第 48 卷 第 9 期 1999 年 9 月
1000-3290/1999/48(09)/1565-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 48, No. 9, September, 1999

经典 ħ-deformed W_N 代数

杨文力 侯伯宇
(西北大学现代物理研究所, 西安 710069)
(1998 年 12 月 8 日收到; 1999 年 3 月 5 日收到修改稿)

构造了经典 ħ-deformed W_N 代数, 得到了与之相对应的 ħ-deformed Miura 变换. 当畸变参数 $\hbar\rightarrow 0$ 时, 该代数将退化为通常的经典 W_N 代数.

PACC: 0220; 0240; 0350; 1100

1 引 言

仿射 Kac-Moody 代数、W 代数的研究, 在二维共形场论中处于极其重要的地位. 著名的 WZNW 模型的物理态空间实际上是与该模型相联系的仿射 Kac-Moody 代数的表示空间, Liouville-Toda 和共形仿射 Toda 模型(它们均为 WZNW 模型的共形 Hamilton 约化得到的可积模型) 则是 W 代数的表示空间. 然而共形场论模型仅仅是描述物理系统处于临界状态的理论, 破坏共形对称性的理论才是描写有质量、临界外现象的理论, 因而是更有意义的研究方向, 并且受到关注[1, 2].

Zamolodchikov[1] 指出, 在共形场中加入适当的扰动项, 将共形场破缺到临界外, 但仍然保持有无穷多守恒流, 可以得到非共形、完全可积有质量场论模型. 例如 sine-Gordon, affine Tode 模型就可以看作是由这种方式得到的. 这些模型对称性的研究表明, 通过共形场扰动得到的有质量可积场论模型的对称代数是仿射 Kac-Moody 代数、W 代数的某种畸变代数(这里我们称之为 ħ-deformed(代数). ħ-deformed 仿射 Kac-Moody 代数通常称为 Yangian Double $DY_\hbar(\hat{g})_c$[3, 4], Smirnov[5] 证明 $DY_\hbar(\hat{sl}_2)_c$ 是 $SU(2)$-Invariant Thirring 模型的动力学对称代数, 同时当 $\hbar\rightarrow 0$ 时, ħ-deformed 仿射代数 $DY_\hbar(\hat{g})$ 将退化为通常的仿射 Kac-Moody 代数 $\hat{g}$. 与 W_N 代数相对应的畸变代数, 我们称之为 ħ-deformed W_N 代数, 其中 ħ-deformed W_2 代数(即 ħ-deformed Virasoro 代数是 Retricted sine-Gordon 模型的对称代数[5]. 类似地, 当 $\hbar\rightarrow 0$ 时, ħ-deformed W_N 代数将退化为通常的 W_N 代数. 本文将构造 ħ-deformed W_N 代数的经典理论.

具有形式

$$\partial^N+\Delta_1\partial^{N-2}+\cdots+\Delta_{N-1}$$

的微分算子所构成的空间具有 Poisson 结构(经典 W_N 代数) ——所谓的"第二类 Alder-Gelfand-Dickey 括号". Drinfeld 和 Sokolov 证明, 该 Poisson 结构可以通过仿射 Kac-Moody 代数对偶空间的 Hamilton 约化得到. 另一方面, 经典 W_N 代数还可以通过研究仿

射 Kac-Moody代数在临界情形(即 level= $-$ Coxter number)的性态得到[6]. 具体如下:如果 $Z(\hat{sl}_N)_{-N}$ 是 $U(\hat{sl}_N)$ 代数在 level= $-N$ 时的中心,那么该中心 $Z(\hat{sl}_N)_{-N}$ 具有正则 Poisson 结构, Feigin 和 Frenkel 证明该 Poisson 代数就是经典 W_N 代数[7].

Frenkel 等[8,9]利用第二种方法,通过研究 q-deformed 仿射 Kac-Moody 代数在临界 level 时的中心,构造了经典 q-deformed W_N 代数,通过量子化,得到量子 q-deformed W_N 代数. 量子 q-deformed W_N 代数是许多格点统计模型的对代数. 利用平行的方法,丁详茂等[10]通过研究 $DY_\hbar(\hat{sl}_2)_c$ 代数在 level= -2 情形下中心的正则 Poisson 结构,得到了经典 $\hbar$-deformed Virasoro 代数.

