

双曲正弦高斯光束的 M^2 因子和相干模分解*

张 彬 马 虹 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(1999 年 1 月 17 日收到)

基于二阶矩方法和正交模系展开法, 推导出双曲正弦高斯光束的光束传输 M^2 因子和模相干系数的解析表达式, 从而建立了双曲正弦高斯光束的相干模分解理论. 提出了一种在实验室中产生双曲正弦高斯光束的简单方法.

PACC: 4255; 4200

1 引 言

激光束的描述、光束传输不变量和特征参数, 以及光束变换和控制是长期以来激光物理学家感兴趣的研究领域之一. 近年来, 因若干重要实际应用的需求牵引, 该领域的研究工作十分活跃. 有代表性的工作为 Siegman 的 M^2 因子(光束传输因子)理论^[1]和 Nemens 的三维非高斯扭曲光束的变换理论^[2], Weber^[3], Du^[4-6]等对 M^2 因子理论的推广和对模相关和模相干系数的研究结果等. 最近, Casperson 等人从 Helmholtz 方程出发, 在较为一般情况下, 推导出了厄米-正弦类-高斯(HSG)解的存在, 并提出了用正弦类高斯光阑和光腔产生 HSG 光束的实验方法^[7-9]. 本文的目的是以双曲正弦高斯(ShG)光束为 HSG 光束的一个典型例, 研究其物理特性. 基于 M^2 因子的一般理论, 从 ShG 光束的场分布公式出发, 推导出 ShG 光束 M^2 因子的解析表达式. 然后, 用正交模系展开法, 给出了 ShG 光束的模相干系数. 由 ShG 光束的这两个特征参数可建立 ShG 光束的模分解理论, 即从给定的 M^2 因子进行 ShG 光束的相干模分解, 计算 ShG 光束的模式数、模相干系数和权重因子. 而且, 从本文的分析还得出了一个在实验室利用偏心高斯光束产生 ShG 光束的简单方法. 本文所用方法优点是具有一般性, 可推广用于研究 SHG 的光束传输因子、特征参数、模式结构和模相关等物理问题, 有重要理论和应用意义.

2 ShG 光束的光束传输 M^2 因子

二维 ShG 光束的场分布 $E(x, z)$ 可表示为^[7]

$$E(x, 0) = \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] \sinh(\Omega_0 x), \quad (1)$$

式中, w_0 为高斯场振幅的束腰宽度, Ω_0 为双曲正弦函数的参数.

* 国家高技术强辐射重点实验室基金(批准号: H98-01)资助的课题.

双曲正弦函数可用指数函数表示为

$$\sinh(\Omega_0 x) = \frac{\exp(\Omega_0 x) - \exp(-\Omega_0 x)}{2}. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 经计算得到

$$E(x, 0) = \frac{1}{2} \exp\left[\frac{w_0^2 \Omega_0^2}{4}\right] \left[\exp\left[-\frac{\left(x - \frac{w_0^2 \Omega_0}{2}\right)^2}{w_0^2}\right] - \exp\left[-\frac{\left(x + \frac{w_0^2 \Omega_0}{2}\right)^2}{w_0^2}\right] \right]. \quad (3)$$

由(3)式可知, ShG 光束可看成是中心位于 $\left[\frac{w_0^2 \Omega_0}{2}, 0\right]$ 和 $\left[-\frac{w_0^2 \Omega_0}{2}, 0\right]$ 处, 具有相同的束腰宽度但有 π 位相差的两束高斯光束的相干合成, 由此我们得到在实验中产生 ShG 光束的一种简单方法, 即由两束束腰宽度相同但位相相反的偏心高斯光束合成而得.

于是, $z = 0$ 处的光强分布为

$$I(x, 0) = E(x, 0) E^*(x, 0), \quad (4)$$

式中, $*$ 表示复共轭.

由空间域和空间频率域中方差 σ_x^2 和 σ_k^2 的定义^[1, 3], 利用(3), (4)式, 略去较繁冗的中间积分计算过程, 将最后结果整理为

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{4} + \frac{\frac{w_0^2 \delta}{4}}{1 - \exp(-\delta/2)}, \quad (5)$$

$$\sigma_k^2 = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^2 \frac{1 - (1 - \delta)\exp(-\delta/2)}{w_0^2 [1 - \exp(-\delta/2)]}, \quad (6)$$

式中

$$\delta = w_0^2 \Omega_0^2. \quad (7)$$

计算中, 使用了积分公式^[10]

$$\int_0^+ t^\gamma \exp(-pt) dt = \Gamma(\gamma + 1) p^{-\gamma-1}. \quad (8)$$

Γ 为伽玛函数.

