加到稳定值
$(d\Omega_h/dt)_{\text{B-Z}}$	Ω_h 先增后减, 存在 $(\Omega_h)_{\max}^{\text{I}}$	Ω_h 先增后减, 存在 $(\Omega_h)_{\max}^{\text{II}}$

由表 1 可见, 在顺行吸积及不考虑 B-Z 过程的条件下, 无论是薄盘吸积还是厚盘吸积, 表征黑洞自转的 3 个参量, J , a^* 和 Ω_h 都是随黑洞吸积盘的演化而单调增加的. 而在顺行吸积且考虑 B-Z 过程的条件下, J , a^* 和 Ω_h 的演化特征却很不相同. 1) 黑洞的角动量 J 仍然单调增加, 没有上限; 2) 黑洞的无量纲角动量 a^* 单调增加到一个稳定值 $a^* < 1$; 3) 黑洞的角速度 Ω_h 的演化不具有单调性, 而是先增后减.

由于 a^* 的演化特征单调, 有界, 其取值唯一确定了中心黑洞向极端 Kerr 黑洞演化的程度, 而给定 J 或 Ω_h 的值并不能确定某一质量未知的黑洞向极端 Kerr 黑洞演化的程度. 尤其是 Ω_h 的演化非单调, 因此, 同一个 Ω_h 的值可能对应于两个不同的黑洞自转状态. 在这个意义上黑洞的无量纲角动量 a^* 比 J 和 Ω_h 更适合描写黑洞自转状态的演化.

4.2 Ω_h 单调减小的演化阶段所对应的黑洞质量的相对改变

我们可以计算在 Ω_h 单调减小的演化阶段所对应的黑洞质量的相对改变 $\Delta M/M_i$, M_i 是中心黑洞的初始质量(对应 $a^* = 0$). 利用(3) — (5)式可得($k = 0.5$)

$$\left[\frac{dM}{M} \right]_{\text{B-Z}}^{\text{I}} = \frac{(1 - a^{*2}/13)}{6(x_{\text{ms}} - a^*)^2 / (4x_{\text{ms}} - 3a^*) - (2a^*/13)(1+q)^2} da^*. \quad (18)$$

利用(11) — (13)式可得($k = 0.5$)

$$\left[\frac{dM}{M} \right]_{\text{B-Z}}^{\text{II}} = \frac{(1 - a^{*2}/13)}{2(1 - a^* + \sqrt{1 - a^{*2}}) - (2a^*/13)(1+q)^2} da^*. \quad (19)$$

对(18)和(19)式积分, 可求得对应于 Ω_h 单调减小的演化阶段中心黑洞质量的相对改变 $\Delta M/M_i$ 如表 2 所示.

表 2 Ω_h 单调减小阶段所对应的黑洞质量的
相对改变 $(\Delta M/M_i)_{B-Z}$

盘的类型	a_* 的变化范围	$(\Delta M/M_i)_{B-Z}$
薄吸积盘	0—0.983	5.01
	0—0.912	0.83
	0.912—0.983	4.18
厚吸积盘	0—0.992	2.71
	0—0.956	0.86
	0.956—0.992	1.85

由表 2 可见, 对于薄盘, a_* 的变化范围: 0.912—0.983 所对应的中心黑洞质量的相对改变为 $(\Delta M/M_i)_{B-Z}^I \approx 4.18$; 对于厚盘, a_* 的变化范围: 0.956—0.992 所对应的中心黑洞质量的相对改变为 $(\Delta M/M_i)_{B-Z}^{II} \approx 1.85$.

若不考虑 B-Z 过程, 容易求得在薄盘顺行吸积的条件下, a_* 的变化范围: 0—0.983 所对应的中心黑洞质量的相对改变

为 $(\Delta M/M_i)^I \approx 0.95$; 在厚盘顺行吸积的条件下, a_* 的变化范围: 0—0.992 所对应的中心黑洞质量的相对改变为 $(\Delta M/M_i)^{II} \approx 0.84$.

显然, $(\Delta M/M_i)_{B-Z}^I > (\Delta M/M_i)^I$, $(\Delta M/M_i)_{B-Z}^{II} > (\Delta M/M_i)^{II}$. 因此, 虽然对应于 Ω_h 单调减小阶段 a_* 的变化范围很小, 但其对应的中心黑洞质量的相对变化却不容忽视.

4.3 磁力线相对于黑洞视界面运动的影响

在上述计算中, 我们取 $k = \Omega_F/\Omega_h = 0.5$, 这对应于 B-Z 过程的提取功率取极大值. Macdonald 和 Thorne^[8] 曾对取 $k = 0.5$ 的理由作了推测性的分析. k 的取值代表磁力线相对于黑洞视界面运动的快慢. $k = 1$ 时, $\Omega_F = \Omega_h$, 磁力线相对于视界面的速度为零, 对应于纯吸积过程. 为了讨论 k 的取值对黑洞自转参量演化的影响, 我们计算了 $k = 0.4, 0.5, 0.6, 1$ 诸值所对应的 Ω_h 和 a_* 演化的几个特征值, 如表 3 所示.

