

高斯相关随机表面及其光散射散斑场的 模拟产生和光强概率分析

程传福 亓东平 刘德丽 滕树云

(山东师范大学物理系, 济南 250014)

(1999 年 4 月 28 日收到)

提出了模拟产生高斯相关随机表面的方法, 并模拟产生了这类表面在夫琅禾费面上产生的散斑场. 以模拟产生的 10000 个随机表面作为表面样本系综, 对具有不同粗糙度和横向相关长度的表面系综在夫琅禾费面上各点产生的散斑光强系综的概率密度分布进行了分析. 发现: (1) 散斑场的高斯和非高斯特性在空间上按一定的区域分布, 并非整幅散斑图皆为高斯或非高斯散斑; (2) 散射表面只包含少数散射颗粒时也可以形成高斯散斑.

PACC: 4220; 4230

1 引 言

散斑场的计算机模拟产生一直是研究散斑场特性的重要手段, 近年来随着计算机技术的发展, 从散斑理论到散斑应用的各个领域它都起到越来越重要的作用^[1,2]. 例如, 对散斑相位的光学螺旋及其反相关这一新现象的研究, 便是基于散斑场的模拟产生而开展^[3]. 但是, 目前散斑场模拟产生的文献, 大多以随机数代替产生散斑场的表面高度分布, 而忽略实际表面的相关, 这限制了模拟方法对散斑场某些特性研究方面的应用.

天然随机散射表面的相关特性一般可用高斯相关函数来描述, 并具有均方根粗糙度和横向相关长度两个统计特征量. 本文提出了模拟产生高斯相关表面的方法, 进而模拟产生了光波经这类表面散射后在夫琅禾费面上形成的散斑场. 并对具有相同统计特性的表面样本系综产生的散斑场系综在空间各点处光强概率分布的高斯与非高斯特性进行了研究.

在传统的散斑理论中^[4], 散射表面上各点被看作是统计独立的, 其相关函数为 δ 函数, 所形成的散斑场为高斯散斑场, 即光强的概率满足负指数分布. 在许多情况下, 高斯散斑是对实际散斑场很好的近似. 另外, 许多情况下散斑场为非高斯散斑, 这已有大量的文献进行过研究^[5-8]. 文献[9]对非高斯散斑做了系统而详尽的综述, 其结论认为: (1) 只含有少数几个散射颗粒的散射体, 即使这些散射颗粒在夫琅禾费面上一点处形成光波的振幅和相位在统计上是独立的(即对应的散射表面有较大的粗糙度), 散斑场也是非高斯的; (2) 一幅散斑场整幅或是高斯的, 或是非高斯的.

本文的模拟结果表明散斑场系综的高斯或非高斯概率分布及其转变条件比较复杂, 其中的许多现象和规律有待于进一步的理论解释.

2 高斯相关随机表面及其散斑场的模拟产生

如图 1 所示, 激光束照明位于 \mathbf{r}_0 坐标平面上的随机表面而产生散射, 设表面散射区域的大小为 L , 在夫琅禾费平面(即远场平面或透镜的焦平面)上形成的散斑光波的复振幅为

$$U(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}_0) \exp(-i4\pi z(\mathbf{r}_0)/\lambda) \exp(-i2\pi \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}/f) d\mathbf{r}_0. \quad (1)$$

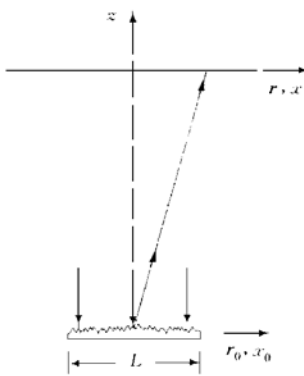


图 1 表面的光散射在夫琅禾费面上产生散斑场的示意图

它是相位函数 $\exp(-i4\pi z(\mathbf{r}_0)/\lambda)$ 的傅里叶变换, 其中 $A(\mathbf{r}_0)$ 是散射区域的孔径函数, $z(\mathbf{r}_0)$ 是随机表面的高度函数, f 是透镜焦距或远场情况下观察面与散射表面之间的距离. 如将式中相位函数写成 $\exp(-i2\pi(n-1)z(\mathbf{r}_0)/\lambda)$, 则该式即为透射式散射体产生的光波, 其中 n 为散射体的折射率.

