

控制与同步连续时间混沌系统的 非线性反馈方法

高金峰 罗先觉 马西奎

(西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

潘秀琴 王俊昆

(郑州工业大学电气信息工程学院, 郑州 450002)

(1998 年 12 月 7 日收到; 1999 年 3 月 6 日收到修改稿)

在将连续时间混沌系统的控制与同步问题统一处理的基础上, 给出了一种可实现两个相同或不同连续时间混沌系统的控制与同步的非线性状态反馈方法. 该方法以著名的 Lyapunov 技术为基础, 当目标和被控系统的状态变量都有界时, 不论目标系统是处于平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态, 都可使被控系统按照目标系统给定的轨道演化, 并且是大范围可控和可同步的.

PACC: 0545

1 引 言

近期, 混沌系统的控制与同步已成为非线性动力学领域的研究热点之一. 混沌同步原理及混沌控制方法, 前者是由美国海军实验室的学者 Pecora 和 Carroll^[1,2] 提出, 后者是由美国马里兰大学的物理学家 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出, 称为 OGY 方法^[3]. 随后, 国际上混沌控制方法及其实验的研究迅速发展, 混沌同步也进一步拓广. 混沌控制的目标有两种, 一种是基于混沌吸引子内存在无穷多的周期轨道, 控制的目标是对其中某个不稳定周期轨道进行有效的稳定控制, 该方法的特点是不改变系统原有的周期轨道. 另一种控制目标不要求必须稳定控制原系统中的周期轨道, 而只要通过可能的策略、方法及途径, 实现有效控制, 得到所需轨道即可. 混沌同步也属于混沌控制的范畴, 典型的是前面提及的 Pecora 和 Carroll 的方案. 其思想是存在驱动与被驱动关系. 把混沌系统分成稳定和 unstable 部分, 即把具有负的条件 Lyapunov 指数的稳定部分制成一个响应系统, 把响应系统与驱动系统用驱动系统中的驱动信号耦合起来, 由此可达到响应系统与驱动同步. 并且该种同步思想已拓展到非混沌同步(周期、准周期等)及高阶级联同步.

控制与同步问题通过 Kocarev 等^[4,5] 的工作合并成了一个问题, 即混沌同步问题可以看成一类让被控系统混沌轨道按目标系统轨道运动的控制问题.

在实现混沌系统的控制与同步方面, 文献[6-8]给出了多种方法, 最有效的方法是文献[7,8]给出的自适应控制方法. 该方法以著名的 Lyapunov 技术为基础, 当目标和被控系

统的状态变量都有界时, 不论目标系统是处于平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态, 都可使被控系统按照目标系统给定的轨道演化, 并且是大范围可控和可同步的.

本文同样采用 Lyapunov 直接法, 给出一种非线性状态反馈控制方法. 尽管文献[4]中的线性状态反馈方法也可实现一般连续时间混沌系统的控制与同步, 但其仅当目标系统与被控系统的初值选择满足一定条件的情况下才是有效的. 本文的方法可有效地实现两个相同或不同连续时间混沌系统之间的平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态的控制与同步, 且其控制与同步是大范围渐近稳定的. 与文献[7, 8]的自适应控制与同步方法相比, 具有控制器简单、不需要自适应控制环节的优点.

本文给出非线性状态反馈控制算法及其证明, 还给出了采用该方法进行控制与同步混沌系统的计算机模拟结果.

2 混沌控制与同步问题的描述

给定两个系统

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x(t), t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \in R^n, \\ dv/dt &= g(v(t), t). & v(0) &= v_0 \in R^n. \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} f, g: R^n \times R \rightarrow R^n, & \quad \text{且 } f, g \in C^1, \\ B \in R^{n \times m}, & \quad x(t), y(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m. \end{aligned}$$

(1) 式的控制与同步问题就是要寻找一个合适的 B 和 $u(t) = \varphi(x(t), y(t), t)$ 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0 \quad (2)$$

成立. 于是, (1) 式的控制与同步可以化为对误差系统进行研究. 误差系统为

$$de/dt = f(x(t), t) - g(y(t), t) + Bu(t), \quad (3)$$

式中 $e(t) = x(t) - y(t)$.

