

两原子双光子 Jaynes-Cummings 模型的腔场谱*

高云峰

(聊城师范学院教育工程系, 聊城 252059)

冯 健 宋同强

(聊城师范学院通信工程系, 聊城 252059)

(1998 年 11 月 5 日收到; 1999 年 1 月 8 日收到修改稿)

研究了两个偶极相互作用二能级原子与高 Q 腔场双光子相互作用的腔场谱. 给出了初始光场为 Fock 态、相干态和压缩真空态时的计算结果并解释了谱结构的形成, 分析了原子间的偶极相互作用和初态的交换对称性对腔场谱的影响. 发现当两原子均处于激发态时, 腔场谱只在初始光场为真空态时出现 4 峰结构, 而在其它初始场时, 都呈现出奇数峰, 这与相应的辐射谱偶数峰的结构明显不同. 而两原子只有一个处于激发态时, 腔场谱结构主要由原子初态是否具有交换对称性决定.

PACC: 4250; 3280

1 引 言

描写单个二能级原子与量子光场相互作用的 Jaynes-Cummings(J-C) 模型^[1]是量子光学中最重要的研究系统之一, 该模型的理论 and 实验研究加深了对光与原子相互作用动力学特性的理解. 双光子微波激光器的成功运转^[2], 极大地推动了有关双光子过程的理论和实验研究. 一些推广的双光子 J-C 模型相继提出^[3-6]. 人们已深入研究了单模及双模腔场中单、双原子的辐射谱^[7-9], 发现了包括辐射谱真空场 Rabi 劈裂在内的一系列重要的非经典现象.

近几年来, 腔场谱(cavity field spectra) 又成为研究的热点. 这是因为在微波波段直接测量腔场谱非常困难, 腔场的量子性质要通过对原子状态的测量来推断, 因而研究腔内原子的辐射谱显现出重要意义. 而在光波波段腔场谱可以利用光子计数器直接测量, 尽管测量会引起腔场的损耗, 但在损耗很小时测量结果将十分接近无损腔的谱^[10]. 双光子激光器的出现^[11], 不仅使双光子过程腔场谱的直接测量成为可能, 也使双光子过程腔场谱的理论研究逐渐得到了重视. 文献[12, 13] 分别研究了具有 Stark 效应的单原子双光子 J-C 模型和单原子非简并双光子 J-C 模型的腔场谱. 本文将对有偶极相互作用的两原子双光子 J-C 模型^[14]的腔场谱进行研究, 并与该模型的辐射谱性质进行比较. 需要指出的是, 由

* 山东省自然科学基金(批准号: Y98A03006) 资助的课题.

于腔场谱描述的是腔内光场的谱特性, 而辐射谱描述的是腔内原子辐射的谱特性, 因此, 两者的物理意义、计算公式和谱结构均不相同.

2 模型与理论推导

两个二能级原子和理想无损腔组成的系统, 当两原子距离较近时, 两原子与光场的耦合常数是相同的, 但这时需要计及两原子间的偶极相互作用, 在旋波近似条件下, 系统的哈密顿量为(取 $\hbar=1$)

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_a \sum_{i=1}^2 \sigma_{z,i} + g \sum_{i=1}^2 (a^2 \sigma_i^\dagger + a^{+2} \sigma_i) + g_a (\sigma_1^\dagger \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \sigma_1), \quad (1)$$

其中 a^\dagger, a 分别为光子的产生和湮没算符; $\sigma_i^\dagger, \sigma_i$ 和 $\sigma_{z,i}$ 为第 i 个原子的赝自旋算符; g 为原子与腔场的耦合常数, g_a 为原子间偶极相互作用的耦合常数.

