

能斯特定理与黑洞的普朗克绝对熵*

赵 峰

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

朱建阳

(江西师范大学物理系, 南昌 330027)

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(1998 年 8 月 31 日收到; 1998 年 12 月 28 日收到修改稿)

考虑 Kerr 黑洞内视界处的热性质后, 给出了 Bekenstein-Smarr 公式的新形式, 重新定义了黑洞熵. 黑洞温度趋于绝对零度时, 新定义的黑洞熵一定趋于零. 它满足能斯特定理, 可视为黑洞的普朗克绝对熵.

PACC: 9760L; 0420

1 引 言

最近 30 年以来, 黑洞物理学的研究取得了长足的进展, 黑洞事件视界(外视界)的面积被视作熵^[1], 而黑洞的表面重力被视作温度^[2]. 人们建立起与热力学四条定律相对应的黑洞热力学四定律^[2-4]. Hawking^[5]从理论上证明了黑洞热辐射的存在, 确认了黑洞具有真正的温度. 近年来, 黑洞温度的研究取得了较大的进展, 相形之下, 对黑洞熵的研究则不能令人满意^[6-8]. 最近, 人们把越来越多的注意力集中到这一方面^[9-21]. 黑洞熵最令人困惑之处在于, 它似乎不满足能斯特定理^[10]. 能斯特定理告诉我们, 当一个系统的温度趋于绝对零度时, 它的熵应该趋于一个常量, 此常量与热力学参量和系统的具体状态无关, 因而可取为零. 以此为零点定义的熵, 称为普朗克绝对熵.

目前的黑洞热力学, 把黑洞熵 S 看作与事件视界面积 A 成正比的量 $S = k_B A / 4$, 以 Kerr 黑洞为例^[8],

$$S = k_B A / 4 = \pi(r_+^2 + a^2) k_B = 2\pi M r_+ k_B, \quad (1)$$

式中 M , a , r_+ 分别为黑洞质量、单位质量角动量和外视界半径. 这样定义的黑洞熵, 在 Kerr 黑洞趋于极端黑洞时, 即趋于绝对零度时, 由于 $a \rightarrow M$, $r_+ \rightarrow M$, 显然有

$$S \rightarrow 2\pi M^2 k_B, \quad (2)$$

熵不趋于零. 所以, 这样定义的黑洞熵, 不满足能斯特定理, 不能看作普朗克绝对熵.

为了解决这一矛盾, Hawking, Gibbons 和 Teitelboim 等^[11-15]主张重新定义极端黑洞的熵, 他们主张极端黑洞的熵为零. 而 Loran, Hiscock 和 Zaslavskii 等^[16-23]不同意他们的

* 国家自然科学基金(批准号: 19773003)资助的课题.

看法, 仍主张极端黑洞的熵为 $S = k_B A / 4$. 目前争论仍在继续.

本文提出一个解释黑洞熵的新方案. 按照我们的方案非极端态黑洞的熵能光滑过渡到极端态黑洞的熵, 且满足能斯特定理. 我们认为, 黑洞热性质不应仅由其外视界参量表示, 黑洞应看作由两个子系统(外视界和内视界)组成的复合热力学系统. 内、外视界对其热性质均有贡献. 黑洞熵不仅与外视界面积有关, 也与内视界面积有关. 我们讨论了黑洞内视界的热性质, 修改了 Bekenstein-Smarr 公式的形式, 重新定义了黑洞熵. 新的黑洞熵, 满足能斯特定理, 可以看作普朗克绝对熵.

本文在论证 Kerr 黑洞内视界存在温度的同时, 提出了内视界处存在“Hawking 吸收”效应的观点, 并进一步解释了 Kerr 黑洞 Hawking 辐射的物理机制^[22, 23].