显然, 由于没有对 f 和 g 的限制, 两个混沌系统的控制与同步问题具有一般的意义. 基于该种描述方法, 若能找到一种控制方案使(2)式成立, 将具有重要的意义.

类似于文献[7]的做法, 设

$$\Pi: R^n \rightarrow \text{Im}(B)$$

是 R^n 映上 $\text{Im}(B)$ 的正交投影算子. 则 $f - g$ 可以分解成两部分

$$f - g = \Pi(f - g) + (I - \Pi)(f - g).$$

假设 1 $f - g$ 在 $\text{Im}(B)$ 的余空间上的投影是线性的, 即对某一线性矩阵 L 有

$$(I - \Pi)(f(x(t), t) - g(y(t), t)) = L(x - y), \quad L \in R^{n \times n}.$$

假设 1 看起来不容易做到, 但实际的混沌系统总是由线性部分和非线性部分组成. 最为著名的 Lorenz 系统、蔡氏电路都是如此.

在假设 1 及 B 为列满秩的条件下, (3) 式可以表示成

$$de/dt = Le(t) + B[h(x(t), t) - l(y(t), t) + u(t)], \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} h &= (B^T B)^{-1} B^T f, \\ l &= (B^T B)^{-1} B^T g. \end{aligned}$$

3 状态反馈控制器设计

3.1 控制矩阵 B 及 K 的确定

为实现混沌系统的控制与同步,除了要确定一个合适的控制量 $u(t)$ 外,第一步要做的是选择合适的控制矩阵 B ,使(4)式中的线性部分是可控的. 设

$$de_L/dt = Le_L(t) \quad (5)$$

为(4)式的线性化方程. 因此,由文献[9]知,应选择控制矩阵 B 满足

$$\text{rank}[B \mid LB \cdots \mid L^{n-1}B] = n. \quad (6)$$

这样就有如下论据:

论据 1 如果(6)式成立,则存在一个 $m \times n$ 矩阵 K ,使 $L - BK$ 的所有特征值都有负实部.

论据 1 表明对(5)式可选择一个反馈控制律

$$V(t) = -Ke_L(t), \quad (7)$$

使得闭环系统

$$de_L/dt = (L - BK)e_L(t) \quad (8)$$

的平衡点是大范围渐近稳定的.

论据 2 假设 L, B 满足(6)式, $P \in R^{n \times n}$ 和 $Q \in R^{m \times m}$ 是正定矩阵,又设未知矩阵 $M \in R^{n \times n}$ 满足

$$-P - L^T M - ML + MBQ^{-1}B^T M = 0. \quad (9)$$

K 由下式定义:

$$K = Q^{-1}B^T M. \quad (10)$$

那么, $L - BK$ 的所有特征值都有负实部.

由论据 2 可以求出满足论据 1 的矩阵 K . 这样就得到了求解矩阵 K 的步骤,即首先给定正定矩阵 P 和 Q ,求解出未知对称正定矩阵 M ,再根据(10)式即可求得使 $L - BK$ 所有特征值都有负实部的 K .

显然,论据 2 中的矩阵 M 满足 Lyapunov 方程

$$(L - BK)^T M + M(A - BK) = -I, \quad (11)$$

式中的 $I(n \times n)$ 为单位阵.

