

时空混沌系统的主动-间隙耦合同步

王金兰 陈光旨

(广西大学物理系, 南宁 530004)

(1998 年 12 月 4 日收到; 1999 年 1 月 10 日收到修改稿)

提出了离散系统中的主动-间隙耦合同步方法. 该方法由同步相和自治相组成. 在同步相, 同步方案使得混沌系统趋于同步, 而在自治相, 两系统间的误差将迅速放大, 导致失同步. 但只要同步相足够大, 最终可实现系统的准确同步. 还从理论上讨论了同步条件, 并利用该方法实现了耦合映象格子时空混沌系统中的混沌同步, 给出了同步条件以及同步相与耦合强度的关系.

PACC: 0545

1 引 言

自 1990 年 Pecora 和 Carroll^[1] 开创性地提出驱动-响应同步方案(简称 PC), 并首先在电子线路中得到实现^[2] 以来, 混沌同步及其应用, 特别是其在通讯中的潜在应用, 已引起了科学工作者的极大兴趣, 在理论和实验上都已做了大量的工作.

从众多的同步方法中不难发现, 系统要达到同步, 它们之间必须存在耦合作用驱使它们朝相同的目标发展, 最终具有相同的系统动力学行为. 对于耦合形式, 一般是采取连续作用的形式, 这在理论上是无可厚非的, 但在实际中要得到连续作用并非易事, 而且有时也并非必要. 为此, 文献[3, 4] 中分别提出了不连续作用形式下的混沌同步方法, 它们的特点是驱动信号只在某些时刻(段)才作用于响应系统, 使响应系统中的某些状态变量被置为驱动系统中驱动变量的值, 其它时间响应系统为自治系统.

本文在文献[4] 的基础上, 提出了映象中的主动-间隙耦合同步方法, 并将其用于耦合映象格子系统, 实现了时空混沌系统的混沌同步.

2 映象中的主动-间隙耦合同步方法

该方法由同步相和自治相共同组成. 在同步相, 采用主动-被动分拆同步法^[5] 使响应系统向驱动系统靠拢; 在自治相, 响应系统不受驱动变量的约束而成为自治系统, 按自身的动力学系统演化. 因此, 两系统间的误差在同步相减小, 而在自治相又迅速放大, 导致失同步. 但不难想象, 只要同步相足够大, 使得对应变量的误差在自治相的总发散量小于同步相的总收敛量, 那么两系统总可以达到同步. 因为误差函数虽然不是所有时间上的收敛函数, 但如果将满足条件的某一同步相和自治相之和作为一个时间单元, 则在我们定义的时间单元上, 它是始终收敛的. 经过若干个这样的时间单元后, 误差将趋于零, 从而实现

同步.

为简单起见,我们以一维映象为例来阐述主动-间隙耦合方法的基本原理.

设驱动系统为

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad (1)$$

其中 $f(\cdot)$ 为非线性映象, μ 为系统参数, 选择适当的 μ 值使系统处于混沌态. 从系统(1)式 中选取

$$o_n = h(x_n), \quad (2)$$

作为驱动变量. 考虑间隙耦合, 在同步相, 响应系统受驱动变量的作用, 其动力学方程为

$$y_{n+1} = f(o_n, y_n, \mu). \quad (3)$$

在自治相, 响应系统为自治系统, 其动力学方程的形式与(1)式完全一致,

$$y_{n+1} = f(y_n, \mu). \quad (4)$$

设同步相为 T_s , 自治相为 T_a , 显然 $T_s, T_a > 0$. 为简化讨论, 假设所有的同步相均相等(这意味着所有的自治相也相等). 不失一般性, 假设时间单元是以同步相、自治相、同步相...的顺序交替排列、紧密相连, 则第 i 个同步相的时间满足

$$(i-1)(T_s + T_a) \leq t < iT_s + (i-1)T_a, \quad (5)$$

此时驱动变量起作用, 响应系统为(3)式, 它与(1)式中对应变量的差 Δe_i^s 可表示为

$$\Delta e_{i+1}^s = y_{i+1}^s - x_{i+1}^s = g(o_i, y_i, \mu) - f(x_i, \mu). \quad (6)$$

