

一两维平面映射系统奇怪动力学行为*

何岱海 徐健学 陈永红

(西安交通大学非线性动力学研究所, 西安 710049)

(1998 年 11 月 12 日收到; 1999 年 3 月 5 日收到修改稿)

通过对一平面二维映射系统非线性动力学行为的分析, 发现该系统状态随参数变化, 经过稳定焦点、极限环(不变环)、倍周期分岔、收缩到低维流形上的混沌吸引子(具有一个正 Lyapunov 指数)、最后到有界区域弥散开来的混沌吸引子(具有两个正 Lyapunov 指数)的过程. 通过对该系统不动点的分析揭示了吸引子的吸引域边界结构, 即不稳定第二类结点与不稳定偶数周期点在吸引域边界上的相间排列.

PACC: 0545

1 引 言

在文献[1]中, Kaplan 和 Yorke 猜想对于奇怪吸引子有 $D_L = D_1$, 其中 $D_L = k + \frac{1}{|\text{LE}_{k+1}|} \sum_{i=1}^k \text{LE}_i$, k 是使得 $\sum_{i=1}^k \text{LE}_i \geq 0$ 的最大正整数, LE_i 代表 Lyapunov 指数, D_1 代表吸引子的信息维.

Young^[2]在 1982 年指出一类光滑两维可逆映射, Lyapunov 指数满足 $\text{LE}_1 > 0 > \text{LE}_2$, $\text{LE}_1 + \text{LE}_2 < 0$, 对于一个遍历不变测度 μ 存在关系 $D_1 = h(\mu) \left[\frac{1}{|\text{LE}_1|} + \frac{1}{|\text{LE}_2|} \right]$, 其中 $h(\mu)$ 为测度熵. 如果进一步把 Kaplan 和 Yorke 的著名猜想再用到这类两维映射中去, 就应该有 $D_1 = 1 + |\text{LE}_1|/|\text{LE}_2|$, 许多数值计算支持了上述猜想和结果.

对于 $n (n > 1)$ 维映射产生 n 个正 Lyapunov 指数的动力学行为, 以上猜想都不适用. 除了对 $n = 1$ 时进行过比较仔细的研究, 刘曾荣^[3]关于 CML 映射的结果与本文结果都说明两维映射可以具有两个正 Lyapunov 指数, 且从得到的吸引子形态来看, (x, y) 在一个有界区域内弥散开来, 这与通常收缩到低维不变流形上的奇怪吸引子不同, 从本质上看可能存在两维 snap back repeller, 从而是 Marotto 意义下的混沌^[4]. 这类具两个正 Lyapunov 指数的混沌动力学行为在文献[5]中已经对两个耦合的 tent 映射进行了研究, 利用这种映射的双曲性可以证明这种弥散集有唯一的混合不变测度.

本文研究发现, 一两维映射系统随参数变化, 从稳定焦点到极限环, 到具有一个正 Lyapunov 指数的混沌, 最后到具两个正 Lyapunov 指数的混沌.

二维映射系统的奇怪吸引子的点集实质上是所有不稳定周期轨道的不稳定流形的闭

* 国家自然科学基金(批准号: 19672046)资助的课题.

包, 如果系统中出现多个吸引子, 则这些吸引子的吸引域边界是由在吸引域边界上的不稳定周期轨道的稳定流形构成^[6]. 以往对吸引域边界上的鞍点研究较多^[7], 对吸引域边界上的不稳定结点则未见讨论. 本文研究的平面二维映射系统在一定参数范围内具有内部嵌入不稳定焦点的混沌吸引子, 在 Konishi 等^[8,9]的工作中被作为控制混沌的研究对象, 但未对其进行深入分析. 本文主要通过数值以及部分理论分析, 发现其具有奇怪吸引子, 在一定参数范围内可以有两个正 Lyapunov 指数, 其吸引域边界结构具有代表性.