系统的对称性基矢可取为

$$\begin{aligned} |\Psi_1^n\rangle &= |+, +, n\rangle, \\ |\Psi_2^n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -, n+2\rangle + |-, +, n+2\rangle), \\ |\Psi_3^n\rangle &= |-, -, n+4\rangle, \\ |\Psi_4^n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -, n+2\rangle - |-, +, n+2\rangle). \end{aligned} \quad (2)$$

上述表达式中的 3 个量子数分别表示两原子所处的能级和腔场的光子数, 其中 $\Psi_1^n, \Psi_2^n, \Psi_3^n$ 为原子交换对称态, Ψ_4^n 为交换反对称态, Ψ_4^n 本身又是 H 的本征态, 本征值为 $E_4^n = \omega_0(n+2) - \delta$. 当两原子初态全为激发态时, Ψ_4^n 对腔场谱无贡献. 我们只需在 3 个对称基矢组成的子空间中求解 H 的本征方程.

(1) 式的本征方程为

$$H |\Phi_j^n\rangle = E_j^n |\Phi_j^n\rangle \quad (j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$|\Phi_j^n\rangle = \sum_{m=1}^3 C_{jm}^n |\Psi_m^n\rangle \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

在共振相互作用条件下 ($\omega_a = 2\omega_0$), 利用标准方法可求出本征值和本征态

$$E_j^n = \omega_0(n+2) + \lambda_j^n g \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5a)$$

$$\lambda_j^n = \left[0, \frac{1}{2}(\delta + \sqrt{\delta^2 + 8M_n}), \frac{1}{2}(\delta - \sqrt{\delta^2 + 8M_n}) \right], \quad (5b)$$

$$C_{jm}^n = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_2(n)}{\sqrt{M_n}} & 0 & -\frac{\Omega_1(n)}{\sqrt{M_n}} \\ \frac{\sqrt{2}\Omega_1(n)}{\sqrt{\lambda_2^n + 2M_n}} & \frac{\lambda_2^n}{\sqrt{\lambda_2^n + 2M_n}} & \frac{\sqrt{2}\Omega_2(n)}{\sqrt{\lambda_2^n + 2M_n}} \\ \frac{\sqrt{2}\Omega_1(n)}{\sqrt{\lambda_3^n + 2M_n}} & \frac{\lambda_3^n}{\sqrt{\lambda_3^n + 2M_n}} & \frac{\sqrt{2}\Omega_2(n)}{\sqrt{\lambda_3^n + 2M_n}} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

在(5), (6)式中,

$$\begin{aligned}\delta &= g_a/g, \\ M_n &= \Omega_1^2(n) + \Omega_2^2(n), \\ \Omega_1(n) &= [(n+1)(n+2)J]^{1/2}, \\ \Omega_2(n) &= [(n+3)(n+4)J]^{1/2}.\end{aligned}$$

按照 Eberly 物理谱^[15]的定义, 该系统的腔场谱可按式计算^[12, 13]:

$$S(\omega) = 2\Gamma \int_0^T dt' e^{i(\omega - \Gamma)(T-t')} \int_0^T dt e^{-i(\omega + \Gamma)(T-t)} \langle \Phi(0) | a^\dagger(t') a(t) | \Phi(0) \rangle, \quad (7)$$

其中 Γ 为谱仪的带宽, T 为测量时间, $|\Phi(0)\rangle$ 为系统的初态. 若初始时刻两原子均处于激发态而光场处于任意态, 即

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} q_n |+, +, n\rangle,$$

经过繁杂的运算, 可以得到

$$S(\omega) = 2\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} P(n) F_n(\omega), \quad (8a)$$

$$F_n(\omega) = \sum_{j=1}^3 \left| \sum_{l=1}^3 Z_{jl}^n G_{jl}^n \right|^2, \quad (8b)$$

$$Z_{jl}^n = \frac{e^{i(\omega - \omega_0) - g(\lambda_j^n - \lambda_l^{n-1})J} - e^{-\Gamma T}}{\Gamma + i(\omega - \omega_0) - g(\lambda_j^n - \lambda_l^{n-1})J}, \quad (8c)$$

$$G_{jl}^n = \sum_{k=1}^3 C_{j1}^n C_{jk}^n C_{lk}^{n-1} b_k^n, \quad (8d)$$

$$b_k^n = \sqrt{n + 2(k-1)} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (8e)$$

式中 $P(n) = q_n^* q_n$ 为初态光场的光子数分布.