第 i 个自治相的时间为

$$iT_s + (i-1)T_a \leq t < i(T_s + T_a), \quad (7)$$

此时响应系统为(4)式, 它与(1)式的差值系统为

$$\Delta e_{i+1}^a = y_{i+1}^a - x_{i+1}^a = f(y_i, \mu) - f(x_i, \mu). \quad (8)$$

由于差值的变化是连续的, 因此第 i 个同步相的初值即为第 $i-1$ 个自治相的终值, 第 i 个同步相的终值则为第 i 个自治相的初值. 设(6), (8)两式的本征值分别为 λ_s, λ_a , 则有

$$\Delta e_i^s = (\lambda_s)^t \Delta e_{i-1}^s, \quad (i-1)(T_s + T_a) \leq t < iT_s + (i-1)T_a; \quad (9)$$

$$\Delta e_i^a = (\lambda_a)^t \Delta e_i^s, \quad iT_s + (i-1)T_a \leq t < i(T_s + T_a). \quad (10)$$

因此, 响应系统与驱动系统对应变量的最终演变方程为

$$\Delta e_i = (\lambda_s)^{T_s} \cdot (\lambda_a)^{T_a} \cdot \Delta e_{i-1}. \quad (11)$$

显然, 要获得准确同步, 必须满足

$$\left| \frac{\Delta e_i}{\Delta e_{i-1}} \right| = |(\lambda_s)^{T_s} \cdot (\lambda_a)^{T_a}| < 1. \quad (12)$$

由上面的讨论不难看出, 由于混沌系统的轨迹是以指数速率发散, 因此要能实现间隙耦合同步, 往往要求在同步相采用的方法能实现系统的快速同步(以指数速度收敛). 这一条件似乎很严格, 但数值实验表明只要采用的方法在同步相的收敛效果足以抵消或抑制自治相的发散效果, 就可实现响应系统和驱动系统的间隙耦合同步, 因此该方法的适用范围较广(诸如 PC 方法、主动-被动分拆法、负反馈法等均可).

3 单向耦合映象格子系统^[6]的时空混沌同步

考虑周期边界条件 $L=3$ 的单向均匀耦合映象格子, 其系统动力学方程为

$$\begin{aligned}x_{n+1}(1) &= g(x_n(2)) + (1-\varepsilon)f(x_n(1)), \\x_{n+1}(2) &= g(x_n(3)) + (1-\varepsilon)f(x_n(2)), \\x_{n+1}(3) &= g(x_n(1)) + (1-\varepsilon)f(x_n(3)),\end{aligned}\quad (13)$$

这里, $f(x_n)$ 代表非线性映象, x_n 是状态变量, $i=1, 2, \dots, L$ 是格点坐标, n 为时间坐标, ε 为格点间的耦合强度. 把它作为驱动系统, 驱动变量选为

$$G = g(x_n(2)). \quad (14)$$

根据主动-间隙耦合同步原理, 在同步相, 我们采用主动-被动分拆同步方法来实现同步, 此时, 响应系统的动力学方程为

$$\begin{aligned}y_{n+1}(1) &= G + (1-\varepsilon)f(y_n(1)), \\y_{n+1}(2) &= g(y_n(3)) + (1-\varepsilon)f(y_n(2)), \\y_{n+1}(3) &= g(y_n(1)) + (1-\varepsilon)f(y_n(3)).\end{aligned}\quad (15)$$

在自治相, 驱动变量不再起作用, 响应系统变为自治系统, 其动力学方程为

$$\begin{aligned}y_{n+1}(1) &= g(y_n(2)) + (1-\varepsilon)f(y_n(1)), \\y_{n+1}(2) &= g(y_n(3)) + (1-\varepsilon)f(y_n(2)), \\y_{n+1}(3) &= g(y_n(1)) + (1-\varepsilon)f(y_n(3)).\end{aligned}\quad (16)$$