2 基本定义

第二类不稳定结点^[10]: 如果平面二维映射解得不动点 (x_0, y_0) , 该处的 Jacobi 阵的特征值为实数, 满足 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ 或 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 同时 $|\lambda_i| > 1 (i = 1, 2)$, 则 (x_0, y_0) 称为不稳定的第二类结点.

拓扑传递性^[11]: 设 (X, ρ) 是一紧致的度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是连续映射, f 在 X 上拓扑传递是指 $\forall U, V$ 开集, $U, V \subset X, \exists k > 0$ 使 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset, \emptyset$ 代表空集.

对于平面二维映射系统 f 具有一连通区域 $V, \forall x \in V$, 如存在其小邻域 $N(x) \subset V$, 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $f^n(x) \in S \subset V$, 区域 S 为吸引集, V 为吸引域. 如果吸引集 S 有拓扑传递, 则为吸引子^[10,11].

平面二维映射如有不稳定焦点在吸引子区域内(或在吸引子流形上), 即混沌轨道可以任意精度接近该点, 其原象必在吸引子区域内(或在吸引子流形上). 由不稳定焦点的性质可知, 焦点足够小邻域内的点都是一致朝外走, 如果其原象不在吸引子区域内, 混沌轨道将无法以任意精度接近其邻域. 混沌轨道正是通过访问不动点原象的邻域, 而访问不稳定焦点的邻域. 另外, 由吸引子拓扑传递的性质, 取焦点的小邻域作为 V , 亦可得出相同的结论.

3 系统不动点及吸引子分析

本文主要研究如下二维映射^[12]:

$$x_{i+1} = -0.1x_i + ay_i, \quad y_{i+1} = x_i^2 - 1.6, \quad (1)$$

以往文献中 $a = 1$, 是在 Kawakami 映射基础上引入参数 a 得到的映射.

通过计算发现, 当 a 在 $[0.6, 1]$ 之间, 系统始终具有两个不动点, 一个焦点和一个不稳定第二类结点. 该系统始终具有两个吸引子, 一个在无穷远处, 另一个在焦点周围(或者是稳定焦点). 不稳定第二类结点始终在吸引域边界上.

由随参数 a 变化得到的分岔图(图 1(a), (b)) 和 Lyapunov 指数谱图(图 1(c), (d)) 可以得出以下结论: 当 a 小于 0.7 时, 吸引子为稳定焦点; 当 a 在 0.7—0.83 之间时, 吸引子为稳定不变环; 当 a 在 0.83—0.96 之间时, 为由倍周期分岔到具有一个正 Lyapunov 指数的混沌过程; 当 a 大于 0.96 时, 为具有两个正 Lyapunov 指数的混沌. 与一维 Logistic 映射不同的是, 此处倍周期分岔由周期 4 开始, 到周期 8、周期 16、周期 32、..., 周期 12 窗口(图 1(b)) 取代了 Logistic 映射分岔图中周期 3 窗口, 两个正 Lyapunov 指数的混沌出现

在周期 12 窗口之后.

当系统参数 a 从 0.6 到 1, 映射 (1) 的吸引子, 将由稳定焦点到稳定不变环, 进一步到收缩至低维流形上、具一个正 Lyapunov 指数的混沌吸引子, 到在一有“光滑”边界区域内弥散开来的、内嵌一个不稳定焦点的、具两个正 Lyapunov 指数的混沌吸引子.