3.2 非线性控制部分

前面仅对(4)式的线性部分(5)式通过选择 B 和 K 可以实现

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_L(t) = 0.$$

但(4)式中包含有非线性项 $h(x(t), t)$ 和 $l(h(t), t)$,甚至 $h(x(t), t), l(h(t), t)$ 中可

能有不确定的因素. 因此必须在前一部分的基础上确定一个合适的 $u(t)$, 使(4)式中的 $e(t)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

假设 2

$$\begin{aligned} |l(y(t), t)| &\leq \alpha(y(t)), & \forall y, t, \\ |h(x(t), t)| &\leq \beta(x(t)), & \forall x, t, \end{aligned}$$

且 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都是连续的.

一般情况下, 不管系统是处于平衡点、周期或混沌情况下, 对所有的时间 t 均有

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq M_1, & \forall t \in [0, \infty), & M_1 \in R^+, \\ \|x(t)\| &\leq M_2, & \forall t \in [0, \infty), & M_2 \in R^+. \end{aligned}$$

于是, 在假设 2 满足的情况下, 分别存在 $W, T \in R^+$ 有

$$\begin{aligned} \|l(y(t), t)\| &\leq W, & \forall t \in [0, \infty), \\ \|h(x(t), t)\| &\leq T, & \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (12)$$

至此, 我们选择一个控制器 $u(t)$ 具有如下形式:

$$u(t) = -Ke(t) - k_0 \operatorname{sgn}(B^T Me), \quad (13)$$

其中 $K \in R^{m \times n}$ 由(10)式给出, $M \in R^{n \times n}$ 由(9)式给出, $B \in R^{n \times m}$ 由(6)式确定, $k_0 \in R^+$.

于是, 当考虑的两个系统分别满足假设 2 及(12)式的前提下, 有如下定理:

定理 1 若(4)式中的控制器由(13)式给定, 则当取 $k_0 \geq W + T$ 时, 对于所有的初始条件 $e(0)$ 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

证 选择标量函数

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T M e. \quad (14)$$

由于 M 是一个正定对称阵, 因此 $V(e)$ 对所有的 $e \in R^n$ 是正定函数. 对 $V(e)$ 沿着(4)式对时间求导可得

$$\begin{aligned} dV(e)/dt &= \frac{1}{2} [\dot{e}^T M e + e^T M \dot{e}] \\ &= \frac{1}{2} [(L - BK)e + Bh(x(t), t) - Bl(y(t), t) - k_0 B \operatorname{sgn}[B^T Me]]^T M e \\ &\quad + \frac{1}{2} e^T M [(L - BK)e + Bh(x(t), t) - Bl(y(t), t) - k_0 B \operatorname{sgn}(B^T Me)] \\ &= \frac{1}{2} [e^T (L - BK)^T M e + e^T M (L - BK)e + h^T(x(t), t) B^T M e \\ &\quad + e^T M B h(x(t), t) - l^T(y(t), t) B^T M e - e^T M B l(y(t), t) \\ &\quad - k_0 [\operatorname{sgn}[B^T Me]]^T B^T M e - k_0 e^T M B \operatorname{sgn}(B^T Me)] \\ &= -\frac{1}{2} [e^T I e + h(x(t), t) B^T M e - l(y(t), t) B^T M e - k_0 \operatorname{sgn}[B^T Me]^T B^T M e] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \|e\|^2 - k_0 \operatorname{sgn}[B^T M e]^T B^T M e + h(x(t), t) B^T M e - l(y(t), t) B^T M e \\
&\leq -\frac{1}{2} \|e\|^2 - k_0 \operatorname{sgn}[B^T M e]^T B^T M e + (\|h(x(t), t)\| + \|l(y(t), t)\|) \|B^T M e\| \\
&\leq -\frac{1}{2} \|e\|^2 - k_0 \operatorname{sgn}[B^T M e]^T B^T M e + [W + T] \|B^T M e\|.
\end{aligned}$$

由于

$$\operatorname{sgn}[B^T M e]^T B^T M e = \|B^T M e\|,$$

所以

$$dV(e)/dt \leq -\frac{1}{2} \|e\|^2 - [k_0 - (W + T)] \|B^T M e\|.$$

因此, 当选择 $k_0 \geq W + T$ 时, $\dot{V}(e)$ 为一负定函数, 于是得到(4)式的平衡点 $e = 0$ 是大范围渐近稳定的结论.