2 解释 Kerr 黑洞 Hawking 辐射的困难

Hawking 和其他作者已经证明, 稳态黑洞的外视界会产生热辐射, 辐射温度正比于视界的表面重力 κ_+ . 这种辐射的机制是: 视界外附近真空涨落产生的虚正反粒子对可以通过隧道效应而实化^[5]. 由于视界内部单向膜区 Killing 矢量 $(\partial/\partial t)^a$ 类空, 有顺时负能轨道存在, 在视界外附近真空涨落产生的粒子对有可能出现下述情况: 其中的负能反粒子穿过隧道进入视界, 然后顺时进行落向内禀奇异区(以下简称奇区, 对史瓦西黑洞是奇点, 对 Kerr 黑洞是奇环); 而正能粒子则由视界处顺时射向远方. 实际上, 顺时进行的负能反粒子相当于逆时前进的正能粒子. 所以, 顺时前进落向奇区的负能反粒子, 相当于由奇区出发, 逆着时间前进的正能粒子, 它在视界处被引力场散射, 然后顺时飞向无穷远.

上述解释对于史瓦西黑洞没有疑问. 但对于转动和带电的黑洞却存在问题. 这是因为它们有内、外两个视界, 内视界包围的“空腔”不是单向膜区, 不允许顺时负能轨道存在, 负能反粒子不能顺时到达奇区, Hawking 辐射的解释碰到了困难. 这种困难, 对于旋转或带电的黑洞是普遍存在的.

3 内视界与“Hawking 吸收”

值得注意的是, 负能反粒子虽然不能由内视界顺时运动到达奇区, 但却可以逆时运动到达, 这相当于内禀奇区产生辐射, 辐射的正能粒子穿过空腔到达内视界, 与那里的负能反粒子复合. 因此, 解决上述困难的一个合理设想是: 奇区产生辐射, 辐射的正能粒子流顺时到达内视界后, 在那里被引力场散射, 逆时穿过单向膜区, 在外视界处再次被引力场散射, 然后顺时飞向远方, 形成 Hawking 辐射.

下面我们具体探讨这种设想. 为此, 先研究内视界的热性质.

首先考虑视界的表面重力. Kerr 黑洞外视界的表面重力, 即: 在视界外附近, 与视界一起刚性共转的粒子所受的固有加速度和红移因子的乘积, 在该粒子无穷趋近于视界面时的极限值. 我们把这一定义推广到 Kerr 黑洞的内视界^[22].

$$\kappa_{\pm} = \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \left[\pm b \frac{dt}{d\tau} \right] = \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \left[\mp \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-g^{11}}}{\sqrt{g^{00}}} \left(\frac{g^{00}}{g^{00}} \right)' \right] = \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \pm \frac{1}{2(r - r_{\pm})} \sqrt{\frac{g^{11}}{g^{00}}}, \quad (3)$$

其中 κ_+ 为外视界上的表面重力, κ_- 为内视界上的表面重力, $r = r_+$ 为外视界, $r = r_-$ 为内视界, $b = \sqrt{g_{11}} \frac{d^2 r}{ds^2}$ 为固有加速度, $\frac{dt}{d\tau}$ 为红移因子. 这里用了短程线方程. 因为 $g^{11} = \frac{\Delta}{\rho^2}$, $g^{00} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right]$, $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr = (r - r_+)(r - r_-)$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2}$. 不难从(3)式得到外、内视界的表面重力

$$\kappa_{\pm} = \lim_{r \rightarrow r_{\pm}} \pm \frac{1}{2(r - r_{\pm})} \left[\frac{\Delta}{\rho^2} \frac{\Delta \rho^2}{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]} \right]^{1/2} = \frac{r_+ - r_-}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}. \quad (4)$$

在 Kerr 时空中, Klein-Gordon 方程的径向方程可以化为^[23]

$$\Delta \frac{d^2 \phi}{dr^2} + 2(r - M) \frac{d\phi}{dr} = \left[\lambda^2 + \mu^2 r^2 - \frac{K^2}{\Delta} \right] \phi, \quad (5)$$