为了模拟计算随机散斑场 $U(\mathbf{r})$, 首先要模拟产生随机表面高度函数 $z(\mathbf{r}_0)$. 为此, 考察下面的 $z(\mathbf{r}_0)$ 产生表达式:

$$z(\mathbf{r}_0) = 2^{d/2} w^2 / (\xi^2 \pi)^{d/4} \int d\mathbf{u} \exp(-2|\mathbf{r} - \mathbf{u}|^2) \eta(\mathbf{u}), \quad (2)$$

其中 d 是所模拟产生表面的维数, 对于一维和二维表面的模拟, d 分别等于 1 和 2, $\eta(\mathbf{u})$ 是均值为 0 的白噪声过程, $\langle \eta(\mathbf{u}) \rangle = 0$, $\langle \eta(\mathbf{u}) \eta(\mathbf{u}') \rangle = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}')$. 不难证明, $z(\mathbf{r}_0)$ 的自相关函数为

$$\langle z(\mathbf{r}_0) z(\mathbf{r}'_0) \rangle = w^2 \exp(-|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0|^2 / \xi^2), \quad (3)$$

其中 w 为 $z(\mathbf{r}_0)$ 的均方根偏差, 称为表面的均方根粗糙度, ξ 为表面的横向相关长度, 代表表面散射颗粒的平均大小. 根据(3)式可知, 由(2)式产生的随机表面的高度函数是高斯相关的.

在对(2)式进行数值积分运算时, $\eta(\mathbf{u})$ 取在 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 内均匀分布的随机数, 以使其平方的均值为 1. 对任何的 \mathbf{r}_0 值, 积分区间以 \mathbf{r}_0 为中心, 大小取 ξ 的 40 倍, 以减小数值积分与 $[-\infty, \infty]$ 区间上的理论积分值误差. 我们对由(2)式进行数值积分得到的数值高度函数 $z(\mathbf{r}_0)$ 进行相关运算后, 用(3)式给出的高斯相关函数进行拟合, 拟合后得到的横向相关长度 ξ_{fit} 与设定的 ξ 值误差很小, 而 w_{fit} 与设定的 w 值有一定的差别. 因此在数值运算中对得到的数值高度函数求出其均方根偏差, 并以其对数值函数归一, 再乘以设定的 w 值, 以保证最终得到的高度数值分布与设定值之间的误差比较小.

图 2(a) 给出了模拟产生的一个一维表面样本的高度函数, 设定的参数为 $w = 0.5 \mu\text{m}$, $\xi = 3 \mu\text{m}$. 图 2(b) 为该表面样本的自相关函数曲线及其高斯拟合.

将表面高度函数引起的光学相位 $\phi(\mathbf{r}_0) = 4\pi z(\mathbf{r}_0)/\lambda$ 根据(1)式进行离散傅里叶变换, 便获得夫琅禾费面上的数字散斑场 $U(\mathbf{r})$, 取 $I = U(\mathbf{r}) U^*(\mathbf{r})$ 得到其光强. 图 3(a) 给出了一个模拟产生的二维表面样本, 设定的表面参数为 $w = 0.5 \mu\text{m}$, $\xi = 3 \mu\text{m}$, 表面区域

的大小为 $25.5 \mu\text{m} \times 25.5 \mu\text{m}$, 取 $f = 20 \text{ cm}$. 图 3(b) 为由该表面样本在夫琅禾费面上所产生的散斑图的模拟. 该散斑图的显示范围为 $2.5 \text{ cm} \times 2.5 \text{ cm}$, 其中心位于 r 面上的坐标原点处. 散斑图是把由计算得到的 256×256 点阵的光强数值分布用图像处理软件转换成灰度等级为 256 的图形进行输出和显示的.