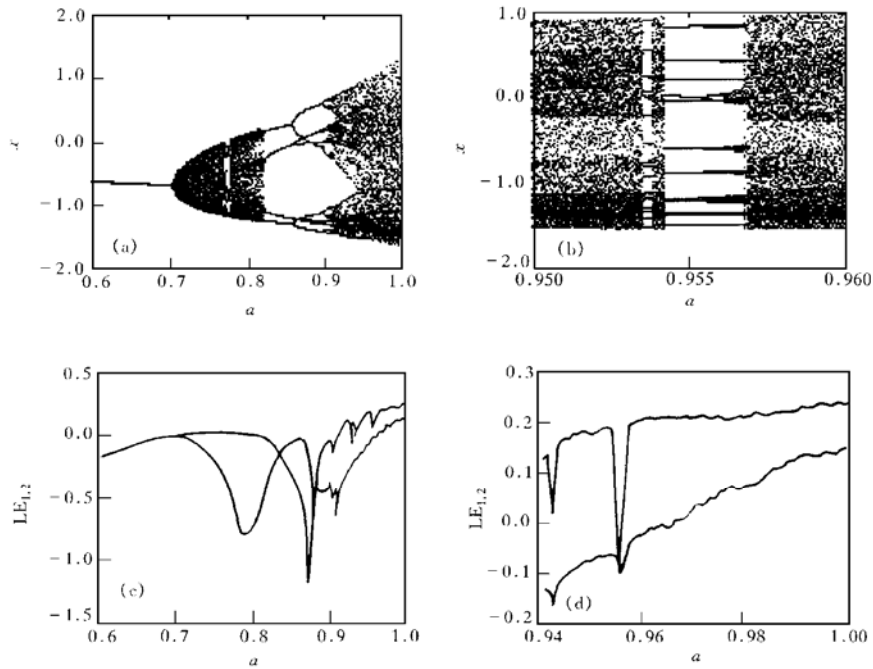


图 1 随参数 a 变化得到的分岔图和 Lyapunov 指数谱图 (a) 随着参数 a 的变化得到的分岔图; (b) 给出周期 12 窗口; (c) 两个 Lyapunov 指数 $LE_{1,2}$ 随参数 a 变化的情况; (d) 给出 $[0.94, 1]$ 区间

由图 2 可见, 当 $a = 0.68$ 时, 吸引子为稳定焦点; 当 $a = 0.76$ 时, 吸引子为稳定不变环; 当 $a = 0.92$ 和 0.94 时, 收缩到低维流形上的混沌; 当 $a = 0.96$ 和 1 时, 在有界区域弥散开来的混沌.

由于吸引集及吸引域在 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 之间, 通过以下方法判断当 $a = 1$ 时得到的“混沌吸引子”是否为稳态解: 1) 把 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 区间用 20×20 的网格等分; 2) 在吸引域内任取一点, 映射 10 万步作为暂态舍掉, 再映射 10 万步, 用来计算落入某一格子的概率, 得到一概率分布; 3) 同 2), 只是映射 50 万步作为暂态舍掉, 再映射 10 万步, 用来计算落入某一格子的概率, 得到一概率分布. 如果两次得到的概率分布没有大的差异, 可以认为映射至少在 10 万步后进入稳态. 将上述方法分别用到 Henon 映射及映射 (1), 进行比较研究, 得到的概率分布最大误差在 5% 以内, 得到的吸引子为稳态解.

映射 (1) 的吸引集被限定在一区域内, 具有吸引域. 由拓扑传递的定义可以推出, 如果吸引集中任一小块区域, 有限次映射的结果覆盖整个吸引集, 则可认为该映射具有拓扑传递, 因为此时任取开集 U 属于吸引集, U 经过有限次映射已经覆盖吸引集, 与任意属于吸引集的开集 V 的交集必不为空集. 例如, 对于一维映射: 设 $I = [0, 1]$, $f: I \rightarrow I$, $f(x) =$

$4x(1-x)$; 圆映射: 设 S^1 为单位圆, $f_n: S^1 \rightarrow S^1, f_n(\theta) = n\theta \pmod{2\pi}$, 其中 $n > 1, n \in \mathbb{Z}^+$, 拓扑传递性是显然的^[11]. 由此推测一维映射具有一个正 Lyapunov 指数时, 映射必具有拓扑传递性. 对于二维映射具有两个正 Lyapunov 指数时, 且映射被限定在一有限区域内, 吸引集内任一小块区域同时在两个方向拉伸, 有限次映射后必覆盖整个吸引集, 即具有拓扑传递性. 为了验证以上推断, 进行下面的数值测试.

