第 48 卷 第 9 期 1999 年 9 月
1000-3290/1999/48(09)/1581-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 48, No. 9, September, 1999
c 1999 Chin. Phys. Soc.

变系数积分变换与 Landau 体系的非线性-超对称性方法研究

景 辉 时庆云
(郑州大学物理系, 郑州 450052)
(1998 年 10 月 9 日收到)

提出一种推广的变系数积分变换, 将有磁场参与作用这样一类典型而重要的非保守系情形纳入非线性-超对称性方法的框架, 极大地简化了体系本征问题的求解(以 Landau 体系为例).

PACC: 0365

1 引 言

寻求量子体系的能量本征值谱及波函数更简捷的求解方法, 不断地吸引着研究者的兴趣[1]. 近年来, Schrödinger 方程与非线性 Riccati 方程联系的重要性, 引起了研究者的关注[2,3]. 通过研究发现, Riccati 方程是量子力学与超对称量子力学(SUSY QM)相联系的又一桥梁[4]. 这就为量子体系本征谱的求解找到了一条极为简捷的途径. 然而到目前为止, 该方法仅仅适用于具有标准形式 Hamiltonian 的体系, 对于有磁场参与作用这样一种典型而重要的非保守系情形, 尚无法利用此种方法. 本文提出推广的变系数积分变换, 将 Landau 体系(均匀磁场中电子的运动)纳入了这一非线性-超对称性方法的框架, 仅以代数运算而得到形式复杂的能谱公式及递推形式的本征函数, 从而为该方法拓展到具有非标准 Hamiltonian 的体系迈进了一步.

2 非线性 Riccati 方程与 SUSY QM 方法

一维定态 Schrödinger 方程为

$$(-\partial_x^2+V(x))\phi(x)=E\phi(x)\qquad(2m=\hbar=1).\tag{1}$$

这是一个线性齐次二阶微分方程, 它与非线性 Riccati 方程的等价性早在量子力学出现之前就由瑞士数学家 Euler 所指出[3]. 令

$$\phi(x)=N\exp\left[-\int^x W(t)\mathrm{d}t\right],\tag{2}$$

得到与(1)式等价的方程

$$W^2(x)-W'(x)=V(x)-E.\tag{3}$$

这就是 Riccati 方程. 该方程在许多物理领域都有着重要应用[3].

按因子化方法, 可以得到另一种形式的非线性 Riccati 方程. 令

$$b^{+}=-\partial_x+W(x), \qquad b=\partial_x+W(x), \tag{4}$$

则 Hamiltonian 可以写成因子乘积形式[2]

$$H=-\partial_x^2+V(x)=b^{+}b+E_0, \tag{5}$$

这里 E_0 为基态能. 利用基态条件 $b\phi_0=0$, 得

$$\phi_0=N\exp\left[-\int^x W(t)\mathrm{d}t\right],$$

$$W^2(x)-W'(x)=V(x)-E_0 \tag{6}$$

称为基态情形的 Riccati 方程. (这一区别未见在以前文献中指出.)

按超对称量子力学方法[5], 有下述关系:

$$\phi_0=N\exp\left[-\int^x W(t,a_0)\mathrm{d}t\right],$$

$$\phi_n(x,a_0)=(-\partial_x+W(x,a_0))\phi_{n-1}(x,a_1) \qquad (n=1,2,3\cdots). \tag{7}$$

可见, W 函数正是 SUSY QM 中的超势[4], Riccati 方程可以看成是超势满足的方程. 注意(7)式中的 a 为形状不变性参数, 由所谓的形状不变性条件确定,

$$V_+(x,a_0)=V_-(x,a_1)+R(a_1), \tag{8}$$

这里 $V_\pm(x,a)$ 称为超对称配对势,

$$V_\pm(x,a_0)=W^2(x,a_0)\pm W'(x,a_0). \tag{9}$$

显然(8)式的一个等价形式为

$$W^2(x,a_0)+W'(x,a_0)=W^2(x,a_1)-W'(x,a_1)+R(a_1). \tag{10}$$

因此, 只要解出形式简单的 Riccati 方程(即得到 W 函数), 就可以确定 $V_\pm(x)$ 与 $V(x)$ 的关系, 从而利用 Hamiltonian $H_-=-\partial_x^2+V_-(x)$ 的本征值

$$E_0^{(-)}=0,$$

$$E_n^{(-)}=\sum_{k=1}^{n}R(a_k). \tag{11}$$

可以得到与 Hamiltonian $H=\partial_x^2+V(x)$ 对应的体系本征谱 E_n. 当然, 利用(7)式还将可以得到递推形式的波函数.