3.3 纯非线性反馈环节控制器

由前面的分析可知, 综合所得的控制器 $u(t)$, 包括两个部分: 一部分为线性状态反馈部分, 另一部分为非线性状态反馈部分.

若假设误差方程(4)中的线性部分的矩阵 L 是 Hurwitz 矩阵(即矩阵 L 所有的特征值均有负实部), 则在(13)式中可以去除线性反馈部分. 从而控制器仅为

$$u(t) = -k_0 \operatorname{sgn}[B^T M e], \quad (15)$$

式中的 M 为正定对称矩阵, 是 Lyapunov 矩阵方程

$$ML + L^T M + I = 0 \quad (16)$$

的解; $k_0 \geq W + T$.

应该提及的是, 采用(15)式设计的控制器, 只要假设 2 成立, 并选择 $k_0 \geq W + T$. 仅利用简单的非线性状态反馈, 就可以在不知道参考模型和受控系统知识的情况下, 总是可以实现连续时间混沌系统的控制和同步, 即该种控制具有较强的鲁棒性.

4 计算机模拟结果

为验证上述结论, 下面分别给出 Lorenz 系统、蔡氏电路和一个四阶超混沌系统的控制与同步的计算机模拟结果. 所有模拟结果中的初值都是随机选取的.

4.1 同步两个相同参数的 Lorenz 系统

Lorenz 系统方程为^[6]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

当取 $\delta = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ 时, 系统处于混沌状态. 方程中的线性部分的系数阵 L 不是

Hurwitz 矩阵. 为实现两个相同参数系统间的同步控制, 选取线性反馈阵

$$K = (20 \ 10 \ 0), \quad B = (0 \ 1 \ 0)^T.$$

容易验证 $L - BK$ 为 Hurwitz 矩阵. 当 $k_0 = 150$ 时, 两个系统的变量误差为 $e_k = x_k - y_k$ ($k = 1, 2, 3$). e_k 随归一化时间 t (图 1—图 4 中的 t 均为归一化时间) 的变化情况如图 1 所示.