利用(5), (6), (8)三式, 可以计算腔场谱.

3 结果与讨论

3.1 两原子均处于高能级时的腔场谱

1) 初始光场为 Fock 态

当光场的初态为 Fock 态时, 腔场谱的计算结果由图 1 给出. 图 1(a) 为不考虑原子之间的偶极相互作用时的谱结构, 真空场的 Rabi 峰为 4 个, 分别位于 $\omega_0 \pm 1.83g$ 和 $\omega_0 \pm 2.46g$ 处. 当 $n \neq 0$ 时, 腔场谱为 5 峰结构. 随着 n 的增大, 靠近中心的 3 个峰高度迅速增大, 并基本定位于 ω_0 和 $\omega_0 \pm 2g$ 处, 约位于 $\omega_0 \pm (2n+3)g$ 处的两个峰随 n 的增大逐渐远离中心, 峰高也迅速变小而消失. 当 $n \gg 1$ 时, 腔场谱为频率固定的 3 峰结构, 两边峰的高度与中心峰高度之比约为 1:2. 与同一模型的辐射谱^[14]性质相比较, 可以看到两者有明显的区别, 腔场谱峰的数目随 n 增加按 4 → 5 → 3 的规律变化, 而辐射谱按 6 → 8 → 6 变

化. 在辐射谱中, 没有与经典共振荧光频率 ω_0 相对应的谱线; 而在腔场谱中, 与共振频率 ω_0 相对应的谱线强度总是最大 ($n=0$ 时除外). 但是, 对于单原子双光子 J-C 模型的辐射谱和腔场谱而言, 这种差别并不存在^[12].

腔场谱的上述性质也可由 $S(\omega)$ 的表达式分析得出, 由 (8a) 和 (8b) 式可知, 在初始光场为 Fock 态时, 腔场谱的峰位和相对峰高分别是由 $\omega_{jl} \equiv (\lambda_j^n - \lambda_l^{n-1})g$ 和 G_{jl}^n 决定的, j, l 分别可取 1, 2, 3, 腔场谱中最多将可以出现 9 个峰, 但除了与 $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{22}, \omega_{33}$ 5 个频率对应的 G_{jl}^n 外, 其他 G_{jl}^n 总是约为零. 当 $n \gg 1$ 时, G_{12}^n 和 G_{13}^n 的值也变得很小, 故这时只能看到 3 个峰.

计入两原子之间的偶极相互作用时, 腔场谱在高度和峰位两方面的对称性都受到破坏. 当 $n=0$ 时, 这种非对称性十分明显; 当 n 逐渐增大时, 原子之间偶极相互作用对腔场的影响就相对变弱了; 当 $n \gg 1$ 时, δ 的存在对峰位已无影响, 但仍可看到左峰高于右峰 (图 1(b)). 这是因为, 原子间的偶极相互作用都比较弱^[16-19], δ 的取值一般都在 0-1 之间, 所以无论从决定峰位的表达式 ω_{jl} 还是从决定峰高的表达式 G_{jl}^n 都可以看出, 只有在光子数比较小时, 偶极相互作用的影响才比较明显.