继续利用上述划分的网格. 在吸引集区域内任取一格, 将该格进一步细分为 10×10 的网格, 取这些网格中心点作为初值各映射 100 步, 记录所访问的格子, 结果是吸引集内所有格子 (20×20) 均被访问到, 即可粗略认为吸引集内任一小块在有限步内映射的结果是吸引集自身. 进一步把 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 区间用 40×40 的网格等分, 得到相同的结果. 这就说明映射 (1) 得到吸引集是稳态解, 并具拓扑传递性.

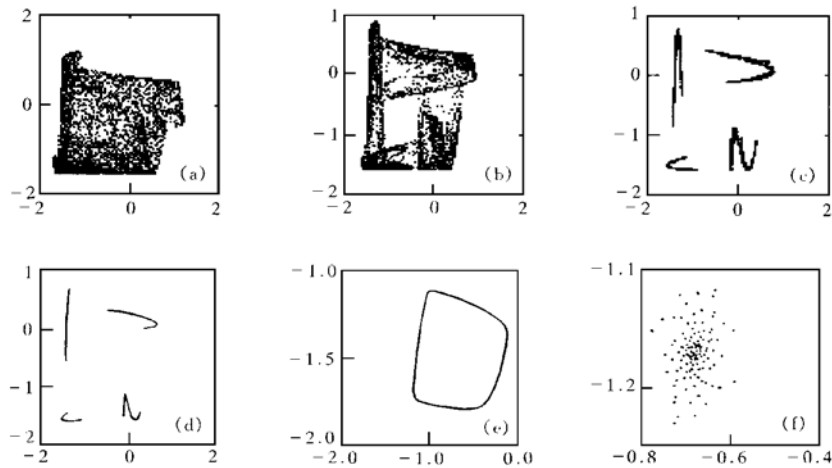


图 2 吸引子形态随参数 a 变化 (a) 为 $a = 1.00$; (b) 为 $a = 0.96$; (c) 为 $a = 0.94$; (d) 为 $a = 0.92$; (e) 为 $a = 0.76$; (f) 为 $a = 0.68$

不稳定焦点 A 嵌入在吸引集中, 不稳定焦点的原象 B 亦在吸引集中, $f(B) = A, f(A) = A, B$ 是映射 (1) 的非回归点, 通过数值计算在吸引集 X 中找到不稳定周期 4 和周期 8, 由文献[11]中的定理 2 和定理 3 都可得出映射 (1) 在吸引集 X 上对初值敏感依赖.

4 吸引域边界的结构

通过数值计算发现吸引域边界上有一个不稳定的第二类结点, 有一系列不稳定周期点(周期 2、周期 4、周期 6、...), 吸引域边界比较光滑规则. 数值上确定吸引域边界及断定一点在边界上的方法参照文献[7].

映射系统 (1) 在不稳定第二类结点处导算子的两个特征值有 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 设对应的特征向量为 η, ζ . 吸引域边界(图 3 中虚线示出)通过不动点的形态有三种情况(如图 3). 但经分析不难发现, 只有图 3(a) 的情形是成立的. 因为由不稳定第二类结点的性质, t 时

刻 η 轴右侧的点, $t + 1$ 时刻将映射到 η 轴左侧, ζ 轴右半轴映射到左半轴(反之亦然, 即关于 η 轴对调). 如果图 3(b) 成立, 那么只需 t 时刻在吸引域内部 ζ 轴上取一点, $t + 1$ 时刻它将映射到吸引域外, 推出矛盾. 同理图 3(c) 也不成立. 因此, 吸引域边界在不动点(特征值有 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$) 处的形态只能如图 3(a) 所示. 进一步可推出吸引域边界上不可能有

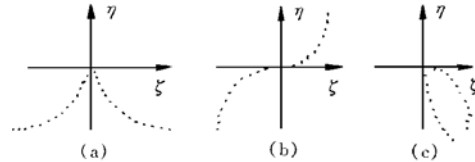


图 3 吸引域边界通过不动点时的形态 (a) 为吸引域边界穿过第三、第四象限; (b) 为吸引域边界穿过第一、第三象限; (c) 为吸引域边界仅穿过第四象限

不稳定奇数周期点, 理由如下: 周期点在映射过程中是按某一次序交换位置, 如果在吸引域边界上存在周期 $2n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 不失一般性, 假定 $n + 1$ 个点在不动点左侧, n 个点在右侧, 下一时刻两侧点交换位置, 必有一点留在同一侧, 推出矛盾.