其中 $K = (r^2 + a^2)\omega - ma$, λ 为分离变量常数. 引入 Tortoise 坐标变换

$$\begin{cases} \frac{d\hat{r}}{dr} = \pm \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \\ \hat{r} = \pm \left[r + \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(r_+ \ln \frac{|r - r_+|}{r_+} - r_- \ln \frac{|r - r_-|}{r_-} \right) \right], \end{cases} \quad (6)$$

其中“+”号应用于 $r > r_+$ 的情况, “-”号应用于 $r < r_-$ 的情况. 于是, 在视界附近, Klein-Gordon 方程可化成

$$\frac{d^2 \phi}{d\hat{r}^2} + (\omega - \omega_0)^2 \phi = 0, \quad (7)$$

其中 $\omega_0 = m\Omega_{\pm}$, $\Omega_{\pm}$ 分别为内、外视界转动角速度,

$$\Omega_{\pm} = a/(r_{\pm}^2 + a^2), \quad (8)$$

“+”号对应于外视界, 不难从上述结果推出外视界的 Hawking 辐射. 现在只对内视界感兴趣, 即只考虑“-”号对应的情况. (7)式的解为

$$\phi = e^{\pm i(\omega - \omega_0)\hat{r}}, \quad (9)$$

出射波

$$\phi_{\text{out}} = e^{-i\omega\hat{r} + i(\omega - \omega_0)\hat{r}} = e^{-i\omega\hat{r} - (\omega - \omega_0)\hat{r}/\omega} = e^{-i\omega\hat{r}}, \quad (10)$$

入射波

$$\phi_{\text{in}} = e^{-i\omega\hat{r} - i(\omega - \omega_0)\hat{r}} = e^{-i\omega\hat{r} + (\omega - \omega_0)\hat{r}/\omega} = e^{-i\omega\hat{r}} \cdot e^{-2i(\omega - \omega_0)\hat{r}}. \quad (11)$$

因为内视界是过去视界, 这里采用了“滞后爱丁顿坐标” $u = t - \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \hat{r}$.

当 $r \rightarrow r_-$ 时, $\hat{r} \rightarrow -\infty$; $r \rightarrow 0$ 时, $\hat{r} \rightarrow 0$. 所以, (10)式确实表示由内视界射向奇区的出射波, (11)式则表示由奇区到内视界的入射波.

不难看出, 在 $r \rightarrow r_-$ 时,

$$\hat{r} \sim \frac{1}{2\kappa_-} \ln(r_- - r). \quad (12)$$

于是

$$\phi_{\text{in}} = e^{-i\omega u} (r_- - r)^{-i(\omega - \omega_0)/\kappa_-}. \quad (13)$$

由于波在内视界处非解析, 沿上半复 r 平面把它解析延拓到内视界的外侧(单向膜区), 在单向膜区 $|r_- - r|e^{i\pi} = (r - r_-)e^{i\pi}$, 所以

$$\begin{aligned}\phi_{\text{in}} &= e^{-i\omega u} [(r - r_-)e^{i\pi}]^{-i(\omega - \omega_0)/\kappa_-} = e^{-i\omega u} (r - r_-)^{-i(\omega - \omega_0)/\kappa_-} e^{\pi(\omega - \omega_0)/\kappa_-} \\ &= \phi'_{\text{in}}(r - r_-)e^{\pi(\omega - \omega_0)/\kappa_-}.\end{aligned}\quad (14)$$

总波函数

$$\phi_\omega = N_\omega [Y(r_- - r)\phi_{\text{in}}(r_- - r) + e^{\pi(\omega - \omega_0)/\kappa_-} Y(r - r_-)\phi'_{\text{in}}(r - r_-)], \quad (15)$$

$$Y(r) = \begin{cases} 1 & r \geq 0; \\ 0 & r < 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\phi'_{\text{in}} &= e^{-i\omega u} (r - r_-)^{-i(\omega - \omega_0)/\kappa_-} = e^{-i\omega u} \cdot e^{-2i(\omega - \omega_0)\hat{r}}, \\ (\phi_{\omega_+}, \phi_{\omega_-}) &= N_\omega^2 (1 \pm e^{(\omega - \omega_0)/k_B T_-}) = \pm 1.\end{aligned}\quad (17)$$