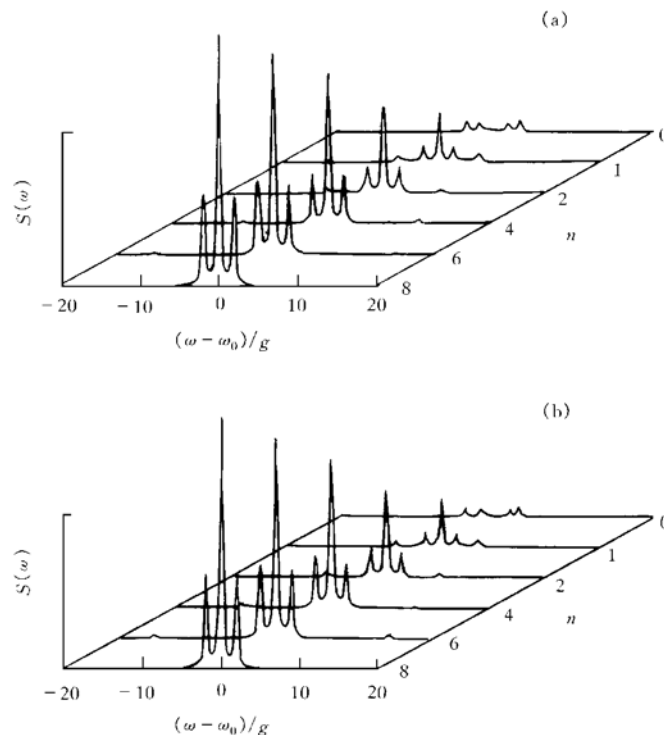


图 1 两原子都处于激发态, 光场处于不同 Fock 态时的腔场谱 (a) $\delta=0$;
(b) $\delta=1, \Gamma=0.2g, T=20/g$

2) 初始光场为相干态

当初始场为相干态时, 腔场谱的计算结果如图 2 所示. 当平均光子数 \bar{n} 为 0 时, 其谱

结构与初始光场为 Fock 态时相同, 仍为 4 峰结构, 当 \bar{n} 为 1 时, 腔场谱为 7 峰, \bar{n} 在 1—2 之间时, 可看到 9 个峰, 而当 $\bar{n} \gg 1$ 时, 谱结构又与图 1(a) 相似, 成为峰位与 \bar{n} 无关的 3 峰结构.

以上谱结构也可以通过分析(8)式得到解释. 在 \bar{n} 较小时, 相干态主要由 n 较小的几个 Fock 态叠加而成. 虽然每一 Fock 态对应的腔场谱都是 5 峰, 但中心 3 峰和两边峰对腔场谱的贡献不同. 中心 3 峰的频率基本与 n 无关, 多个高度较小的峰可以在原峰位叠加上 3 个高度较大的峰. 而不同 Fock 态对应的两边峰, 峰位与 n 有关. n 相邻的两个 Fock 态的边峰频率差($2g$)远大于谱仪带宽 $\Gamma(0.2g)$, 不同 Fock 态腔场谱叠加时峰位不重合, 故光子数为 $1-n$ 的 Fock 态腔场谱将叠加上 $2n$ 个峰, 总计出现 $2n+3$ 个峰. 但当 \bar{n} 较大时, n 较小的 Fock 态对应的 $P(n)$ 很小, n 较大的 Fock 态的外侧两峰本身又已很低, 叠加结果中 $2n$ 个小峰全都无法看到, 所以叠加结果中只能出现中心的 3 个峰.

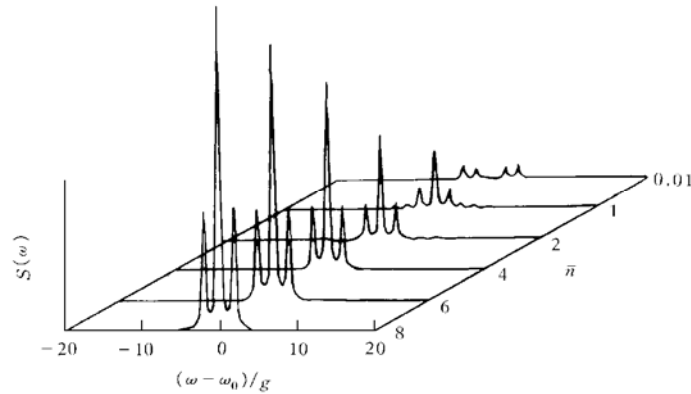


图 2 光场处于相干态时的腔场谱 $\delta=0, \Gamma=0.2g, T=20/g$

两原子间的偶极相互作用对叠加态腔场谱的影响, 也是在初始光场较弱时破坏谱结构的对称性, 与初始光场为 Fock 态时的结果十分相似.