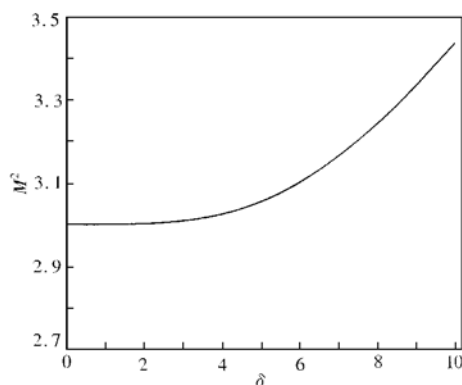
因此, 由(5), (6)式可得到 ShG 光束的 M^2 因子公式为

$$M^2 = 4\pi \sigma_x \sigma_k = \frac{\sqrt{(1 - \delta)\exp(-\delta) + (\delta^2 - 2)\exp(-\delta/2) + \delta + 1}}{1 - \exp(-\delta/2)}. \quad (9)$$

(9)式表明 ShG 光束的 M^2 因子只与 δ 有关. 图 1 给出了 ShG 光束的 M^2 因子随 δ 的变化关系. 可以看出, ShG 光束的 M^2 因子随着 δ ($\delta > 0$) 的增大而增大. 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $M^2 \rightarrow 3$. 其物理意义是当 δ 很小时, Ω_0 很小, $\sinh(\Omega_0 x) \approx \Omega_0 x$, 由(1)式得

$$E(x, 0) = \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] \sinh(\Omega_0 x) \approx \Omega_0 \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right] = \frac{\sqrt{2}\delta}{4} H_1\left[\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right] \exp\left[-\frac{x^2}{w_0^2}\right]. \quad (10)$$

这是一阶厄米-高斯光束的场分布(H_1 为一阶厄米函数), 其 M^2 因子为 $M^2 = 2n + 1 = 3$ ($n = 1$). 这一结论也可直接由(9)式得到. 具体地, 当 δ 很小时, 将(9)式中的指数函数做

图 1 ShG 光束的 M^2 因子随 δ 的变化曲线

幂级数展开, 并略去高阶小量, 得 $M^2 \approx \frac{\sqrt{(1-\delta)^2 + (\delta^2 - 2)(1-\delta/2) + \delta + 1}}{1 - (1-\delta/2)} \approx 3$.

3 ShG 光束的模相干系数

众所周知, 任意光束在 $z = 0$ 处的光场分布 $E(x, z)$ 可展成一正交归一化模系 $\varphi_m(x)$ 的叠加, 即

$$E(x, 0) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \varphi_m(x). \quad (11)$$

式中, c_m 为模系数, m 为模阶数, 在直角坐标系中, 将 $\varphi_m(x)$ 表示为厄米-高斯函数

$$\varphi_m(x) = u_m \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2} x^2\right] H_m(\alpha x), \quad (12)$$

u_m 为归一化因子, α 与基模高斯光束束腰宽度 w_{0h} 关系为

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{w_{0h}}. \quad (13)$$

利用厄米-高斯函数的正交性, 由(11)式得

$$c_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x) E(x, 0) dx. \quad (14)$$

将(1), (12)式代入(14)式, 并利用积分公式^[10]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t) \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{2u}\right] dt = \sqrt{2\pi u} (1-2u)^{\frac{m}{2}} H_m\left[\frac{x}{\sqrt{1-2u}}\right], \quad (15)$$

经计算得到

$$c_m = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma\pi^{1/2}}{\alpha(2+\gamma)}} \exp\left[\frac{\delta}{2(1+\gamma)}\right] \left[\frac{2-\gamma}{4+2\gamma}\right]^{\frac{m}{2}} (m!)^{-1/2} H_m\left[\frac{\gamma\delta}{\sqrt{4-\gamma^2}}\right] & (m \text{ 为奇数}), \\ 0 & (m \text{ 为偶数}), \end{cases} \quad (16)$$

式中

$$\nu = w_0^2 \alpha^2. \quad (17)$$

由光场部分相干性理论可知, 在准单色场近似下, 描述部分相干光的交叉谱密度函数可表示为^[6, 11]

$$W(x_1, x_2) = \sum_m \sum_{m'} c_m c_{m'}^* \varphi_m(x_1) \varphi_{m'}^*(x_2) = \sum_m \sum_{m'} \lambda_{mm'} \varphi_m(x_1) \varphi_{m'}^*(x_2), \quad (18)$$

式中

$$\lambda_{mm'} = c_m c_{m'}^* \quad (19)$$

为模相干系数^[4].