2 经典 $\hbar$-deformed W_N 代数

本文将丁详茂等[10]在 $N=2$ 的结果推广到一般 N 情形,得到了经典 $\hbar$-deformed W_N 代数. 首先,我们从一般 N 的 Miura 变换出发构造 $\hbar$-deformed W_N 代数,

$$\begin{aligned}&(e^{i\hbar\partial_\beta}-\Lambda_1(\beta))(e^{i\hbar\partial_\beta}-\Lambda_2(\beta-i\hbar))\cdots(e^{i\hbar\partial_\beta}-\Lambda_N(\beta-i(N-1)\hbar))\\ &=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m t_m\left(\beta-i\frac{m-1}{2}\hbar\right)e^{i(N-m)\hbar\partial_\beta}. \end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\Lambda_m(\beta)$ 满足如下的约束条件:

$$t_N(\beta)=\Lambda_1\left(\beta+i\frac{N-1}{2}\hbar\right)\Lambda_2\left(\beta+i\frac{N-3}{2}\hbar\right)\cdots\Lambda_N\left(\beta-i\frac{N-1}{2}\hbar\right)=1. \tag{2}$$

由(1)式可得

$$t_m(\beta)=\sum_{1\leqslant j_1<j_2\cdots<j_m\leqslant N}\Lambda_{j_1}\left(\beta+i\frac{m-1}{2}\hbar\right)\Lambda_{j_2}\left(\beta+i\frac{m-3}{2}\hbar\right)\cdots\Lambda_{j_m}\left(\beta-i\frac{m-1}{2}\hbar\right). \tag{3}$$

由此可见, $\hbar$-deformed Miura 变换(1)式给出了$\{t_m(\beta), m=1, \ldots, N\}$与$\{\Lambda_m(\beta), m=1, \ldots, N\}$之间的一一对应关系.

在进一步讨论之前,我们首先考虑 $\hbar$-deformed Miura 变换(1)式与通常 W_N 代数的 Miura 变换[6,8]之间的关系. 如果当 $\hbar$ 非常接邻近 0 时,我们有

$$\Lambda_m(\beta)=1+i\hbar\chi_m(\beta)+o(\hbar), \tag{4}$$

$$e^{i\hbar\partial_\beta}=1+i\hbar\partial_\beta+o(\hbar). \tag{5}$$

则(1)式将变为

$$\begin{aligned}&(i\hbar)^N(\partial_\beta-\chi_1(\beta))\cdots(\partial_\beta-\chi_N(\beta))+o(\hbar^N)\\ &=(i\hbar)^N\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\Delta_m(\beta)\partial_\beta^m+o(\hbar^N),\end{aligned}$$

且有

$$\sum_{m=0}^{N}\chi_m(\beta)=0.$$

即当 $\hbar\to 0$ 时,有

$$(\partial_\beta - \chi_1(\beta))\cdots(\partial_\beta - \chi_N(\beta)) = \sum_{m=0}^{N}(-1)^m \Delta_m(\beta)\partial_\beta^m, \tag{6}$$

且有

$$\sum_{m=0}^{N}\chi_m(\beta) = 0. \tag{7}$$

(6), (7)式是通常 W_N 代数的 Miura 变换, $\Delta_m(\beta)$是 W_N 代数的生成元.

在处理经典 ħ-deformed W_N 代数时, 我们常常会遇到一些形式 Fourier 积分, 对于它们的理解是与处理 q-deformed W_N 代数时遇到的形式幂级数[6,7]相同的, 并且我们引入如下的定义:

$$\delta(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta t}\,dt.$$

经典 ħ-deformed W_N 代数是由$\{t_m(\beta), (m=1, \ldots, N)\}$生成的 Poisson 代数.

