第 48 卷 第 9 期 1999 年 9 月
1000-3290/1999/48(09)/1601-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 48, No. 9, September, 1999
c 1999 Chin. Phys. Soc.

含时谐振子的演化算符和波函数*

徐秀玮 柳盛典 任廷琦
(烟台师范学院物理系, 烟台 264025)
张永德
(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230027)
(1998 年 12 月 15 日收到; 1999 年 3 月 1 日收到修改稿)

由广义线性量子变换理论, 得到了含时谐振子正规乘积形式的演化算符和波函数的严格表达式.

PACC: 0413; 0411

在最近的一些重要实验中, 例如冷原子实验[1,2]、粒子在 Paul 阱中的运动[3,4]、在法布里-珀罗腔中的量子化电磁场等[5], 由于这些系统的哈密顿量与量子谐振子相同, 所以量子谐振子再度成为人们感兴趣的问题. 对于含时量子谐振子, 文献[6]用近似方法研究了在 Paul 阱中的粒子, 文献[7—11]分别用李代数方法、含时幺正变换和 LR 不变量理论求解含时量子谐振子. 本文在广义线性量子变换理论基础上, 给出一种解含时量子谐振子的方法.

广义线性量子变换理论是由张永德等[12—14]提出的, 它包括了以往众多著名的变换(如玻戈留波夫变换、多模空间转动、CPT 分立对称变换、规范场的规范变换等). 该理论普遍适用于基本算子对易子为常数(如$[\hat{x}, \hat{p}]=\mathrm{i}$, 本文取 $\hbar=1$)的量子系统.

对于质量和频率均含时的量子谐振子, 其哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2. \tag{1}$$

系统的演化算子是指数二次型的. 根据广义线性量子变换理论, 将演化算子取成如下正规乘积形式:

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{c}}:\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2c}\left[d\hat{p}^2 + 2(c-1)\hat{x}\hat{p} + b\hat{x}^2\right]\right\}:, \tag{2}$$

且 $ac+bd=1$, 这里 a, b, c, d 均为含时实参量, 符号$:\cdots:$表示正规乘积, 如$:\hat{p}\hat{x}^2+\hat{x}^2\hat{p}:=\hat{p}\hat{x}^2+\hat{p}\hat{x}^2$. 可以给出 $\hat{U}$满足的变换关系式

$$\hat{U}\left(\frac{\hat{p}}{\mathrm{i}}, \hat{x}\right)\hat{U}^{+} = \left(\frac{\hat{p}}{\mathrm{i}}, \hat{x}\right)\begin{pmatrix} a, \mathrm{i}d \\ \mathrm{i}b, c \end{pmatrix}. \tag{3}$$

将系统的波矢$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$, 代入薛定谔方程得出

* 国家自然科学基金(批准号: 19575044)和山东省自然科学基金(批准号: Y95A0202)资助的课题.

$$\mathrm{i}\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}\hat{U}^{+} = \hat{H}, \quad \hat{U}(0) = \hat{I}. \tag{4}$$

将(1),(2)式代入(4)式,并利用(3)式化简后可得到确定含时实参量 a, b, c, d 的二阶常微分方程,

$$\begin{aligned}
&\ddot{a} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{a} + \omega^2 a = 0; \quad a(0) = 1, \quad \dot{a}(0) = 0,\\
&\ddot{d} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{d} + \omega^2 d = 0; \quad d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = -\frac{1}{m(0)},\\
&\ddot{b} - \left(\frac{\dot{m}}{m} + 2\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)\dot{b} + \omega^2 b = 0; \quad b(0) = 0, \quad \dot{b}(0) = -m(0)\,\omega^2(0),\\
&\ddot{c} - \left(\frac{\dot{m}}{m} + 2\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)\dot{c} + \omega^2 c = 0; \quad c(0) = 1, \quad \dot{c}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

对于给定的含时量子谐振子通过求解上述方程,即可将演化算子定出.显然方程(5)能够给出严格显示形式解析解的情况较少,但一般而言,总可得到严格的数值解.

利用(2)式和坐标表象及动量表象的完备性关系,可得到系统的波函数为

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \langle x \mid \hat{U}(t) \mid \psi(0)\rangle\\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \langle x \mid p\rangle \mathrm{d}p \langle p \mid \hat{U} \mid \zeta\rangle \mathrm{d}\zeta \langle \zeta \mid \psi(0)\rangle\\
&= \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{2\pi d}}\exp\left(\frac{cx^2}{2\mathrm{i}d}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{a}{2\mathrm{i}d}\zeta^2 - \frac{1}{\mathrm{i}d}x\zeta\right)\psi(\zeta, 0)\,\mathrm{d}\zeta,
\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\psi(\zeta, 0) = \langle \zeta \mid \psi(0)\rangle$ 是系统的初始波函数,若系统初始处于相干态,即