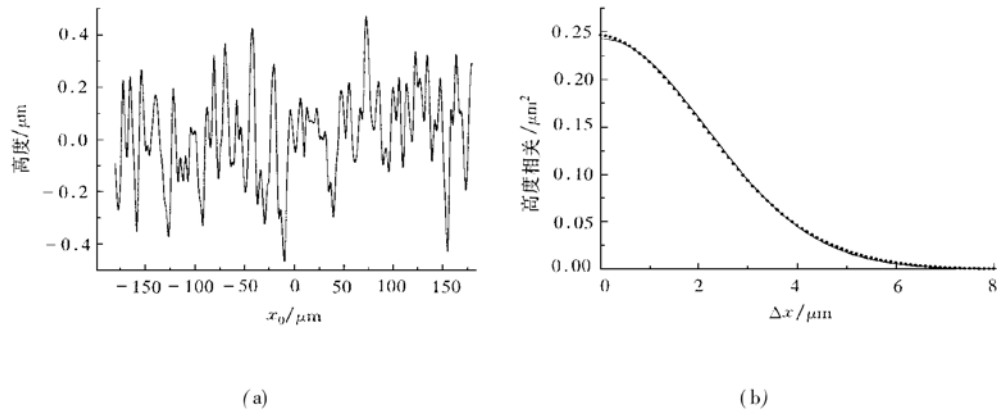


图 2 模拟产生的表面样本(a)及其自相关函数(b) •为产生的表面; —为高斯拟合: $w_{\text{fit}} = 0.4926$, $\xi_{\text{fit}} = 3.078$

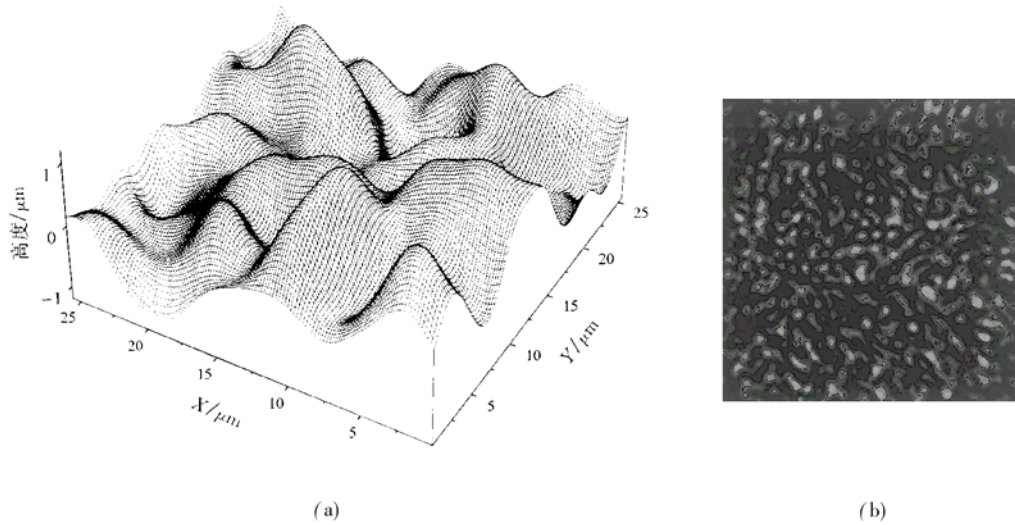


图 3 模拟产生二维表面高度分布(a)和模拟产生的散斑图(b)

3 散斑光强的概率密度分析

根据光散射理论, 经随机表面散射后光场的平均光强是以一定的轮廓分布的, 该轮廓是夫琅禾费面上或远场观察面上坐标 r 的函数, 这说明散斑场不是空间平稳的随机过程, 因此光强在某点处的概率密度函数应该通过对大量统计特性相同的表面样本在该点产生的散斑光强系综的分析获得.