综上所述, 由不稳定周期点及其稳定流形构成的吸引域边界上有不稳定第二类结点, 同时有不稳定偶数周期点, 而没有不稳定奇数周期点.

通过分析有以下结论: 对于一类平面二维映射仅有两个不动点, 不稳定焦点 A 和不稳定结点 B , 有一个吸引集 $X, A \in X$ 且 $B \notin X$, 那么可以断定吸引集有有界的吸引域, 且不稳定结点必在吸引域边界上, 不稳定结点如果是第二类的, 则吸引域边界上同时存在不稳定偶数周期点.

进一步分析, 边界上如果有周期 4, 记为点 1, 2, 3, 4, 由于边界上存在不稳定第二类结点, 导致点 1、点 2 间的边界映射到点 3 与点 4 间的边界上, 同时折叠使其中必然存在一个映射两次的“不动点”, 即不稳定周期 2. 所以周期 2 与周期 4 相间排列. 同理, 可得出周期 $2n$ 与周期 $2(n + 1)$ 相间排列, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots$.

在不稳定第二类结点及其原象之间的边界上存在全部周期点的一半, 这些周期点又是相间排列的(图 4). 可以编制程序来寻找不稳定周期点, 数值计算表明, 得到的结果也证实了以上对于吸引域边界结构的分析.

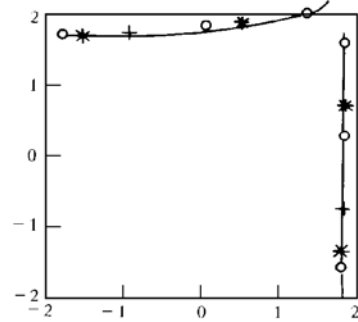


图 4 吸引域边界上不稳定周期的相间排列 + 为周期 2, * 为周期 4, o 为周期 6

5 Lyapunov 指数谱的计算结果

表 1 给出了三个映射系统在特定参数下的 Lyapunov 指数谱, 其中 Henon 映射作为对照, 是具一个正 Lyapunov 指数的代表. 具两个正 Lyapunov 指数的映射以往研究较少, 刘曾荣^[3, 10]研究过 CML 映射, 此处列出的结果是本文作者的计算结果. CML 映射与本文

的映射,在一定参数范围内具有两个正 Lyapunov 指数的特性.

表 1 各映射的参数及 Lyapunov 指数谱

映 射	方 程	参 数	Lyapunov 指数谱
Henon	$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$	$a = 1.4$	$\lambda_1 = 0.604$
	$y_{n+1} = bx_n$	$b = 0.3$	$\lambda_2 = -2.341$
Kawakami	$x_{n+1} = -ax_n + y_n$	$a = 0.1$	$\lambda_1 = 0.231$
	$y_{n+1} = x_n^2 - b$	$b = 1.6$	$\lambda_2 = 0.144$
CML	$x_{n+1} = 1 - a(x_n^2 + y_n^2)$ $y_{n+1} = -2a(1 - 2\varepsilon)x_n y_n$	$a = 1.95, \varepsilon = 0.2$	$\lambda_1 = 0.688, \lambda_2 = 0.121$
		$a = 1.95, \varepsilon = 0.11$	$\lambda_1 = 0.182, \lambda_2 = 0.105$
		$a = 1.95, \varepsilon = 0.01$	$\lambda_1 = 0.824, \lambda_2 = 0.788$

注:以上计算利用文献[13]的算法,各计算 130000 步(舍掉前 30000 步),其中 Henon 计算作为检验,与文献[13]的结果(0.603, -2.34)非常接近.