3) 初始光场为压缩真空态

当初始光场为压缩真空态时, 腔场谱的计算结果示于图 3. 这时, 除平均光子数 \bar{n} 约为零时其谱结构仍为 4 峰外, 其他场强下基本都是 5 峰, 且峰位与 \bar{n} 无关. 只是在 \bar{n} 较大

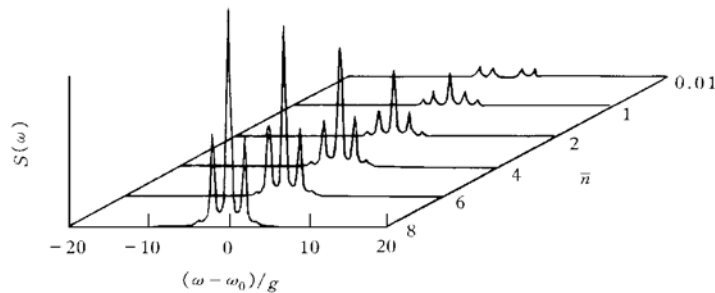


图 3 光场处于压缩真空态时的腔场谱 $\delta=0, \Gamma=0.2g, T=20/g$

时, 外边两峰的高度相对变小而与内侧的峰连在一起. 当初始光场很强时, 腔场谱也是呈现出简单的对称 3 峰结构.

压缩真空态是 n 为偶数的 Fock 态的叠加, 其腔场谱的 5 峰是真空态的两边峰和其他 Fock 态腔场谱中心 3 峰叠加的结果. 由于其中不包括 $n = 1, 3$ 的两个 Fock 态, 所以即使在平均光场较弱时, 其腔场谱的叠加结果中也无法出现多于 5 峰的结构.

3.2 两原子处于不同能级时的腔场谱

当两个原子都处于激发态时, 波函数是交换对称的, 为研究原子状态是否具有交换对称性对腔场谱的影响, 我们选取两个原子分别处于不同能级而光场处于 Fock 态进行讨论.

1) 初始态为原子交换对称态

这时系统态矢量可取为

$$|\Phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -, n\rangle + |-, +, n\rangle).$$

分析(5), (6)和(8)式可知, 要利用该三式计算腔场谱, 只需把其中的 n 替换成 $n-2$, 把 G_{j1}^n 表达式中的 C_{j1}^{n*} 换成 C_{j2}^{n*} , 并规定 $n < 0$ 时 $b_1^n = 0$ 即可.

图 4 是系统中两个原子分别处于不同能级且初态为交换对称态时的腔场谱. 在两原

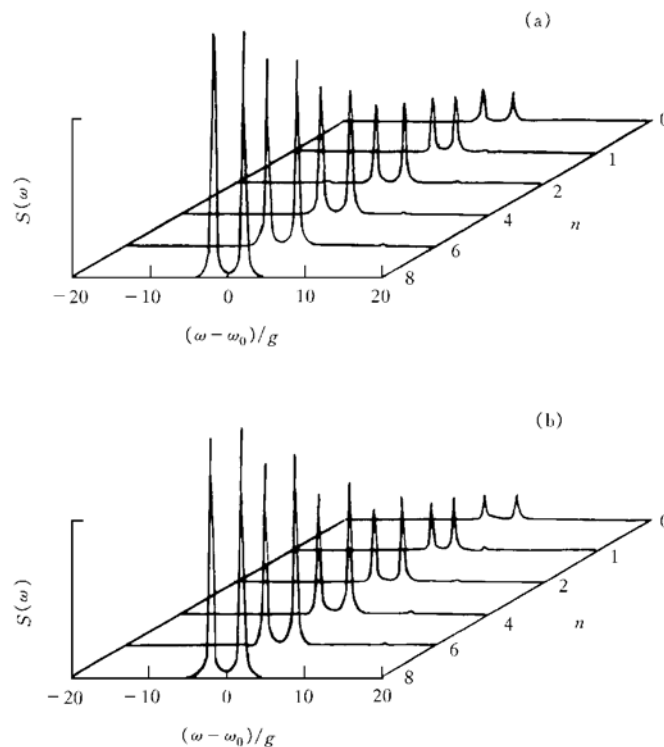


图 4 两原子分别处于不同能级且初态为交换对称态、光场处于不同 Fock 态时的腔场谱 (a) $\delta = 0$; (b) $\delta = 1$. $\Gamma = 0.2g$, $T = 20/g$