1) 当 $n \leqslant m$ 且 $n+m \leqslant N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\{t_n(\beta_1), t_m(\beta_2)\} = \hbar\Bigg\{ & f_{nm}(\beta_1-\beta_2)\, t_n(\beta_1)\, t_m(\beta_2) \\ & - \sum_{r=1}^{n}\delta\left(\beta_1-\beta_2+i\hbar\left(\frac{n-m}{2}-r\right)\right) \\ & \times t_{n-r}\left(\beta_2+i\frac{m-n+r}{2}\hbar\right) t_{m+r}\left(\beta_1+i\frac{n-m-r}{2}\hbar\right) \\ & + \sum_{r=1}^{n}\delta\left(\beta_1-\beta_2+i\hbar\left(\frac{m-n}{2}+r\right)\right) \\ & \times t_{n-r}\left(\beta_1+i\frac{r}{2}\hbar\right) t_{m+r}\left(\beta_2-i\frac{r}{2}\hbar\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{8}$$

2) 当 $n \leqslant m$ 且 $n+m > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\{t_n(\beta_1), t_m(\beta_2)\} = \hbar\Bigg\{ & f_{nm}(\beta_1-\beta_2)\, t_n(\beta_1)\, t_m(\beta_2) \\ & - \sum_{r=1}^{N-m}\delta\left(\beta_1-\beta_2+i\hbar\left(\frac{n-m}{2}-r\right)\right) \\ & \times t_{n-r}\left(\beta_1+i\frac{m-n+r}{2}\hbar\right) t_{m+r}\left(\beta_1+i\frac{n-m-r}{2}\hbar\right) \\ & + \sum_{r=1}^{N-m}\delta\left(\beta_1-\beta_2+i\hbar\left(\frac{m-n}{2}+r\right)\right) \\ & \times t_{n-r}\left(\beta_1+i\frac{r}{2}\hbar\right) t_{m+r}\left(\beta_2-i\frac{r}{2}\hbar\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{9}$$

(8), (9)式中

$$\begin{aligned} f_{nm}(\beta) = {} & \frac{\partial}{\partial(i\beta)} \\ & \times \ln\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{i\beta}{N\hbar}+\frac{n+m}{2N}\right)\Gamma\left(\frac{i\beta}{N\hbar}+1-\frac{n+m}{2N}\right)\Gamma\left(-\frac{i\beta}{N\hbar}-\frac{n-m}{2N}\right)\Gamma\left(-\frac{i\beta}{N\hbar}+1+\frac{n-m}{2N}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\beta}{N\hbar}-\frac{n-m}{2N}\right)\Gamma\left(\frac{i\beta}{N\hbar}+1+\frac{n-m}{2N}\right)\Gamma\left(-\frac{i\beta}{N\hbar}+\frac{n+m}{2N}\right)\Gamma\left(-\frac{i\beta}{N\hbar}+1-\frac{n-m}{2N}\right)}\right\}.\end{aligned}$$

同时, 我们可以进一步定义 ħ-deformed W_∞代数, 它是由$\{t_n(\beta),\ n=1,\ \dots,\ \infty\}$生成的 Poisson 代数, 满足

$$\begin{aligned}\{t_n(\beta_1),\ t_m(\beta_2)\} = \hbar\Bigg(&\sum_{r=1}^{\min\{n,\ m\}}\delta\left(\beta_1-\beta_2+\mathrm{i}\hbar\left(\frac{m-n}{2}+r\right)\right)\\ &\times t_{n-r}\left(\beta_1+\mathrm{i}\frac{r}{2}\hbar\right)t_{m+r}\left(\beta_2-\mathrm{i}\frac{r}{2}\hbar\right)\\ &-\sum_{r=1}^{\min\{n,\ m\}}\delta\left(\beta_1-\beta_2+\mathrm{i}\hbar_1\left(\frac{n-m}{2}-r\right)\right)\\ &\times t_{n-r}\left(\beta_1-\mathrm{i}\frac{\hbar}{2}r\right)t_{m+r}\left(\beta_2+\mathrm{i}\frac{r}{2}\hbar\right)\Bigg).\end{aligned}\tag{10}$$

可以看出, 当 $N=2$ 时, ħ-deformed W_2 代数就是文献[10]所构造的 ħ-deformed W_2 代数.