于是, 由(16)和(19)式得到 ShG 光束的模相干系数为

$$\lambda_{mm'} = \frac{\nu \sqrt{\pi}}{\alpha(2+\nu)} \exp\left[\frac{\delta}{1+\nu}\right] \frac{\left[\frac{2-\nu}{4+2\nu}\right]^{(m+m')/2}}{\sqrt{m!m'!}} H_m\left[\frac{\nu\delta}{\sqrt{4-\nu^2}}\right] H_{m'}\left[\frac{\nu\delta}{\sqrt{4-\nu^2}}\right] \quad (m, m' \text{ 为奇数}). \quad (20)$$

4 ShG 光束的相干模分解

在直角坐标系下, M^2 因子用模相干系数表示的公式为^[4]

$$M^2 = \sqrt{\sum_{m=0}^{+\infty} (2m+1) C_{mm}}^2 - 4 \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \sqrt{(m+1)(m+2)} \operatorname{Re} C_{m, m+2} \right]^2, \quad (21)$$

式中

$$C_{mm} = \frac{\lambda_{mm}}{\sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_{mm}}, \quad C_{m, m+2} = \frac{\lambda_{m, m+2}}{\sum_{m=0}^{+\infty} \lambda_{mm}} \quad (22)$$

为归一化模相干系数或称权重因子. 由(21)式可知, 一般而言, 激光光束的 M^2 因子不仅与各模式的权重因子有关, 而且还与第 m 和第 $m+2$ 阶模式之间的模相干系数有关.

由(9)式知, ShG 光束的 M^2 因子仅依赖于参数 δ , 反解(9)式(通常可由数值计算求解)得

$$\delta = f(M^2). \quad (23)$$

由(20)式可得到相应的模相干系数为

$$\lambda_{mm} = \frac{\nu \sqrt{\pi}}{\alpha(2+\nu)} \exp\left[\frac{\delta}{1+\nu}\right] \frac{\left[\frac{2-\nu}{4+2\nu}\right]^m}{m!} \left| H_m\left[\frac{\nu\delta}{\sqrt{4-\nu^2}}\right] \right|^2, \quad (24)$$

$$\lambda_{m, m+2} = \frac{\nu \sqrt{\pi}}{\alpha(2+\nu)} \exp\left[\frac{\delta}{1+\nu}\right] \frac{\left[\frac{2-\nu}{4+2\nu}\right]^{m+1}}{\sqrt{m!(m+2)!}} H_m\left[\frac{\nu\delta}{\sqrt{4-\nu^2}}\right] H_{m+2}\left[\frac{\nu\delta}{\sqrt{4-\nu^2}}\right], \quad (25)$$

式中 m 为奇数, δ 由(23)式表示.

由以上分析可知, 在考虑模式相关性的一般情况下, 可将 ShG 光束表示为厄米-高斯模的叠加. 进一步应用 M^2 因子概念, 可进行 ShG 光束的模分解, 即由给定的 M^2 因子(例如, 由实验测得值)并选取截断数, 如 $|C_{mm'}| \geq 2\%$ ^[12], 可求得振荡模式 m , 模相干系数

λ_{mm} 和 $\lambda_{m, m+2}$, 以及相应的权重因子 C_{mm} 和 $C_{m, m+2}$. 具体的步骤为: 由给定的 M^2 因子和 (9) 式求得 δ 值(即 (23) 式), 将 δ 代入 (24), (25) 和 (22) 式得到的 λ_{mm} , $\lambda_{m, m+2}$, C_{mm} 和 $C_{m, m+2}$ 代入 (21) 式令其自洽, 所得到的 λ_{mm} , $\lambda_{m, m+2}$, C_{mm} 和 $C_{m, m+2}$ 即为 M^2 因子给定值的 ShG 光束的模相干系数和权重因子. 数值计算列于表 1.