最后得到射入内视界的热谱为

$$N_\omega^2 = \frac{1}{e^{(\omega - \omega_0)/k_B T_-} \pm 1}, \quad (18)$$

$$T_- = \frac{\kappa_-}{2\pi k_B}, \quad (19)$$

其中“+”号对应于费密子, “-”号对应于玻色子.

于是, 我们证明了, 有来自空腔射向内视界的辐射, 这种辐射是温度为 T_- 的黑体辐射. 内视界吸收黑体辐射的现象, 可称作“Hawking 吸收”. 考虑到 Kerr 黑洞是稳态黑洞, 外视界应与洞外热辐射处于热平衡, 内视界也应与腔内($r < r_-$ 区)热辐射处于热平衡. 所以内视界不仅从腔内吸收 T_- 的热辐射, 也必定向腔内发射 T_- 的热辐射. 因此, Kerr 黑洞的内视界, 可看作温度为 T_- 的系统.

这样, 我们克服了上一节中提到的解释 Hawking 辐射的困难. 按照我们的观点, 黑洞 Hawking 辐射的根源是来自奇区附近的热辐射. 我们从物理的角度出发, 求解动力学方程, 通过时间反演和量子效应“诱导”出奇区附近产生热辐射的结论, 并且认为内视界具有温度, 在那里存在“Hawking 吸收”效应.

此外, 可以计算出黑洞外视界的面积 A_+ 和内视界的面积 A_- ,

$$A_{\pm} = \pm \int \sqrt{g} d\theta d\varphi = \pm 4\pi(r_{\pm}^2 + a^2), \quad (20)$$

式中 $g = (r_{\pm}^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta$ 为内、外视界面二维度规的行列式. 由于内视界相当于“白洞视界”, 我们把 A_- 取作负值, 下面将看到, A_- 对黑洞熵有贡献.

4 Bekenstein-Smarr 公式的新形式与黑洞的普朗克绝对熵

利用(4), (8)和(20)式不难算出

$$2\Omega_+ J = r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{4\pi} \kappa_+ A_+ = \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (22)$$

二者相加可得积分形式的 Bekenstein-Smarr 公式

$$M = \frac{1}{4\pi} \kappa_+ A_{++} + 2\Omega_+ J. \quad (23)$$

这一公式是大家所熟悉的, 它完全由外视界参量表达^[2]. 同样可以算得

$$2\Omega_- J = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (24)$$

$$\frac{1}{4\pi} \kappa_- A_- = -\sqrt{M^2 - a^2}. \quad (25)$$

于是得到完全由内视界参量表达的积分 Bekenstein-Smarr 公式

$$M = \frac{1}{4\pi} \kappa_- A_{-+} + 2\Omega_- J. \quad (26)$$

还可以等价地把(23)和(26)式合写为

$$M = \frac{1}{8\pi} \kappa_+ A_{++} - \Omega_+ J + \frac{1}{8\pi} \kappa_- A_{-+} - \Omega_- J. \quad (27)$$

这是用内、外视界参量共同表出的积分 Bekenstein-Smarr 公式. (23), (26) 与 (27) 在数学上完全等价. 微分(23)式得

$$\delta M = \frac{1}{4\pi} \kappa_+ \delta A_{++} + \frac{1}{4\pi} A_+ \delta \kappa_+ + 2\Omega_+ \delta J + 2J \delta \Omega_+. \quad (28)$$