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\delta\sqrt{2\pi}}}\exp\left(\mathrm{i}p_0 x - \frac{(x - x_0)^2}{4\delta^2}\right), \tag{7}$$

则

$$\psi(x, t) = \beta\exp\left(\mathrm{i}p'_0 x - \frac{(x - x'_0)^2}{4\delta'^2}\right), \tag{8}$$

其中

$$p'_0 = \frac{p_0}{a - \frac{\mathrm{i}d}{2\delta^2}},$$

$$x'_0 = \frac{x_0}{c - \mathrm{i}2b\delta^2},$$

$$\frac{1}{\delta'^2} = 2\frac{2\mathrm{i}b\delta^2 - c}{\mathrm{i}d - 2a\delta^2},$$

$$\beta = \left[\sqrt{2\pi}\left(a\delta - \frac{\mathrm{i}d}{2\delta}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[\frac{p_0 d\delta^2}{2a\delta^2 - \mathrm{i}d}\left(\mathrm{i}p_0 + \frac{x_0}{\delta^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{bx_0^2}{2b\delta^2 + \mathrm{i}c}\right].$$

若系统初始时处于非含时谐振子的第 n 个本征态,即

$$\psi(x, 0) = \psi_n(\alpha x), \tag{9}$$

则

$$\psi(x,t)=\exp\left[\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)\arg(a+\mathrm{i}d\alpha^2)+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{ab-cd\alpha^4}{a^2+d^2\alpha^4}x^2\right]\psi_n(\alpha'x),\qquad(10)$$

这里

$$\alpha'=\alpha(a^2+d^2\alpha^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

对具体的含时谐振子, 求解方程(5), 定出含时参量 a, b, c, d, 进而最终得到其波函数. 作为特例, 我们考虑质量为常数(取 $m=1$), 频率为

$$\omega(t)=\frac{\omega_0}{1+2\omega_0 t}\qquad(\omega_0>0)\qquad(11)$$

的含时谐振子, 将(11)式代入(5)式, 求解可得

$$a=\sqrt{1+2\omega_0 t}\left[1-\frac{1}{2}\ln(1+2\omega_0 t)\right],$$

$$b=-\frac{\omega_0}{2\sqrt{1+2\omega_0 t}}\ln(1+2\omega_0 t),$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{1+2\omega_0 t}}\left[1+\frac{1}{2}\ln(1+2\omega_0 t)\right],$$

$$d=-\frac{\sqrt{1+2\omega_0 t}}{2\omega_0}\ln(1+2\omega_0 t).$$

该结果与文献[9]是一致的.

本文采用正规乘积形式的演化算子, 克服了以往难以对含时系统的演化算符求时间导数的困难, 方便地将波函数用普通 C 数的积分给出, 特别是对于那些不能得到显示形式解析解的情况, 可以进行严格的数值求解.

[1] C. S. Adams, M. Sigel, J. Mlynek, *Phys. Rep.*, **240**(1994), 143.
[2] P. Berman, Atom Interferometry (Academic Press, New York, 1977), p. 150.
[3] L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 527.
[4] M. Feng, K. Wang, *Phys. Lett.*, **A197**(1995), 135.
[5] R. K. Colegrave, M. S. Abdalla, *Opt. Act.*, **28**(1981), 495.
[6] R. J. Glauber, Recent Developments in Quantum Optics (Vol. 1), ed. R. Inguva (Plenum Press, New York, 1993).
[7] C. F. Lo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **231**(1990), 1155; *Nuovo Cimento*, **105B**(1990), 497; *Phys. Rev.*, **A43**(1991), 404.
[8] A. N. Seleznyova, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 950.
[9] J. B. Xu, Y. H. Yu, *Commun. Theor. Phys.*, **29**(1998), 385.
[10] 党兰芬, 物理学报, **47**(1998) 1071 [Dang Lan-fen, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 1071(in Chinese)].
[11] 刘登云, 物理学报, **47**(1998), 1234 [Liu Deng-yun, *Acta Physica Sinica*, **47**(1998), 1234(in Chinese)].
[12] Y. D. Zhang, Z. Tang, *Nuovo Cimento*, **109B** (1994), 387.
[13] S. X. Yu, Y. D. Zhang, *Commun. Theor. Phys.*, **24**(1995), 185.
[14] X. W. Xu, Y. D. Zhang, *Chin. Phys. Lett.*, **14**(1997), 812.

EVOLUTION OPERATOR AND WAVE FUNCTION OF A TIME-DEPENDENT OSCILLATOR*

XU XIU-WEI LIU SHENG-DIAN REN TING-QI
(Department of Physics, Yantai Teacher's University, Yantai 264025)
ZHANG YONG-DE
(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

(Received 15 December 1998; revised manuscript received 1 March 1999)

ABSTRACT

From the generalized linear quantum transformation theory, we obtain the normal product form of evolution operator and the wave function for a time-dependent oscillator.

PACC: 0413; 0411

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19575044) and by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y95A0202).