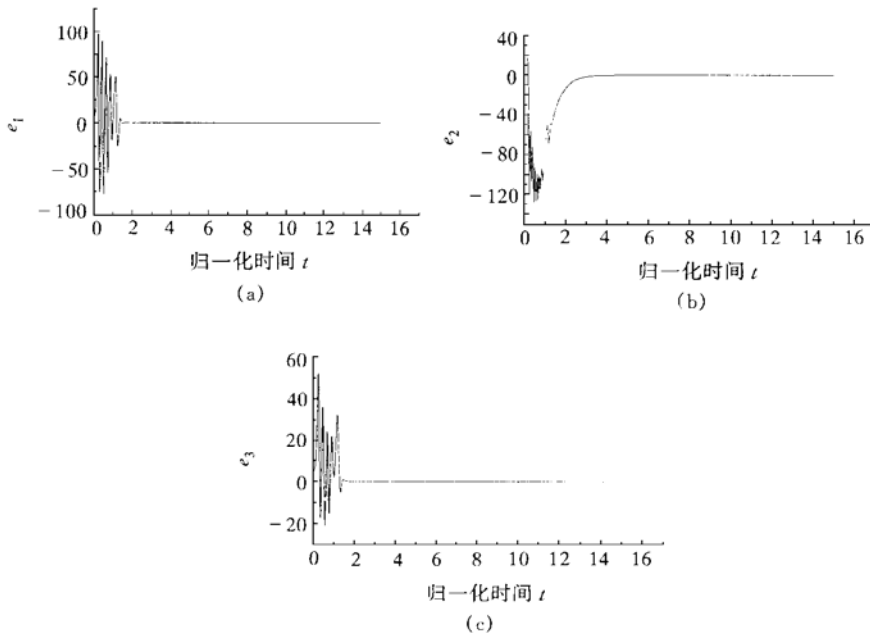


图 1 Lorenz 系统控制同步误差 (a)为 e_1-t 的关系曲线;(b)为 e_2-t 的关系曲线;(c)为 e_3-t 的关系曲线

4.2 纯非线性反馈控制同步的两个蔡氏电路

描述蔡氏电路的方程如(17)式^[8]所示. 此参数下, 电路处于混沌状态. 方程的线性部分为 Hurwitz 矩阵. 当控制器取(15)式形式, 并选择 $k_0 = 10$, 可使误差系统的平衡点

$$e = (0 \ 0 \ 0)^T$$

是大范围渐近稳定平衡点. 图 2 中给出了一个模拟结果.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10f(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|).$$

误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 10[f(x) - f(y)] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