此外, 不难证明

$$2J \delta \Omega_+ = \frac{Ma}{r_+ \sqrt{M^2 - a^2}} \delta a - \frac{a^2}{M \sqrt{M^2 - a^2}} \delta M, \quad (29)$$

$$\frac{1}{4\pi} A_+ \delta \kappa_+ = \left[\frac{a^2}{M \sqrt{M^2 - a^2}} - 1 \right] \delta M - \frac{Ma}{r_+ \sqrt{M^2 - a^2}} \delta a. \quad (30)$$

把(29), (30)式代入(28)式, 得到熟悉的微分形式的 Bekenstein-Smarr 公式

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa_+ \delta A_{++} - \Omega_+ \delta J. \quad (31)$$

同样, 微分(26)式得

$$\delta M = \frac{1}{4\pi} \kappa_- \delta A_{-+} + \frac{1}{4\pi} A_- \delta \kappa_- + 2\Omega_- \delta J + 2J \delta \Omega_-. \quad (32)$$

又可证明

$$2J \delta \Omega_- = \frac{-Ma}{r_- \sqrt{M^2 - a^2}} \delta a + \frac{a^2}{M \sqrt{M^2 - a^2}} \delta M, \quad (33)$$

$$\frac{1}{4\pi} A_- \delta \kappa_- = \left[-1 - \frac{a^2}{M \sqrt{M^2 - a^2}} \right] \delta M + \frac{Ma}{r_- \sqrt{M^2 - a^2}} \delta a. \quad (34)$$

把(33), (34)式代入(32)式, 可得到用内视界参量表示的 Bekenstein-Smarr 公式

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa_- \delta A_{-+} - \Omega_- \delta J. \quad (35)$$

不难证明, 相应于(27)式的微分 Bekenstein-Smarr 公式为

$$\delta M = \frac{1}{16\pi} \kappa_+ \delta A_{++} - \Omega_+ \delta J_{++} + \frac{1}{16\pi} \kappa_- \delta A_{-+} - \Omega_- \delta J_{-}, \quad (36)$$

其中

$$J_+ = J_- = J/2. \quad (37)$$

不难看出, (31), (35) 与 (36) 式在数学上完全等价. (36) 式又可写为

$$\delta M = T_+ \delta S_{++} - \Omega_+ \delta J_{++} - T_- \delta S_{--} + \Omega_- \delta J_{--}, \quad (38)$$

式中

$$T_{\pm} = \kappa_{\pm} / 2\pi k_B, \quad S_{\pm} = k_B A_{\pm} / 8 \quad (39)$$

分别为内、外视界的温度和熵.

现在, 我们把通常使用的、仅用外视界参量给出的微分 Bekenstein-Smarr 公式, 等价地用新形式 (38) 式表出来. 外视界的温度与以往给出的一样, 内视界温度则与上节计算的相同. 值得注意的是, (38) 和 (39) 式认为内、外视界的面积都对黑洞熵有贡献,

$$\tilde{S} = S_{++} - S_{--} = (k_B/8)(A_{++} - A_{--}) = (\pi/2)(r_+^2 - r_-^2)k_B = 2\pi M \sqrt{M^2 - a^2} k_B. \quad (40)$$

它显然不同于 (1) 式所示的、只用外视界面积表达的黑洞熵

$$S = k_B A_+ / 4 = 2\pi M r_+ k_B = 2\pi M (M + \sqrt{M^2 - a^2}) k_B. \quad (41)$$

不难看出, 当 Kerr 黑洞趋于极端黑洞时, $M^2 \rightarrow a^2$, $r_+ = r_- = M$, 内、外视界的温度趋于绝对零度,

$$T_{\pm} = \kappa_{\pm} / 2\pi k_B = \frac{1}{2\pi k_B} \frac{r_+ - r_-}{2(r_{\pm}^2 - a^2)} \rightarrow 0. \quad (42)$$

这时, (41) 式所示的黑洞熵 S 不趋于零, 而 (42) 式定义的黑洞熵 $\tilde{S}$ 趋于零. 可见, 我们重新定义的黑洞熵 $\tilde{S}$, 满足能斯特定理, 可以视为黑洞的普朗克绝对熵.