实际上, ħ-deformed Miura 变换给出了$\{\Lambda_m(\beta),\ m=1,\ \dots,\ N\}$与$\{t_m(\beta),\ m=1,\ \dots,\ N\}$之间的一一对应关系, 因此(8), (9)式等价于 $\Lambda_m(\beta)$的如下 Poisson 括号:

$$\{\Lambda_m(\beta_1),\ \Lambda_m(\beta_2)\} = \hbar\varphi_{m=m}(\beta_2-\beta_1)\Lambda_m(\beta_1)\Lambda_m(\beta_2),\tag{11}$$

其中 $\varphi_{m=m}(\beta)=f_{1N}(\beta)$;

$$\{\Lambda_n(\beta_1),\ \Lambda_m(\beta_2)\} = \hbar\varphi_{n<m}(\beta_2-\beta_1)\Lambda_n(\beta_1)\Lambda_m(\beta_2),\qquad n<m,\tag{12}$$

其中 $\varphi_{n<m}(\beta)=-f_{1N-1}\left(\beta+\mathrm{i}\frac{N}{2}\hbar\right)$;

$$\{\Lambda_n(\beta_1),\ \Lambda_m(\beta_2)\} = \hbar\varphi_{n>m}(\beta_2-\beta_1)\Lambda_n(\beta_1)\Lambda_m(\beta_2),\qquad n>m,\tag{13}$$

其中 $\varphi_{n>m}(\beta)=-f_{1N-1}\left(\beta-\mathrm{i}\frac{N}{2}\hbar\right)$.

可以证明, (11), (12)和(13)式定义的 Poisson 代数完全等价于(8), (9)式定义的 ħ-deformed W_N 代数.

下面讨论经典 ħ-deformed W_N 代数与经典 W_N 代数的关系. 由于经典 W_N 代数完全可以通过 Miura 变换(6)式得到, 所以我们将从(4)式出发计算$\{\chi_n(\beta),\ n=1,\ \dots,\ N\}$的 Poisson 代数. 由(11)式和函数$f_{nm}(\beta)$的定义可得

$$\hbar^2\{\chi_n(\beta_1),\ \chi_n(\beta_2)\}+o(\hbar^2) = \hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N-1}{N}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_1-\beta_2)}\mathrm{d}t+o(\hbar^2),$$

即

$$\{\chi_n(\beta_1)\},\ \chi_n(\beta_2) = \mathrm{i}\frac{N-1}{N}\delta'(\beta_1-\beta_2).\tag{14}$$

同理可得

$$\{\chi_n(\beta_1),\ \chi_m(\beta_2)\} = -\frac{\mathrm{i}}{N}\delta'\left(\beta_1-\beta_2+\mathrm{i}\frac{N}{2}\hbar\right),\qquad n<m,\tag{15}$$

$$\{\chi_n(\beta_1),\ \chi_m(\beta_2)\} = -\frac{\mathrm{i}}{N}\delta'\left(\beta_1-\beta_2-\mathrm{i}\frac{N}{2}\hbar\right),\qquad n>m,\tag{16}$$

同时(2)式等价于

$$\sum_{m=1}^{N}\chi_m(\beta) = 0.\tag{17}$$

(14), (15), (16), (17)式就是由 Miura 变换(6)式定义经典 W_N 代数时$\{\chi_m(\beta),\ m=1,\ \cdots,\ N\}$应满足的 Poisson 代数. 这说明当 $\hbar\to 0$ 时, 经典 ħ-deformed W_N 代数将退化为通常的经典 W_N 代数.

3　经典 ħ-deformed W_N 代数的玻色化

我们已得到了经典 ħ-deformed W_N 代数的 Poisson 代数, 为了进一步得到量子 ħ-deformed W_N 代数, 需要寻找它的 Darboux 坐标, 亦即得到由(8), (9)式定义的 Poisson 代数(或者由(11), (12)和(13)式定义的 Poisson 代数)的经典玻色子实现. 本节将构造$\{\Lambda_m(\beta), (m=1,\ \cdots,\ N)\}$的经典玻色子实现. 实际上, 通过 ħ-deformed Miura 变换, 也就得到$\{t_m(\beta), (m=1,\ \cdots,\ N)\}$的经典玻色子实现.