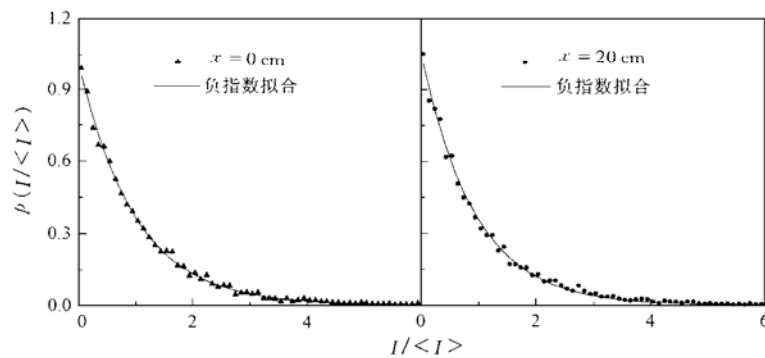
为了数值计算的快捷和方便, 本文在光强的概率分析中仅限于一维表面及其散斑场的

模拟产生. 对于一组设定的表面参数 w , ξ 和 L , 产生 10^4 个表面样本作为一个表面系综, 在对光强进行计算时仍取 $f = 20$ cm. 在夫琅禾费面上从中点 $x = 0$ 开始, 每间隔 1 cm 取一个点, 共取 21 个点, 离中心最远处为 $x_m = 20$ cm. 对每一个随机表面样本在这 21 个点产生的光强进行计算. 在每一点处得到 10^4 个光强值, 作为该点处的散斑光强系综, 对这一光强系综经直方图计数并进行处理后, 获得在该点处的散斑光强的概率密度函数的分布.

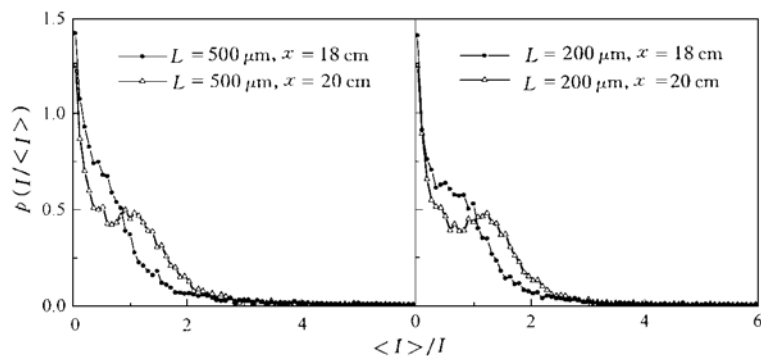
在表面和散斑场的模拟计算中, 表面的参数设定为: w 分别取 1.0, 0.5, 0.2 和 0.06 μm ; ξ 的取值分别为 3 和 5 μm ; 散射孔径的大小 L 分别取 500, 200, 50, 20, 5 和 3 μm . 下面就这些参数在各种组合下产生的光强系综的概率分布进行分析和总结.

3.1 当散射孔径较大时, 即 L 为 500, 200 和 50 μm 时

(1) 物体表面粗糙度 w 较大, 即取 1.0, 0.5 μm 时, 在夫琅禾费面上距中心点 20 cm 的范围内各点光强的概率密度函数呈很好的负指数下降关系, 说明在所计算的范围内的散斑场为高斯散斑场. 图 4(a) 给出了 $w = 0.5 \mu\text{m}$, $\xi = 3.0 \mu\text{m}$, $L = 200 \mu\text{m}$ 时 r 平面的中心点处和离中心点 20 cm 处的散斑光强概率分布及其负指数(即高斯散斑)拟合.



(a)



(b)

图 4 散射孔径较大时的光强概率分布 (a) 为 $w = 0.5 \mu\text{m}$, $\xi = 3.0 \mu\text{m}$; (b) 为 $w = 0.2 \mu\text{m}$, $\xi = 3.0 \mu\text{m}$

(2) w 减小至 $0.2 \mu\text{m}$ 时, 在 18 cm 以外的区域散斑场开始偏离高斯概率分布. 图 4 (b) 给出了 $L = 500 \mu\text{m}$ 和 $L = 200 \mu\text{m}$, $\xi_s = 3.0 \mu\text{m}$ 时 18 和 20 cm 处光强的高斯概率密度函数.

(3) 当表面的粗糙度 w 继续减小至 $0.06 \mu\text{m}$ 时, 经表面散射后的光波有镜面反射的成分, 并在夫琅禾费面上会聚成中心亮点, 在中心点形成部分显现的散斑场^[6], 图 5 给出了 $\xi_s = 3.0 \mu\text{m}$ 和 L 分别等于 $500, 200, 50, 30 \mu\text{m}$ 时中心点的光强概率密度分布. 需指出的是, 部分显现散斑场的概率密度峰在散射孔径较小时, 其上升沿很陡, 随着散射孔径的增加, 上升沿变得平滑, 概率峰变得中心对称.