6 结 论

本文研究一平面二维映射系统,随着参数的变化,吸引子由稳定焦点到稳定不变环,到收缩至低维流形上的、具一个正 Lyapunov 指数的混沌吸引子,到在一有界区域内弥散开来且具两个正 Lyapunov 指数的混沌吸引子的动力学现象.刻划了系统随参数 a 变化由倍周期分岔到混沌的过程,尤其是在周期 12 窗口以后出现具两个正 Lyapunov 指数的混沌.当具有两个正 Lyapunov 指数时,讨论了拓扑传递性,其同时具有分数维,利用点型维的算法计算映射(1)在 $a = 1$ 时的 $D_p = 1.68$,另外作为对照及对程序准确性的验证,得到 Henon 映射 $D_p = 1.25$.

本文同时揭示了一类平面二维映射系统吸引域边界结构,理论分析与数值计算结果相互印证.指出如果平面二维映射系统存在一个吸引子,同时存在一个吸引子区域外的不稳定第二类结点,则必存在一个有界的吸引域,不稳定第二类结点在吸引域边界上.给出了吸引域边界在通过不稳定第二类结点时的形态分析.不稳定偶数周期点在吸引域边界上相间排列.

- [1] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, *Lecture Notes in Mathematics*, ed. H. D. Peitgen, H. O. Walter (Springer, Berlin, 1979), p. 204.
- [2] L. S. Young, *Ergodic Theory and Differential Systems*, **2**(1982), 109.
- [3] 刘曾荣等, *力学学报*, **29**(1997), 103 [Liu Zeng-rong *et al.*, *Acta Mechanica Sinica*, **29**(1997), 103(in Chinese)].
- [4] F. R. Marotto, *Commun. Math. Phys.*, **68**(1979), 187.
- [5] G. Keller, M. Kunzle, T. Nowicki, *Physica*, **D59**(1992), 39.
- [6] 黄永念等, *数学进展*, **23**(1994), 142 [Huang Yong-nian *et al.*, *Mathematic Progress*, **23**(1994), 142(in Chinese)].
- [7] Celso Grebogi *et al.*, *Physica*, **D24**(1987), 243.
- [8] Keiji Konishi *et al.*, *Physica*, **D100**(1997), 423.
- [9] Keiji Konishi *et al.*, *Phys. Lett.*, **A206**(1995), 203.
- [10] 刘曾荣, *两维平面映射的奇怪吸引子*(苏州大学出版社,苏州,1996),第 28 页 [Liu Zeng-rong, *Strange Attractor*

- of Two Dimensional Map(Suzhou University Press, Suzhou, 1996), p. 28(in Chinese)].
- [11] 胡 扬等, 复旦大学学报(自然科学版), **34**(1995), 127 [Hu Yang *et al.*, *J. Fudan Univ. (Nat. Sci. Ed.)*, **34**(1995), 127(in Chinese)].
- [12] H. Kawakami, K. Kobayashi, *Bull. Fac. Eng. Tokushima Univ.*, **16**(1979), 29.
- [13] Alan Wolf *et al.*, *Physica*, **16D**(1985), 285.

A STUDY ON STRANGE DYNAMICS OF A TWO-DIMENSIONAL MAP*

HE DAIHAI XU JIAN-XUE CHEN YONG-HONG

(*Institute of Nonlinear Dynamics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

(Received 12 November 1998; revised manuscript received 5 March 1999)

ABSTRACT

The nonlinear dynamics of a two-dimensional map system on a plane is studied. We found that the attractor of the system changed from stable focus, stable invariant circle(limit circle) to the chaotic attractor contracted into low-dimensional manifold with one positive Lyapunov exponent, finally to the chaotic attractor filling a zone with a smooth boundary with two positive Lyapunov exponents during the change of the system parameters. The characters of the fixed points are analyzed. We found that the unstable second class node and the unstable even period points are arranged alternatively on the boundary.

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19672046).