表 1 ShG 光束模分解的数值计算结果

M^2	m	C_{11}	C_{13}	C_{33}	C_{35}	C_{55}	C_{57}	C_{77}	C_{79}	C_{99}	$C_{9, 11}$	$C_{11, 11}$
(%)												
3.00	1	100										
3.05	1; 3; 5; 7; 9	41.7	- 34.6	28.7	- 21.4	15.9	- 11.2	7.9	- 5.3	3.5	- 2.3	
3.10	1; 3; 5; 7; 9; 11	37.9	- 32.7	28.2	- 21.9	16.9	- 12.4	9.1	- 6.4	4.5	- 3.0	2.0
3.30	1; 3; 5; 7; 9; 11	32.4	- 29.5	26.8	- 22.0	17.9	- 13.8	10.7	- 7.9	5.8	- 4.1	2.8

由表 1 可知, ShG 光束不同模式间总是存在相关性($M^2=3$ 的极限情况除外), 且不同模式间的模相干系数可正可负, 但由 (21) 式知, 不同模式间的模相干系数的贡献总是使 M^2 因子减小, 而与其值的正负无关.

5 结 论

本文推导出 ShG 光束的 M^2 因子和模相干系数的解析表达式, 从而建立了 ShG 光束的模分解理论, 并提出了一种在实验室中利用偏心高斯光束产生 ShG 光束的简单方法. 所得到的主要结论为: (1) ShG 光束的 M^2 因子公式为 (9) 式, 它仅与其光束参数 $\delta = w_0^2 \omega_0^2$ 有关, 且随 δ 的增加而增大. 当 δ 很小时, ShG 光束约化为一阶厄米-高斯光束, 此时, ShG 光束的 M^2 因子为 3. (2) ShG 光束的模相干系数为 (20) 式. 它表明, 仅有奇数阶厄米-高斯模存在. (3) 基于 (21), (22), (24) 和 (25) 式, 可进行 ShG 光束的模分解, 即由 M^2 因子可确定光束的模结构. 计算表明, ShG 光束($M^2=3$ 的极限情况除外) 的空间横模总是相关的. (4) 在实验室中, ShG 光束可由两束光束宽度相同但位相相反的偏心高斯光束经相干合成而产生. 最后, 应当指出的是, 本文仅以 ShG 光束为 HSG 光束的一个典型例, 研究其物理特性. 文中所用方法和结论还可进一步用于研究双曲余弦高斯(ChG) 光束和更为一般的 HSG 光束的特性. 例如, ChG 光束可两束光束宽度相同且同相的偏心高斯光束合成得到.

- [1] A. E. Siegman, *SPIE*, **1224**(1990), 2.
- [2] G. Nemens, J. Serna, Laser beam characterization with use of second order moments: an overview OSA Trends in Optics and Photonics Series (TOPS), 17(1998), 200—207.
- [3] H. Weber, *Opt. and Quant. Electron.*, **24**(1992), 1027.
- [4] K. M. Du, G. Herziger, P. Loosen, F. Rühl, *Opt. and Quant. Electron.*, **24**(1992), 1081.
- [5] K. M. Du, G. Herziger, P. Loosen, F. Rühl, *Opt. and Quant. Electron.*, **24**(1992), 1119.
- [6] K. M. Du, Kohärenz, Polarisation und Fluktuation von Laserstrahlung, Ph. D. thesis, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, (1992).

- [7] L. W. Casperson, D. G. Hall, *J. Opt. Soc. Am.*, **A14**(1997), 3341.
- [8] L. W. Casperson, A. A. Tovar, *J. Opt. Soc. Am.*, **A15**(1998), 954.
- [9] A. A. Tovar, L. W. Casperson, *J. Opt. Soc. Am.*, **A15**(1998), 2425.
- [10] A. Erdelyi *et al.*, Tables of integral Transforms, (McGraw-Hill, New York, 1954).
- [11] A. Starikov, E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.*, **A72**(1982), 923.
- [12] B. Lü, B. Zhang, B. Cai, *Opt. Commun.*, **101**(1993), 49.

M^2 -FACTOR AND COHERENT-MODE DECOMPOSITION OF SINH-GAUSSIAN BEAMS*

ZHANG BIN MA HONG LÜ BA-DA

(Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064)

(Received 17 January 1999)

ABSTRACT

Based on the second moments method and orthogonal basis mode expansion, analytical expressions for the M^2 -factor and mode coherence coefficients of sinh-Gaussian beams have been derived, thus the coherent-mode decompositions of sinh-Gaussian beams have been made. A simple method has also been proposed to produce sinh-Gaussian beams in the laboratory.

PACC: 4255; 4200

* Project supported by the Foundation of National Key Laboratory of High Power Radiation (Grant No. H98-01).