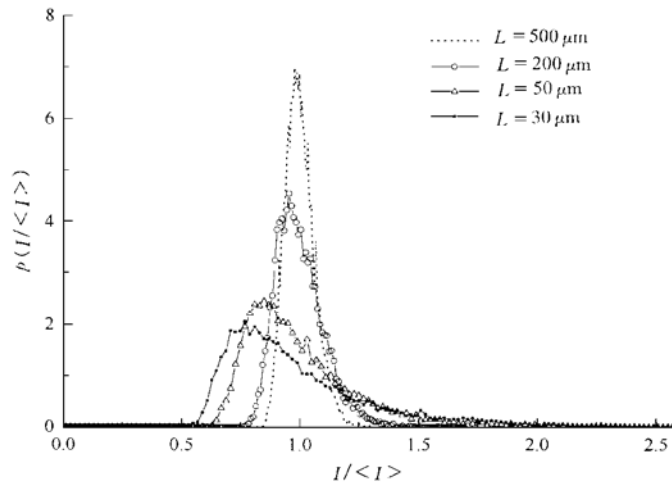


图 5 $w = 0.06 \mu\text{m}$ 时中心点光强的概率分布

(4) 图 6 给出了 $w = 0.06 \mu\text{m}$, $\xi_s = 3.0 \mu\text{m}$, $L = 50 \mu\text{m}$ 的情况下夫琅禾费面上除中心亮点以外的其它各点处光强的概率密度分布. 我们看到, 在靠近中心点附近各点 ($x = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ cm}$) 处, 光强的概率仍然呈负指数分布, 即这些点处的散斑场为高斯散斑, 我们称这一区域为高斯散斑区. 在 $x = 6 \text{ cm}$ 至 $x = 8 \text{ cm}$ 范围内, 光强概率逐渐偏离负指数分布, 但偏离不是很大. 该范围是从高斯散斑向非高斯散斑的过渡区. 从 $x = 9 \text{ cm}$ 开始, 到我们所计算的最大 $x (= 20 \text{ cm})$ 的范围内, 光强概率呈明显的非负指数分布, 说明这一区域为非高斯散斑区. 把这一现象推广到二维情形, 夫琅禾费面上散斑场的高斯与非高斯特性在空间区域上的分布可用图 7 来示意.

更多的计算结果表明, 在以上的参数设定中, 如果只增大散射孔径 L , 则高斯散斑区域略有增大, 但过渡区减小. 在 $L = 200 \mu\text{m}$ 时, $x = 7-8 \text{ cm}$ 的范围为过渡区; 当 $L = 500 \mu\text{m}$ 时, 只有在 8 cm 处呈现过渡区的概率分布特征, 即散斑场在 $x = 8 \text{ cm}$ 附近处, 随着离中心点距离的增加, 很快由高斯散斑变为非高斯散斑. 而当 $L = 20 \mu\text{m}$ 时, 过渡区增大至 $5-9 \text{ cm}$ 的范围. ξ_s 增大时, 高斯散斑区的范围减小, 但过渡区范围的大小没有明显的变化. 如 $\xi_s = 5 \mu\text{m}$, $L = 50 \mu\text{m}$ 时, 高斯散斑区在距中心点 2 cm 的范围内, $x = 3-5 \text{ cm}$ 范围为过渡区, $x \geq 6 \text{ cm}$ 的范围为非高斯散斑区.

由图 6 可以看出, 非高斯散斑区内的光强概率分布是从光强为 0 处的极大值降至一凹陷区或平台区域, 再升至一极大值, 后降为 0.