我们以 tent 映象

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2ax_n, & 0 < x_n \leq 0.5, \\ 2a(1-x_n), & 0.5 < x_n < 1 \end{cases} \quad (17)$$

作为非线性映象进行理论分析和数值实验. 由 tent 映象的分岔图知, 在 $a \in (0.715, 1)$ 范围内, 映象处于完全混沌态. 因此 a 的取值范围为 $(0.715, 1)$, 在本文的理论分析及数值实验中均取 $a=0.785$.

在同步相, 由文献[7]知, (13)式与(15)式对应变量的差分方程的本征值为 $\lambda_i^s = 2a(1-\varepsilon)$, 耦合强度的收敛范围为 $\varepsilon > 1 - \frac{1}{2a}[a \in (0.715, 1)]$. 在自治相, 当 $x_n, y_n \in (0, 0.5)$ 时, (13)式与(16)式的差值系统为

$$\begin{aligned}\Delta e_{n+1}(1) &= 2a\varepsilon\Delta e_n(2) + 2a(1-\varepsilon)\Delta e_n(1), \\ \Delta e_{n+1}(2) &= 2a\varepsilon\Delta e_n(3) + 2a(1-\varepsilon)\Delta e_n(2), \\ \Delta e_{n+1}(3) &= 2a\varepsilon\Delta e_n(1) + 2a(1-\varepsilon)\Delta e_n(3),\end{aligned}\quad (18)$$

即

$$\begin{pmatrix} \Delta e_{n+1}(1) \\ \Delta e_{n+1}(2) \\ \Delta e_{n+1}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(1-\varepsilon) & 2a\varepsilon & 0 \\ 0 & 2a(1-\varepsilon) & 2a\varepsilon \\ 2a\varepsilon & 0 & 2a(1-\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e_n(1) \\ \Delta e_n(2) \\ \Delta e_n(3) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

设(19)式的本征值为 λ^a , 则

$$\begin{vmatrix} 2a(1-\varepsilon) - \lambda^a & 2a\varepsilon & 0 \\ 0 & 2a(1-\varepsilon) - \lambda^a & 2a\varepsilon \\ 2a\varepsilon & 0 & 2a(1-\varepsilon) - \lambda^a \end{vmatrix} \\ = [2a(1-\varepsilon) - \lambda^a]^2 \left[2a \frac{\varepsilon^3 + (1-\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^2} - \lambda^a \right] = 0.$$

所以,

$$\begin{aligned} \lambda_1^a &= 2a(1-\varepsilon), \\ \lambda_2^a &= 2a(1-\varepsilon), \\ \lambda_3^a &= 2a \frac{\varepsilon^3 + (1-\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

而由(20)式不难看出 $a \in (0.715, 1)$ 条件下, $|\lambda_3^a| > 1$, (18)式中的差值在 λ_3^a 方向上迅速发散, 导致两系统在自治相失去同步.

设同步相和自治相的时间分别为 T_s, T_a , 在满足同步相中耦合强度同步条件的前提下, 根据第二节的讨论, 要实现主动-间隙耦合同步, 同步相和自治相还需满足(12)式, 即

$$\left| [2a(1-\varepsilon)]^{T_s} \cdot \left[2a \frac{\varepsilon^3 + (1-\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^2} \right]^{T_a} \right| < 1, \quad (21)$$

而 $T_s + T_a = 1$ (同步相与自治相构成时间单元). 将其代入(21)式可得

$$\left| [2a(1-\varepsilon)]^{T_s} \cdot \left[2a \frac{\varepsilon^3 + (1-\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^2} \right]^{1-T_s} \right| < 2a(1-\varepsilon)^{3T_s-2} \cdot [\varepsilon^3 + (1-\varepsilon)^3]^{1-T_s} < 1. \quad (22)$$