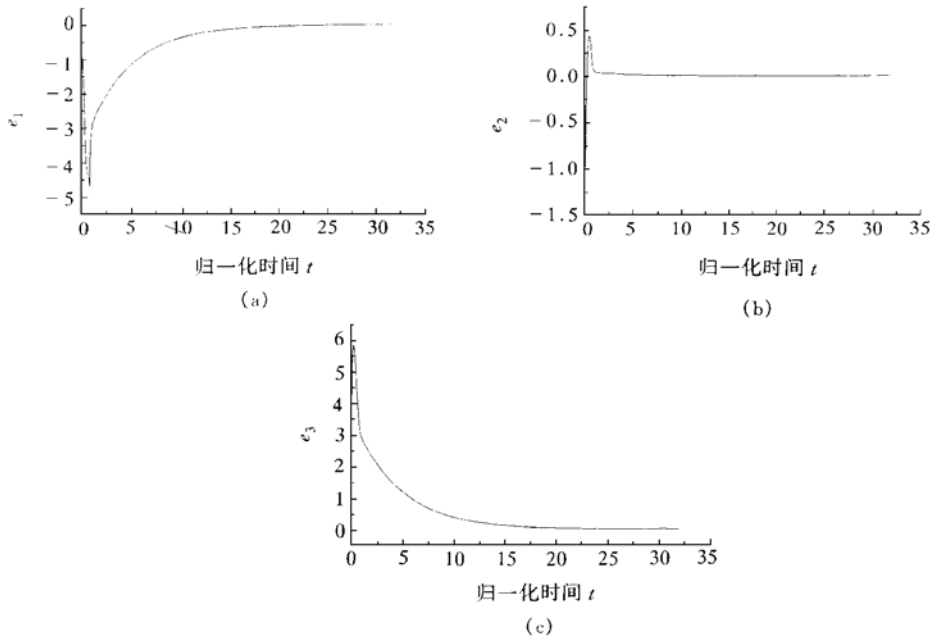


图 2 蔡氏电路误差变化图 (a)为 e_1-t 的关系曲线;(b)为 e_2-t 的关系曲线;(c)为 e_3-t 的关系曲线

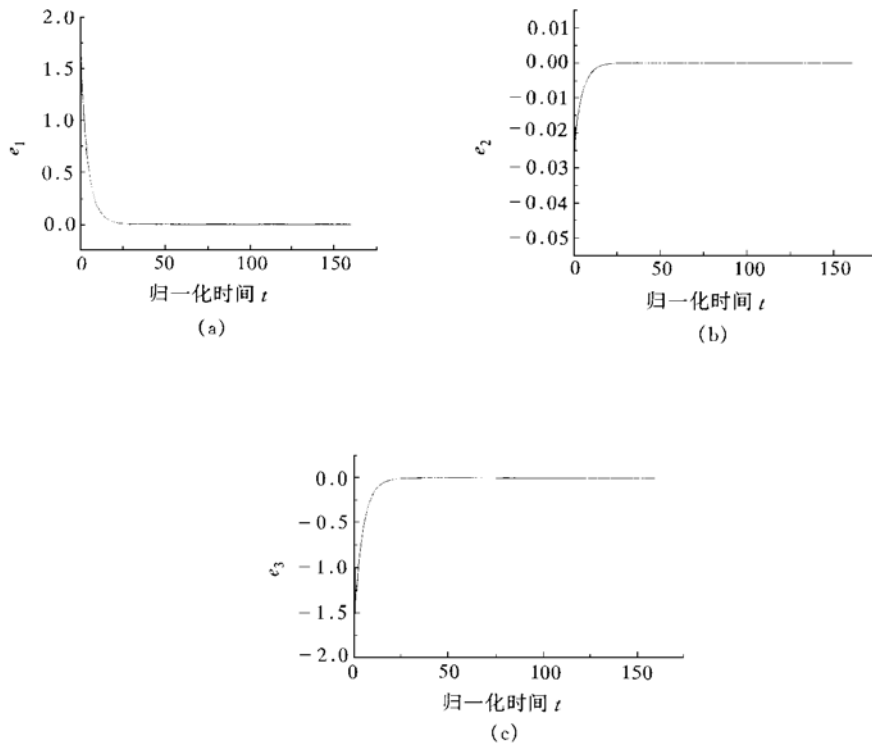


图 3 含干扰因素的同步效果图 (a)为 e_1-t 的关系曲线;(b)为 e_2-t 的关系曲线;(c)为 e_3-t 的关系曲线

为检验非线性反馈控制器的鲁棒性, 在受控系统的参数中引入 5% 的不确定因素时, 模拟结果如图 3 所示.

4.3 控制混沌与超混沌系统的同步

为研究非线性反馈控制器对三阶以上系统及超混沌控制与同步的适应性, 选择下式

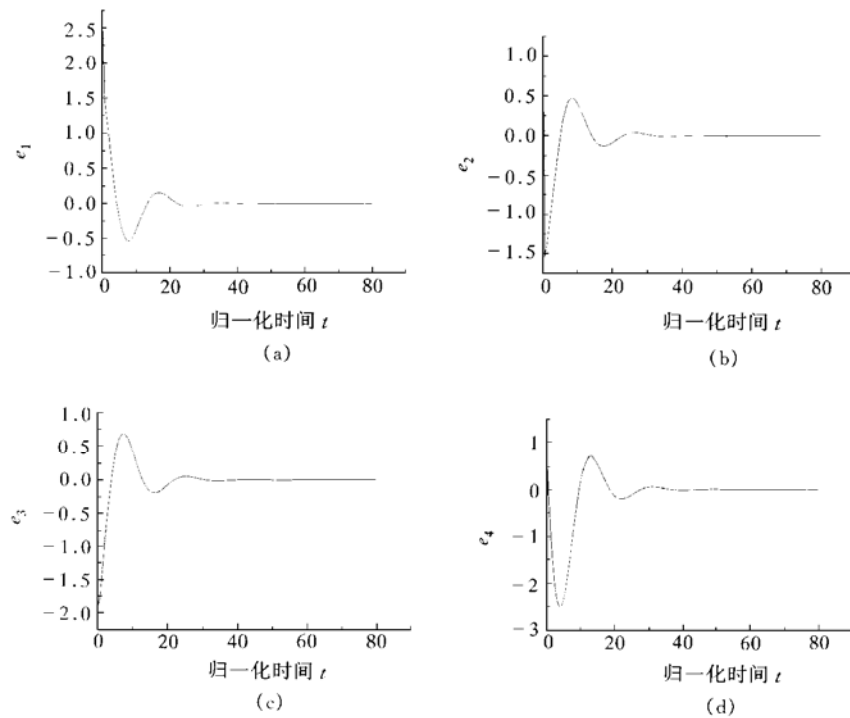


图4 超混沌同步误差图 (a)为 e_1-t 的关系曲线; (b)为 e_2-t 的关系曲线; (c)为 e_3-t 的关系曲线; (d)为 e_4-t 的关系曲线