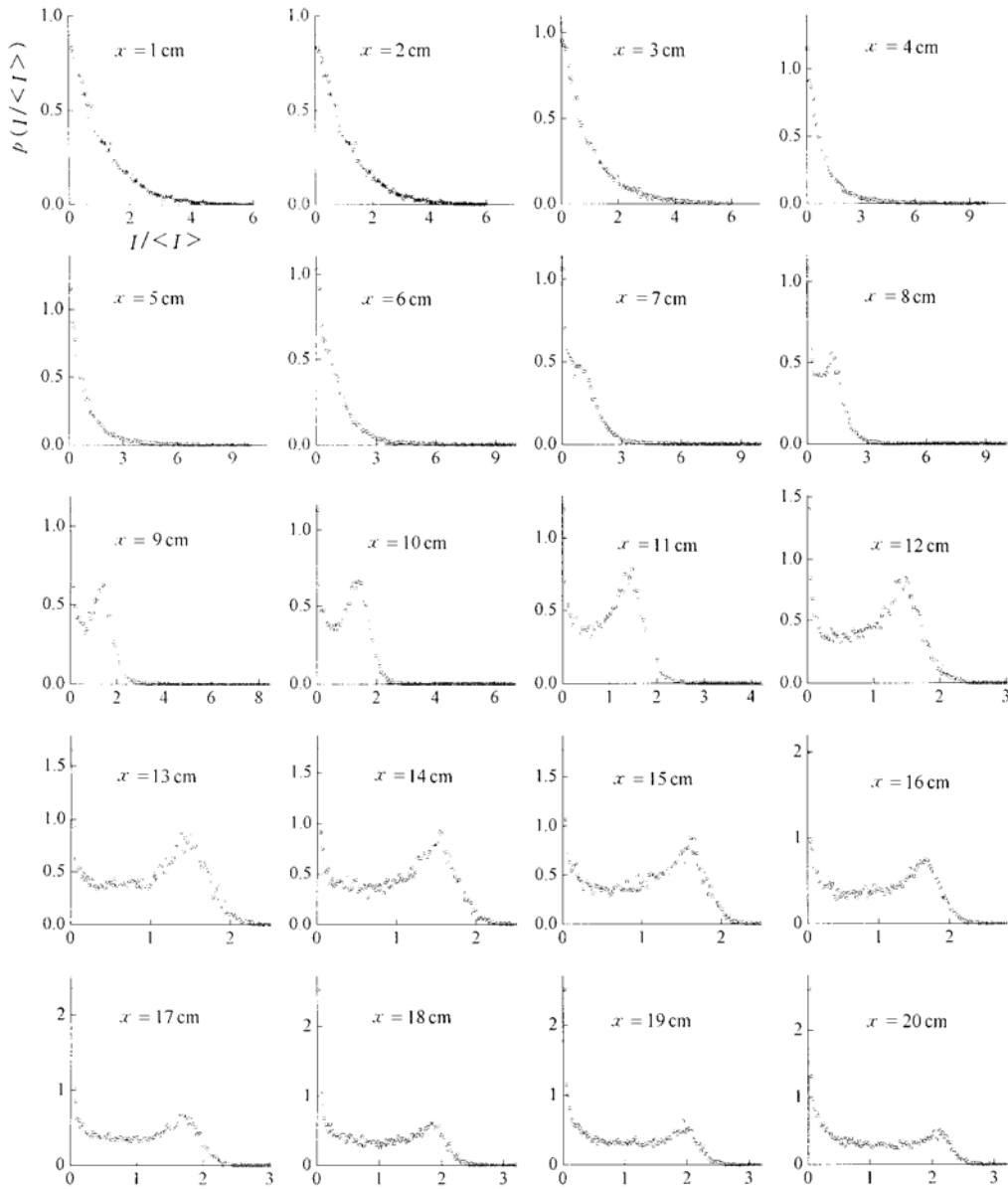


图 6 $w = 0.06 \mu\text{m}$, $\xi = 3.0 \mu\text{m}$, $L = 50 \mu\text{m}$ 时各点的光强概率分布

(5) 当 $w \geq 0.2 \mu\text{m}$ 时, 对各种尺寸的散射孔径和不同平均散射颗粒大小的表面样本, 高斯散斑区也是限定在一定中心区域范围内, 且 w 越大, 这一区域越大, 但该范围以外的区域(直至 $x \leq 20 \text{ cm}$) 与 $w = 0.06 \mu\text{m}$ 时过渡区内的概率分布相近, 而不出现非高斯散斑区中明显的凹陷区和第二个极值点. 可以设想非高斯散斑区将出现在夫琅禾费面上

$x > 20 \text{ cm}$ 的远轴区域.