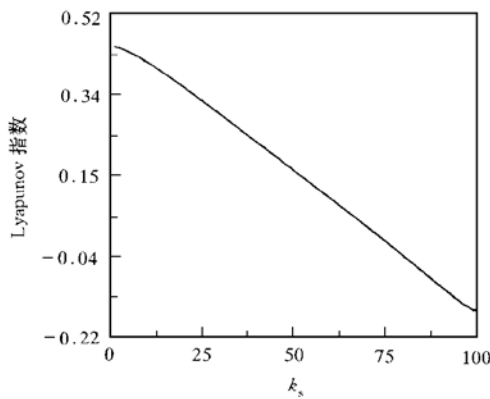


图1 最大条件 Lyapunov 指数随同步相的叠代次数 k_s 的变化关系

在 $a = 0.785$ 耦合强度 $\varepsilon = 0.5$ 条件下, 把计算机叠代 100 次作为一个时间单元, 即 $k_s + k_a = 100$, k_s 为同步相的叠代次数, $k_s = 1, 2, \dots, 100$ 进行数值模拟实验发现, 当 $k_s \geq 75$, 驱动系统与响应系统可达到准确同步. 图 1 给出了 $a = 0.785$, $\varepsilon = 0.5$, $k_s + k_a = 100$ (k_s 为同步相的叠代次数, $k_s = 1, 2, \dots, 100$) 条件下, 响应系统的最大 Lyapunov 指数随同步相的叠代次数 k_s 的变化关系, 其中横坐标为 k_s , 纵坐标为最大条件 Lyapunov 指数, 最大 Lyapunov 指数为零处对应着同步相的临界值.

由图 1 可看出, 临界值为 $k_s = 75$ (此时对应的 $T_s = 0.75$, $T_a = 0.25$). 将 $T_s = 0.75$, $\varepsilon = 0.5$, $a = 0.785$ 代入(22)式, 不等式的左端

$$2a(1-\varepsilon)^{3T_s-2} \cdot [\varepsilon^3 + (1-\varepsilon)^3]^{1-T_s} = 0.933,$$

满足同步条件(12)式. 图 2(a) 绘出了同步相 $k_s = 75$ 时两系统的对应变量的均方差

$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2}$ ($e_i = y(i) - x(i)$, $i = 1, 2, 3$) 的时间序列, 其中横坐标 n 为叠代次数, 是同步相和自治相的叠代次数之和. 显然, 两系统很快达到了准确同步. 当同步相小于临界值(即 $k_s < 75$) 时, 两系统无法达到同步, 但是, 出现了近似同步与混沌交替相间的模式, 如图 2(b) 所示, 在同步相两系统变量的误差衰减至很小, 但在自治相又迅速放大(图中为 $k_s = 74$ 时, 差 e_2 随时间的演化情况).