5 结论与讨论

我们论证了黑洞内视界具有热性质, 存在“Hawking 吸收”效应, 进一步解释了 Kerr 黑洞的 Hawking 辐射机制.

我们把黑洞视为由内、外视界两个子系统构成的复合热力学系统, 重新写出了 Bekenstein-Smarr 公式. 此公式与原公式在数学上完全等价, 但物理意义不同. 新公式给出的外视界温度, 与通常的结果一致; 给出的内视界温度, 则与“Hawking 吸收”效应相符.

新公式给出的黑洞熵, 与以往只用外视界面积表达的黑洞熵不同, 包含内、外视界两部分面积的贡献. 当黑洞趋于绝对零度时, 新定义的黑洞熵趋于零, 满足能斯特定理. 所以, 它可以看作黑洞的普朗克绝对熵.

我们认为, 以往只用外视界面积定义的黑洞熵有缺点, 正确的黑洞熵表达式应该是本文给出的、满足能斯特定理的表达式.

[1] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **25**(1972), 152.

[2] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **31**(1973), 161.

[3] J. Bekenstein, PHD Thesis (Princeton University, 1972).

[4] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.*, **30**(1973), 71.

- [5] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.
- [6] W. G. Unruh, R. M. Wald, *Phys. Rev.*, **D25**(1982) 942.
- [7] V. P. Frolov, D. N. Page, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 3902.
- [8] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1994) .
- [9] H. Lee, S. W. Kim, W. T. Kim, *Phys. Rev.*, **D54**(1996), 6559.
- [10] R. M. Wald, *Phys. Rev.*, **D56**(1997), 6467.
- [11] S. W. Hawking, G. Horowitz and S. Ross, *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 4302.
- [12] G. W. Gibbons, R. E. Kallosh, *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 2839.
- [13] C. Teitelboim, *Phys. Rev.*, **D51**(1995), 4315.
- [14] A. Ghosh, P. Mitra, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 4848.
- [15] A. Ghosh, P. Mitra, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1996), 1858.
- [16] D. J. Loran, W. A. Hiscock and P. R. Anderson, *Phys. Rev.*, **D52**(1995), 4554.
- [17] O. B. Zaslavskii, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996), 2211.
- [18] O. B. Zaslavskii, *Phys. Rev.*, **D56**(1997), 2188.
- [19] O. B. Zaslavskii, *Phys. Rev.*, **D56**(1997), 6695.
- [20] D. J. Konkowski, T. M. Helliwell, *Phys. Rev.*, **D54**(1996), 7898.
- [21] J. M. Maldacena, A. Strominger, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 428.
- [22] 赵 峥, 物理学报, **30**(1981), 1508. [Zhao Zheng, *Acta Physica Sinica*, **30**(1981), 1508(in Chinese)].
- [23] 赵 峥, 桂元星, 刘 辽, 天体物理学报, **1**(1981), 141 [Zhao Zheng, Gui Yuanxing, Liu Liao, *Chin. Astronomy and Astrophysics*, **5**(1981), 365].

NERNST THEOREM AND PLANCK ABSOLUTE ENTROPY OF BLACK HOLE*

ZHAO ZHENG

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

ZHU JIAN-YANG

(Department of Physics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027)

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

(Received 31 August 1998; revised manuscript received 28 December 1998)

ABSTRACT

After considering thermal character of the inner horizon of Kerr black hole, we give a new form of the Bekenstein-Smarr formula and re-define black hole entropy. The black hole entropy re-defined must go to zero as the temperature of black hole approaches absolute zero. The entropy satisfies the Nernst theorem, so it can be regarded as the Planck absolute entropy of black hole.

PACC: 9760L; 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19773003) .