子偶极相互作用为零时, 腔场谱呈现对称的双峰结构, 其峰高随初态光子数的增加而增大, 但峰位基本固定不变(图 4(a)), 这与单原子双光子 J-C 模型的腔场谱^[12]是一样的. 当两原子之间的偶极耦合常数和原子与光场的耦合常数相等($\delta=1$)时, 腔场谱中频率较高一峰的强度高于频率较低的峰, 即使是 n 比较大时, 这种高度差别仍可明显看到, 但 δ 是否为零对峰位基本没有影响(图 4(b)), 这种偶极相互作用造成的腔场谱非对称性和单原子双光子 J-C 模型中 Stark 效应的效果^[12]明显不同, 后者是频率较低的谱线强度较大.

从 $S(\omega)$ 的表达式分析可知, 由于系统的初态为 $|\Psi_2\rangle$, 而 $C_{12}^n=0$, 故系统演化过程中不会有能量本征态 $|\Phi_l\rangle$ 叠加其中, 系统的状态跃迁 $E_j^n \rightarrow E_l^{n-1}$ 只有 $j, l=2, 3$ 四种, 而通过对初始光场为 Fock 态讨论已经知道, 这 4 个峰中只有在 ω_{22} 和 $\omega_{33}(\approx \pm 2g)$ 处的 2 个峰可以看到.

2) 系统的初态为非对称态

取原子 1 处于激发态而原子 2 处于基态, 光场处于 Fock 态, 即

$$|\Phi(0)\rangle = |+, -, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_2\rangle + |\Psi_4\rangle).$$

图 5 给出了系统在这种初态下的腔场谱, $\delta=0$ 时, 腔场谱是对称的 3 峰结构, 3 峰的位置固定, 两边峰的高度总是约等于中心峰高的 1/2. $\delta=1$ 时, 两边峰中依然是右峰高于左峰.

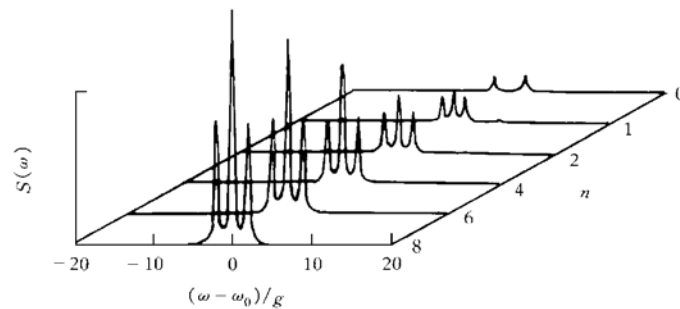


图 5 原子 1 处于激发态原子 2 处于基态, 光场处于不同 Fock 态时的腔场谱
 $\delta=0, \Gamma=0.2g, T=20/g$

两原子处于交换非对称态的腔场谱比对称态的腔场谱多出一个频率为 ω_0 的峰. 犹如在图 4 中的各条曲线的中间加上了一个高度约为原峰两倍的中心峰. 这是由于在初态中混入了反对称态的结果, 系统在反对称态 $|\Psi_4\rangle$ 和 $|\Psi_4^{-1}\rangle$ 之间的跃迁产生一个频率为 ω_0 的峰.

4 结 论

处于激发态的两原子与高 Q 腔相互作用双光子过程的腔场谱, 真空场的 Rabi 峰为 4 个, 强场时为 3 峰结构. 在弱场情况下, 谱结构与光子数分布有关, 一般为 5 峰结构, 有时

可能出现 7 峰或 9 峰. 这种谱结构与同一模型的辐射谱有明显的不同, 腔场谱中最强的谱线是与经典共振荧光频率 ω_0 相对应的谱线($n = 0$ 时除外), 而辐射谱中并没有这条谱线. 如果初始状态中两个原子只有一个在激发态, 而原子态具有交换对称性时, 腔场谱为简单的双峰结构, 这与腔中只有一个激发态原子时相同, 当两原子处于交换非对称态时的腔场谱为 3 峰结构, 处于基态的原子对腔场谱也有贡献. 原子之间偶极相互作用的存在会使谱结构的对称性受到破坏, 但这种影响只有在真空场和弱场条件下才比较明显.