3.2 散射表面样本仅含有少数散射颗粒时

在前述的模拟计算中 $L = 20 \mu\text{m}$ 时, 散射表面所包含的平均粒子数 N 已经很少($\xi = 3 \mu\text{m}$ 时, $N \approx 7$; $\xi = 5 \mu\text{m}$ 时, $N = 4$), 我们取更为典型的情况($N = 1$ 时)进行了模拟计算分析: $\xi = 3 \mu\text{m}, L = 3 \mu\text{m}$ 和 $\xi = 5 \mu\text{m}, L = 5 \mu\text{m}$.

(1) $w \geq 0.5 \mu\text{m}$ 时, 两组 ξ 和 L 值的表面散射, 在距中心 5 cm 以内范围内的散斑场仍然能够较好地满足高斯散斑场的概率分布. 图 8 给出了 $w = 1.0 \mu\text{m}$ 时两组表面在中心点 $x = 0 \text{ cm}$ 和 $x = 3 \text{ cm}$ 处形成的散斑光强概率密度分布及其负指数拟合.

这表明, 即使散射颗粒数极少, 但只要散射表面的起伏引起的光波相位的随机变化足够大, 在夫琅禾费面上仍然可以形成高斯散斑场(至少在中心附近的区域如此).

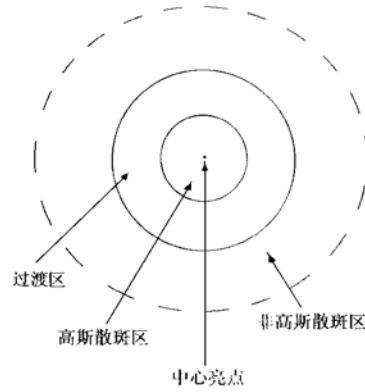


图 7 散斑光强概率的空间分布

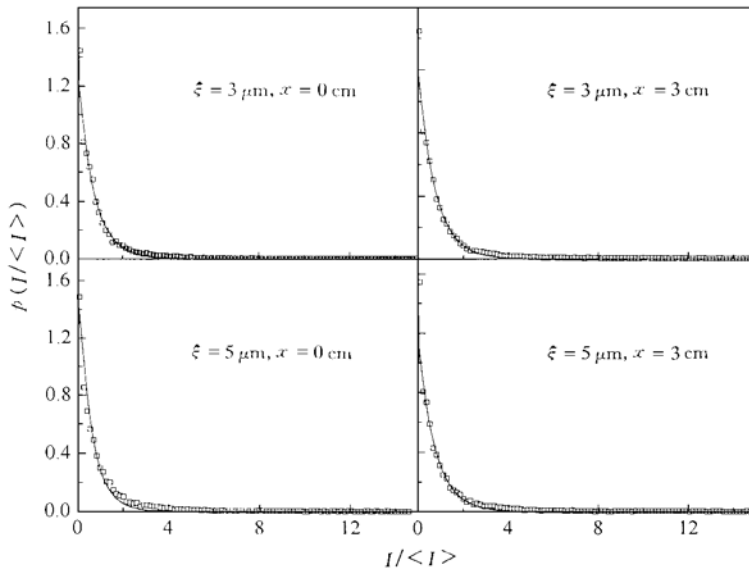


图 8 $w = 1.0 \mu\text{m}$ 时, 散射表面包含的散射颗粒数 $N = 1$ 的光强概率分布

(2) 当 $w = 0.06 \mu\text{m}$ 时, 平均包含单个散射颗粒的随机表面系综所形成的散斑场系综, 在中心点附近区域的光强概率分布比较奇特, 图 9 给出了 $L = \xi = 5 \mu\text{m}$ 时在 $x = 0, 1, 2, 3 \text{ cm}$ 处的概率分布, 它们共同的特点是概率分布有一个从某一值突然降至 0 的截断点. 而在 $x = 0 \text{ cm}$ 处散斑的概率分布在某一点处突然从 0 上升后, 又在概率密度函数的极大值处突然截断. 在 $x > 4 \text{ cm}$ 的其它点处, 光强的概率密度分布与前述的非高斯散斑区的分布相同. 因此, 此时整个散斑场都是非高斯的.