我们看到, 这种方法的优越性在于: 不必涉及特殊函数, 仅以代数运算即可方便地求解体系的本征问题. 然而, 该法依赖于 Hamiltonian 可以写成标准形式, 即 $H(x)=\partial_x^2+V(x)$, 这就限制了其应用价值. 下面将证明, 通过推广的一般变系数积分变换, 是可以突破这一前提条件的限制.

3 变系数积分变换与 Landau 体系

量子力学中有一类典型而重要的非保守系情形, 即有磁场参与作用的体系. 这时, 方程中的普通导数要化为协变导数, 即: $\partial_x\rightarrow(\partial_x-\mathrm{i}eA)$, 相应 Hamiltonian 为

$$H=(-\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2-\mu\cdot\boldsymbol{B}, \tag{12}$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 为磁场矢势, 场 $\boldsymbol{B}$ 取沿 Z 轴方向, μ 为自旋磁矩, 满足关系: $\mu/s=-2e$(s 为自

旋).

具有非标准 Hamiltonian (12) 式的体系, 一般量子力学是不好处理的, 前述的非线性-超对称性方法亦无法直接运用.

考虑到这时的 Schrödinger 方程为一般的二阶微分方程, 我们写出

$$\partial_x^2 F(x) + \partial_x F(x) + b(x) F(x) = 0. \tag{13}$$

令

$$F(x) = N(x) \exp\left[\int^x - W(t)\,\mathrm{d}t\right], \tag{14}$$

其中 $N(x) \neq 0$, 代入方程(13), 得

$$\begin{aligned} &W^2(x) - W'(x) + [2N'(x) + N(x)a(x)]\,W(x)/N(x) \\ &\quad + [N''(x) + a(x)N'(x) + b(x)N(x)]/N(x) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

令

$$2N'(x) + N(x)a(x) = 0$$

或

$$N(x) = C \exp\left[\int^x - [a(t)/2]\,\mathrm{d}t\right], \tag{16}$$

代入(15) 式, 即得

$$\begin{aligned} &W^2(x) - W'(x) = f(x), \\ &f(x) = \frac{1}{2}a'(x) + \frac{1}{4}a^2(x) - b(x). \end{aligned} \tag{17}$$

这就是与方程(13) 完全等价的一阶非线性 Riccati 方程. (14) 式称为“变系数积分变换”.

作为实例, 我们来研究如何利用这种方法将 Landau 体系纳入非线性-超对称性的框架中, 简捷地获得其本征解.

Landau 体系, 即电子在均匀磁场中的运动, 是一个在理论与实践中有着重要价值的量子体系, 近年来, 对其不同的求解方法及新的应用研究吸引了研究者很大的兴趣[6, 7].

对 Landau 体系的研究, 可以取不同的规范, 我们取对称规范, 即 $A = (-y, x, 0)B/2$, Hamiltonian 为

$$H = \boldsymbol{p}^2 + \omega_{\mathrm{L}} L z + \omega_{\mathrm{L}}^2 (x^2 + y^2)/4 + 2\sigma\omega_{\mathrm{L}}, \tag{18}$$

这里 ω_{L} 为 Lamor 频率($\omega_{\mathrm{L}} = eB$), σ 为自旋 Z 分量本征值(该分量为守恒量).

可见, 正是(18) 式中包含的角动量项 L_z (其中含速度算符), 导致 Hamiltonian 无法写成标准形式.