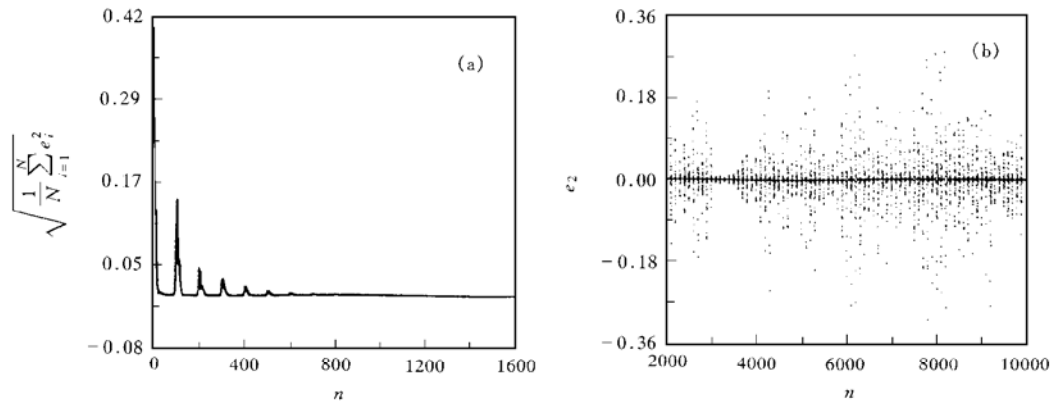


图 2 同步情况($\varepsilon = 0.5$) (a) 为准确同步 $k_s = 75$; (b) 为失同步 $k_s = 74$

数值实验进一步表明, 当格点间的耦合强度增强时, 同步相 k_s 的临界值将减小. 图 3 给出了临界(最大 Lyapunov 指数为零)情况下, 耦合强度 ε 与同步相 T_s 的关系, 其中横坐标为耦合强度 ε , 纵坐标为 k_s , 由图 3 可知, 它们近似成反比. 这说明在间隙耦合同步中, 如果同步相的同步方法的收敛速率越快, 则同步相受到的限制就越小, 或者说驱动变量作用于响应系统的时间可以很短.

其实该方法不但适用于离散系统, 也适用于连续系统, 由于篇幅有限, 在此不多加叙述.

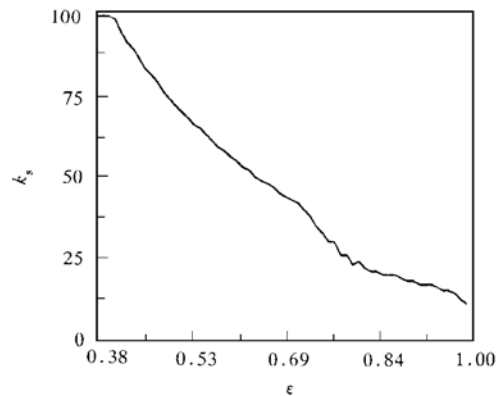


图 3 同步相 k_s 与耦合强度 ε 的关系

4 结 论

我们提出了映象中的主动-间隙耦合同步方法, 给出了同步条件, 并将其用于单向耦合映象格子系统, 实现了时空混沌同步. 主动-间隙同步方法的最大优点是驱动变量不必在所有时间上都作用于响应系统, 就可以实现响应系统与驱动系统的快速、准确同步. 这

不仅可以降低同步的代价,而且可以利用自治相来发送经混沌信号模糊、调制的有用信息.

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] T. L. Carroll, L. M. Pecora, *IEEE Trans. Circ. Syst.*, **38**(1991), 453.
- [3] R. E. Amritkar, Neelima Gupte, *Phys. Rev.*, **E47**(1993), 3889.
- [4] Ömer Morgül, Moez Feki, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 5004.
- [5] L. Kocarev, U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.*, **74**(1995), 5028.
- [6] Gang Hu, Zhilin Qu, Kaifen He, *Int. J. Bif. Chaos*, **5**(1995), 901.
- [7] Wang Jinlan, Chen Guangzhi, Qin Tuanfa, *Phys. Rev.*, **E58**(1998), 3017.

SPATIOTEMPORAL CHAOS SYNCHRONIZATION BY ACTIVE-OCCASIONAL COUPLING

WANG JIN-LAN CHEN GUANG-ZHI

(*Department of Physics, Guangxi University, Nanning 530004*)

(Received 4 December 1998; revised manuscript received 10 January 1999)

ABSTRACT

This paper proposes the occasional coupling synchronization scheme of the active-passive decomposition (active-occasional coupling). This scheme consists of synchronization and autonomous phases. In the former, the synchronization scheme is used to synchronize the drive and the response systems; in the latter, small errors will lead to the two systems separated from each other and desynchronization. But if the synchronization phases are large enough, the full synchronization will be obtained. The synchronization condition is discussed theoretically. The spatiotemporal chaos in coupled map lattice system is achieved and the synchronization condition is given. Moreover, the relation between the synchronization phases and the coupling strength is investigated numerically.

PACC: 0545