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
- [2] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 1899.
- [3] 张纪岳·徐明, 物理学报, **42**(1993), 1205 [Zhang Ji yue, Xu Ming, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 1205(in Chinese)].
- [4] M. M. Ashraf, M. S. K. Razmi, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 8121.
- [5] Zher-fei Luo, Zhi-zhan Xu, Lei Xu, Zhi-ming Zhang, *J. Phys. B*, **26**(1993), 1301.
- [6] Lir-sheng He, Xun-li Feng, *Phys. Rev.*, **A49**(1994), 4009.
- [7] 冯健·宋同强·王文正·许敬之, 物理学报, **43**(1994), 1966 [Feng Jian, Song Tong-qiang, Wang Wen-zheng, Xu Jing-zhi, *Acta Physica Sinica*, **43**(1994), 1966(in Chinese)].
- [8] 冯健·宋同强·高云峰, 光子学报, **25**(1996), 976 [Feng Jian, Song Tong-qiang, Gao Yun-feng, *Acta Photonica Sinica*, **25**(1996), 976(in Chinese)].
- [9] 高云峰·宋同强·冯健, 原子与分子物理学报, **14**(1997), 323 [Gao Yun-feng, Song Tong-qiang, Feng Jian, *Chinese Journal of Atomic and Molecular Physics*, **14**(1997), 323(in Chinese)].
- [10] M. M. Ashraf, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 741.
- [11] Thomas Mossberg, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 464.
- [12] Tahira Nasreen, M. S. K. Razmi, *J. Opt. Soc. Am.*, **B10**(1993), 1292.
- [13] M. M. Ashraf, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 5116.
- [14] Zher-fei Luo, Zhi-zhan Xu, Lei Xu, *Commun. Theor. Phys.*, **19**(1993), 385.
- [15] J. H. Eberly, K. Wodkiewicz, *J. Opt. Soc. Am.*, **67**(1977), 1252.
- [16] A. Joshi, S. V. Lawande, S. V. Lawand, *J. Mod. Opt.*, **38**(1991), 1407.
- [17] G. S. Agaral, *Opt. Commun.*, **36**(1981), 285.
- [18] R. D. Griffin, S. M. Harris, *Phys. Rev.*, **A25**(1982), 1528.
- [19] Z. Ficek, B. C. Sanders, *Quantum Opt.*, **2**(1990), 269.

CAVITY FIELD SPECTRA OF THE TWO-ATOM TWO-PHOTON JAYNES-CUMMINGS MODEL*

GAO YUN-FENG

(*Department of Education Engineering, Liaocheng Teacher's College, Liaocheng 252059*)

FENG JIAN SONG TONG-QIANG

(*Department of Communication Engineering, Liaocheng Teacher's College, Liaocheng 252059*)

(Received 5 November 1998; revised manuscript received 8 January 1999)

ABSTRACT

The cavity field spectra for a pair of coupled two-level atoms with single mode of the radiation in an ideal cavity via two-photon resonant transition processes are investigated. The results for the initial fields in pure number state, coherent state or squeezed vacuum state are presented and discussed. The effects of dipole-dipole interaction of atoms and exchange symmetry of the initial state of atoms on the cavity field spectra are analyzed. It is found that the odd peaks structure of the cavity field spectra appears for various initial fields except vacuum state with the two atoms in the excited states. This is in contrast with the even peaks of the emission spectra of the Sham model. When only one of the two atoms is in the excited state, the exchange symmetry of the atoms plays a decisive role in the structure of the cavity field spectra.

PACC: 4250; 3280

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y98A03006).