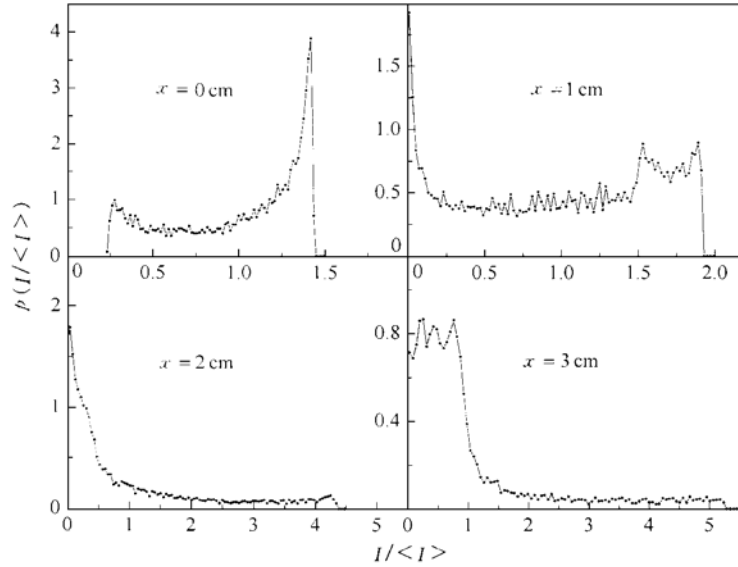


图9 $w = 0.06 \mu\text{m}$ 时, 散射表面包含的散射颗粒数 $N = 1$ 的光强概率分布

4 结 论

本文在模拟产生高斯相关随机表面的基础上, 实现了模拟产生这类表面所产生的散斑场, 并对散斑场系综的光强概率分布进行了分析. 散斑场的许多特性, 如由高斯散斑区向非高斯散斑区的过渡、非高斯散斑场的概率分布函数、表面的少数散射颗粒产生高斯散斑和非高斯散斑的机理等问题都有待于散斑理论的进一步解释.

- [1] J. M. Huntly, *Appl. Opt.*, **28**(1989), 4316.
- [2] M. Harris, *Contemporary Phys.*, **36**(1995), 215.
- [3] N. Shvartsman, I. Freund, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 1008.
- [4] J. C. Dainty, *Laser Speckle and Related Phenomena*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1984), ch. 2.
- [5] B. M. Levine, J. C. Dainty, *Opt. Commun.*, **45**(1983), 252.
- [6] J. Uozumi, T. Asakura, *J. Opt.*, **12**(1981), 177.
- [7] E. Jakeman, *Opt. Eng.*, **23**(1984), 453.
- [8] E. Jakeman, R. A. Tough, *J. Opt. Soc. Am.*, **A4**(1987), 1746.
- [9] E. Jakeman, *Advances in Phys.*, **37**(1988), 471.

**THE COMPUTATIONAL SIMULATIONS OF THE GAUSSIAN
CORRELATION RANDOM SURFACE AND ITS LIGHT-
SCATTERING SPECKLE FIELD AND THE ANALYSIS
OF THE INTENSITY PROBABILITY DENSITY**

CHENG CHUAN-FU QI DONG-PING LIU DE-LI TENG SHU-YUN

(Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan 250014)

(Received 28 April 1999)

ABSTRACT

The method for the simulational generation of Gaussian correlation random surfaces is proposed, and the computational simulation of the speckle field produced by this kind of surfaces on the Fraunhofer plane is performed. 10000 speckle field samples at each spatial point produced by 10000 surface samples are taken as an ensemble and the probability density distributions of such speckle intensity ensembles are examined. We find that the Gaussian and non-Gaussian characteristics of the speckle fields are space-dependent, and that Gaussian speckles can also be formed when the scattering surfaces contains only a few scatterers.

PACC: 4220; 4230