按常规处理, 首先令

$$\phi(r, \varphi, z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_z z}R(r) \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; p_z \in (-\infty, +\infty)), \tag{19}$$

从而将 Schrödinger 方程化为关于 $R(r)$ 的形式

$$\partial_r^2 R(r) + \frac{1}{r}\partial_r R(r) + \left[\beta - \alpha^2 r^2 - 2\alpha m - \frac{m^2}{r^2} - 4\sigma\alpha\right] R(r) = 0, \tag{20}$$

式中 $\alpha = \omega_{\mathrm{L}}/2$, $\beta = E - p_z^2$. $a(r) = 1/r$, $b(r) = \beta - \alpha^2 - 2\alpha m - 4\sigma\alpha - m^2/r^2$, 从而不难得到

$$N(r) = C/\sqrt{r},$$

$$
\begin{aligned}
f(r) &= V(r) - \varepsilon_0, \\
V(r) &= \alpha^2 r^2 + (m^2 - 1/4)\frac{1}{r^2}, \\
\varepsilon_0 &= -2\alpha m + \beta - 4\sigma\alpha.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

我们将 $V(r)$, ε_0 分别称为 Riccati 型等效势与基态能, 只要给出它们就可以得到磁场中电子运动的 Riccati 方程.

观察 Riccati 方程及 $V(r)$ 的特点, 可以设

$$
W(r) = A_1 r + A_2 \frac{1}{r},
\tag{22}
$$

容易验证

$$
\begin{aligned}
A_1^2 &= \alpha^2, \\
A_2^2 + A_2 &= m^2 - 1/4, \\
\varepsilon_0 &= 2A_1 A_2 - A_1.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

波函数的有界性要求 $A_1 < 0$, $A_2 < 0$, 故

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\alpha, \\
A_2 &= -(|m| + 1/2), \\
\varepsilon_0 &= 2(|m| + 1)\alpha.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

因此基态解为

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \beta + p_z^2 = \varepsilon_0 + 2m\alpha + p_z^2 + 4\alpha\sigma \\
&= (m + |m| + 1)\omega_{\mathrm{L}} + p_z^2 + 2\sigma\omega_{\mathrm{L}}, \\
R(r)_0(r) &= N(r) r^{|m| + 1/2} \mathrm{e}^{(-\alpha r^2/2)}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

根据上述讨论, Landau 体系的超势为

$$
W(r) = \alpha r - \frac{1}{2}(|m| + 1/2).
\tag{26}
$$

超对称配对势为

$$
\begin{aligned}
V_+ &= \omega_{\mathrm{L}}^2 r^2 - |m|\ \omega_{\mathrm{L}} + \frac{(|m| + 1/2)(|m| + 3/2)}{r^2}, \\
V_- &= \omega_{\mathrm{L}}^2 r^2/4 - (|m| + 1)\omega_{\mathrm{L}} + \frac{(|m| + 1/2)(|m| - 1/2)}{r^2}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

令 $a_0 = |m|$, 有如下形状不变性关系:

$$
V_+(r, a_0) = V_-(r, a_1) + R(a_1),
\tag{28}
$$

式中

$$
a_1 = |m| + 1, \quad R(a_1) = 2\omega_{\mathrm{L}} = 2\omega_{\mathrm{L}}(a_1 - a_0).
$$

Hamiltonian $H_- = -\partial_r^2 + V_-(r)$ 的本征值为

$$
\begin{aligned}
E_0^{(-)} &= 0, \\
E_n^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n} R(a_k) = 2\omega_{\mathrm{L}} \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = 2n\omega_{\mathrm{L}}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

由(21), (27)式容易看出, $V(r)$与 $V_-(r)$的关系为

$$V(r) = V_-(r) + a_1\omega_L. \tag{30}$$

因此 Riccati 型等效能级为

$$\varepsilon_n = E_n^{(-)} + \omega_L(|m| + 1) = \omega_L(2n + |m| + 1). \tag{31}$$

最后, 可得 Landau 能级

$$\begin{aligned} E_n &= \varepsilon_n + m\omega_L + p_z^2 + 2\sigma\omega_L \\ &= \left[2\left(n + \frac{|m| + m}{2} + \sigma\right) + 1\right]\omega_L + p_z^2 \\ &= [2(n_1 + n_2) + 1]\omega_L + p_z^2, \end{aligned} \tag{32}$$

式中

$$n_1 = n + \frac{|m| + m}{2}, \quad n_2 = \sigma.$$

最末一步的意义, 将在后面加以讨论. 注意(32)式与通常的解拉盖尔方程得到的结果完全一致[8]. 特别是, 我们发现波函数可以写成如下的递推形式:

$$\phi_n(x, a_0) = (-\partial_x + W(x, a_0))\phi_{n-1}(x, a_1). \tag{33}$$

这一形式清楚地显示了体系超对称性.