首先, 定义经典玻色子$\{\lambda_m(t), (m=1,\ \cdots,\ N;\ t\in R-\{0\})\}$, 它们满足如下的 Heisenberg-Poisson 代数:

$$\{\lambda_m(t),\ \lambda_m(t')\} = \hbar\frac{2\,\mathrm{sh}\left[\frac{(N-1)\hbar}{2}t\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\hbar}{2}t\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{N\hbar}{2}t\right]}\delta(t+t'), \tag{18}$$

$$\{\lambda_m(t),\ \lambda_n(t')\} = -\hbar\frac{2\,\mathrm{sh}\left[\frac{\hbar}{2}t\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\hbar}{2}t\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{N\hbar}{2}t\right]}\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(m-n)\frac{N\hbar t}{2}}\delta(t+t'),\qquad n\neq m. \tag{19}$$

且 $\lambda_m(t)$满足如下约束:

$$\sum_{m=1}^{N}\lambda_m(t)\mathrm{e}^{m\hbar t} = 0. \tag{20}$$

可以证明, 上述约束条件(20)式是与 Poisson 括号(18)式和(19)式相容的, 即 $\left\{\sum_{n=1}^{N}\lambda_n(t)\mathrm{e}^{n\hbar t},\ \lambda_m(t')\right\} = 0.$

利用这些经典玻色子$\{\lambda_m(t), (m=1,\ \cdots,\ N)\}$, 我们定义

$$\Lambda_m(\beta) = \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_m(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\mathrm{d}t\right]. \tag{21}$$

可以证明, 由(21)式定义的$\{\Lambda_m(\beta), (m=1,\ \cdots,\ N)\}$满足(11), (12)和(13)式, 其中需要利用 Γ 函数的积分表达式,

$$\Gamma(z) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-zt}-\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}+(z-1)\mathrm{e}^{-t}\right]\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\},\qquad \mathrm{Re}(z)>0,$$

且约束条件(20)式等价于(2)式. 这样, 我们实现了经典 ħ-deformed W_N 代数的玻色化, 为进一步得到 ħ-deformed W_N 代数的量子理论创造了条件.

4　讨　　论

本文构造了经典 ħ-deformed W_N 代数. 当 $\hbar\to 0$时, 该代数将退化为通常的

(non-deformed)经典 W_N 代数. 同时得到了 ħ-deformed Miura 变换, 该变换当 $\hbar\to 0$ 时, 退化为通常 W_N 代数的 Miura 变换. 我们发现 ħ-deformed Miura 变换(1)式是一个差分形式的变换形式, 这与 q-deformed Miura 变换[6,7]具有相似的结构. 同时, 本文也构造了经典 ħ-deformed W_N 代数的玻色化. 我们将利用经典 ħ-deformed W_N 代数的玻色化, 构造量子 ħ-deformed W_N 代数.

最近, Frenkel 等将经典 q-deformed M_N 代数与 q-deformed Drinfeld-Sokolov 约化相联系. 因此这里得到的经典 ħ-deformed W_N 代数也将与 Drinfeld-Sokolov 约化的另一种畸变形式 —— ħ-deformed Drinfeld-Sokolov 约化相联系, 这方面的工作在进行之中.

[1] A. B. Zamolodchikov, *Theor. Math. Phys.*, **63**(1985), 1205.

[2] F. A. Smirnov, *Int. Jour. Mod. Phys.*, **A7**(1992), Suppl., 813; 839.

[3] V. G. Drinfeld, *Soviet. Math. Dokl.*, **32**(1988), 212.

[4] K. Iohara, M. Konno, *Lett. Math. Phys.*, **37**(1996), 319.

[5] B. Y. Hou, W. L. Yang, *Comm. Theor. Phys.*, **31**(1999), 265.

[6] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Comm. Math. Phys.*, **166**(1994), 27.

[7] V. A. Fatteev, S. L. Lukyanov, *Int. Jour. Mod. Phys.*, **63**(1985), 1205.

[8] E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Comm. Math. Phys.*, **178**(1996), 237.

[9] B. Feigin, E. Frenkel, *Comm. Math. Phys.*, **178**(1996), 653.

[10] X. M. Ding, B. Y. Hou, L. Zhao, *Int. Jour. Mod. Phys.*, **A13**(1998), 1129.

CLASSICAL ħ-DEFORMED W_N ALGEBRA

YANG WEN-LI HOU BO-YU

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069)

(Received 8 December 1998; revised manuscript received 5 March 1999)

ABSTRACT

The classical ħ-deformed W_N algebra and the corresponding ħ-deformed Miura transformation are constructed. The algebra degenerate the classical W_N algebra when $\hbar\to 0$.

PACC: 0220; 0240; 0350; 1100