表示的四阶系统. 文献[10]证明, 该系统存在有混沌和超混沌振荡.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_3 & -c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $f(x) = -(x_1 + |x_1 - 1| - |x_1 + 1|)$, $b_3 = 0.5369$, $c_2 = 0.3725$, $c_3 = 0.03536$, $c_4 = 0.1178$, $d_3 = 0.8489$, b_2 为变化参数. 选择 $b_2 = 0.05402$, 作为目标系统处于超混沌振荡. $b_2 = 0.3818$, 受控系统处于混沌振荡. 构成误差系统

$$\dot{e} = Le(t) + r(x(t), y(t)) + Bu,$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_3 & -c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

此时线性矩阵 L 不是 Hurwitz 矩阵, 所以需要选取一线性反馈阵 K , 使得 $L - BK$ 成为 Hurwitz 矩阵. 取

$$K^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_0 = 10.$$

计算机模拟结果如图 4 所示. 模拟结果表明, 非线性反馈控制器可以实现混沌与超混沌系统控制与同步.

5 结 论

本文通过将连续时间混沌系统的控制与同步问题统一考虑, 并在系统状态变量有界的前提下, 设计出的控制器可实现一大类连续时间混沌系统的控制与同步. 一般情况下, 控制器由线性和非线性两部分组成, 当系统的线性部分是 Hurwitz 矩阵时, 控制器仅有非线性部分, 非线性部分的控制强度应大于系统中非线性部分范数的最大值. 理论和计算机模拟都证明, 采用本文设计的控制器可以实现两个相同或不同甚至被控制系统中含有不确定因素情况下的连续时间混沌系统的周期、拟周期、混沌或超混沌的控制与同步, 且控制是大范围渐近稳定的.

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **A44**(1991), 2374.
- [3] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.
- [4] L. Kocarev, A. Shang, L. O. Chua, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **3**(1993), 479.
- [5] C. W. Wu, L. O. Chua, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **4**(1994), 979.
- [6] G. Chen, X. Dong, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **3**(1993), 1363.
- [7] M. di Bernardo, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **6**(1996), 557.
- [8] M. di Bernardo, *Phys. Lett.*, **A214**(1996), 139.
- [9] 陈启宗, 线性系统理论与设计(科学出版社, 北京, 1988), 第 140 页 [Chen Chit song, *Linear System Theory and Design*(Science Press, Beijing, 1988), p. 140(in Chinese)].
- [10] 王俊昆、高金峰、杨育霞, 电路与系统学报, **2**(1997), 178 [Wang Jun-kun, Gao Jin-feng, Yang Yu-xia, *Journal of Circuits and Systems*, **2**(1997), 178(in Chinese)].

A NONLINEAR STATE FEEDBACK APPROACH TO THE CONTROL AND SYNCHRONIZATION OF CONTINUOUS-TIME CHAOTIC SYSTEMS

GAO JIN-FENG LUO XIAN-JUE MA XI-KUI

(*College of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

PAN XIU-QIN WANG JUN-KUN

(*College of Electrical and Information Engineering, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002*)

(Received 7 December 1998; revised manuscript received 6 March 1999)

ABSTRACT

This paper presents a nonlinear state feedback approach to the control and synchronization of chaotic nonlinear dynamic systems based on a unified frame for both the control and the synchronization. Assuming the boundedness of chaotic attractors and limit cycles, the approach, which is both global and not reliant on complete knowledge of the systems involved, is rigorously proved by means of Lyapunov theory. An application to the synchronization of three chaotic systems is given.

PACC: 0545