值得注意的是, (32)式尽管具有各向同性谐振子能谱的形式(甚至波函数也如此), 但两体系并不完全等价, 例如其对称群就是不同的(Landau 体系为 $Osc(1)$群).

4 讨　论

通过以上分析, 我们看到, SUSY QM 中的超势(或 W 函数)是一个重要的概念, 引入超势的方式(即(14)式)也是颇具启发意义的.

正如文献[3]所指出, 通常的量子力学文献中大都忽视了与 Schrödinger 方程完全等价的非线性 Riccati 方程, 从而未能认识到它在理论上的重要意义以及在应用上的重要价值. 特别是通过推广的变系数积分变换, 获得了电子在磁场中运动的非线性方程, 同时又将超对称性自然地包含了(事实上, Landau 体系的(32)式结果, 很清楚地显示了 Boson 与 Fermion 间的超对称性 ——如果把自旋看成为一种 Fermion). 可以说, 引入超势和Riccati 方程, 对量子体系的考察带来了更为深刻的观点.

这样的思路还可能以不同的方式给予量子系统新的特点. 我们注意到, 通过一个特殊的泛函变换, 将超对称场论中的预势(prepotential)引入到量子力学中, 从而得到了与 Schrödinger 方程等价的非线性预势方程, 并以自然的方式赋予量子空间以统计性[9]. 另外, (14)式的更一般的推广为指数泛函变换(包含与积分变换相反的所谓微分变换), 因此可以得到各种等价于 Schrödinger 方程的形式复杂的非线性方程(对相对论性的 Clein-Gordon 方程, 相应的则是非线性方程组). 因此这也为研究非线性方程提供了新的手段, 有关工作亦已完成. 至于该方法在其他量子系统中的应用, 则有待作进一步的研究.

作者之一(景辉)感谢时万钟副教授和李玉晓博士的多次有益讨论.

[1] B. W. Williams, D. P. Poulios, *Eur. J. Phys.*, **14**(1993), 222.
[2] 朱栋培、石名俊、陈银华, 物理学报, **41**(1992), 535 [Zhu Dong-pei *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **41**(1992), 535 (in Chinese)].
[3] S. B. Haley, *Am. J. Phys.*, **65**(1997), 237.
[4] 贾春生、蒋效卫、王孝国、杨秋波, 物理学报, **46**(1997), 12 [Jia Chun-sheng *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 12 (in Chinese)].
[5] F. Cooper *et al.*, *Phys. Rep.*, **251**(1995), 267.
[6] V. M. Tkachuk, S. I. Vakachuk, *Phys. Lett.*, **A228**(1997), 141.
[7] 田 强、马本堃、朱轶男, 物理学报, **46**(1997), 762 [Tian Qiang *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **46**(1997), 762 (in Chinese)].
[8] 时庆云, 量子力学(北京理工大学出版社, 北京, 1993), 第 156 页 [Shi Qing-yun, Quantum Mechanics (Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 1993), p. 156(in Chinese)].
[9] A. E. Faraggi, M. Matone, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 163.

INTEGRAL TRANSFORMATION WITH CHANGEABLE COEFFICIENT AND LANDAU SYSTEMS IN THE FRAMEWORK OF NONLINEAR-SUPERSYMMETRY METHOD

JING HUI SHI QING-YUN
(*Department of Physics, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450052)
(Received 9 October 1998)

ABSTRACT

We present a generalized integral transformation with changeable coefficient, and show that the case of electromagnetic field interaction could be settled by nonlinear-suppersymmetry method. As an example, Landau systems are analyzed.

PACC: 0365