表 3 Ω_h 和 a_* 演化的特征值 ($k = 0.4, 0.5, 0.6, 1$)

k	薄吸积盘		厚吸积盘	
	Ω_h 极大点 $(a_*^c)^I$	a_* 稳定值 $(a_*^s)^I$	Ω_h 极大点 $(a_*^c)^{II}$	a_* 稳定值 $(a_*^s)^{II}$
0.4	0.882	0.969	0.929	0.984
0.5	0.912	0.983	0.956	0.992
0.6	0.940	0.992	0.977	0.997
1	0.994	1	不存在	1

由表 3 不难看出, 在 $k < 1$ 的范围内, 随着 k 值增大, Ω_h 的极大点, 以及 a_* 的稳定值都在增大, 但这 2 个特征点之间的间隔却在减小. 而且对应于同一个 k 值, 厚盘的 2 个特征点之间的间隔比薄盘小. 值得指出的是, 对于纯吸积过程 ($k = 1$), Ω_h 在厚盘吸积过程中单调增加, 不存在极大值; 而在薄盘吸积过程中 Ω_h 存在一个极大值

$$(\Omega_h)_{\max}^I(0.994) \approx \frac{9.10 \times 10^{-4}}{M_8} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (20)$$

4.4 AGNs 中心黑洞的最大自转角速度

根据以上对 Ω_h 演化特征的分析, 我们推断在顺行吸积过程和 B-Z 过程的共同作用下, 薄盘和厚盘的中心黑洞的自转角速度都存在一个极大值, $k = 0.5$ 时, 分别由 (9) 和

(17) 式表示. (9) 和 (17) 式表明吸积盘中心黑洞的最大自转角速度与黑洞的质量成反比. 如果活动星系核 (AGNs) 中心区域的巨型黑洞的质量在 $(10^6 - 10^{10}) M_{\odot}$ 范围内, 由 (9) 和 (17) 式可以估计巨型黑洞自转角速度的上限为: $\Omega_h < (10^{-1} - 10^{-5}) \text{ rad s}^{-1}$. 或者说巨型黑洞自转周期的下限为: $T > (20 - 2) \pi \times 10^5 \text{ s}$.

本文的计算表明, 无论对于薄盘还是厚盘, 均有 $(a_*^c)^I < (a_*^s)^I$, $(a_*^c)^{II} < (a_*^s)^{II}$ 成立. 这一结果并非偶然. 因为 a_* 的稳定值对应于 $(da_*/dt)_{BZ} = 0^{[5,6]}$, 而 Ω_h 的极大值对应于 $(d\Omega_h/dt)_{BZ} = 0$, 由于 (2) 和 (10) 式, 等号右端第一项为负值, 故导致顺行吸积中 $(d\Omega_h/dt)_{BZ} = 0$ 先于 $(da_*/dt)_{BZ} = 0$ 出现.

- [1] M. J. Rees, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **22**(1984), 471.
- [2] R. D. Blandford, R. L. Znajek, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **179**(1977), 433.
- [3] R. Moderski, and M. Sikora, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **283**(1996), 854.
- [4] Lu Youjun, Zhou Youyuan, K. N. Yu, and E. C. M. Young, *Astrophys. J.*, **472**(1996), 564.
- [5] Wang Dingxiong., Lu Ye, Yang Lantian, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **294**(1998), 667.
- [6] Wang Dingxiong., *Gen. Relativ. Grav.*, **30**(1998), 1025.
- [7] S. J. Park, E. T. Vishniac, *ApJ*, **332**(1988), 135.
- [8] D. Macdonald, and K. S. Thorne, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **198**(1982), 345.
- [9] M. A. Abramowicz, J. P. Lasota, *Acta. Astro.*, **30**(1980), 35.

EVOLUTION OF ANGULAR VELOCITY OF CENTRAL BLACK HOLES OF ACCRETION DISKS*

WANG DING-XIONG

(Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074)

(Received 10 July 1998; revised manuscript received 23 November 1998)

ABSTRACT

The evolution characters of angular velocity Ω_h of central black holes of accretion disks (including thin and thick disks) are investigated by considering both accretion and the Blandford-Znajek (B-Z) process. It is shown that the rate of change of Ω_h with respect to time turns from the positive value to the negative, as the dimensionless angular momentum a_* evolves to a critical value. Evolving in a non-monotonous way, Ω_h increases at first, and then decreases in a prograde accretion process. Therefore there exists a maximum of Ω_h . It is pointed out that dimensionless angular momentum a_* is more appropriate to describe the spinning state of a central black hole of an accretion disk than angular momentum J and angular velocity Ω_h .

PACC: 9760L; 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19773005).