第 48 卷 第 11 期 1999 年 11 月 物 理 学 报 Vol. 48, No. 11, November, 1999
1000-3290/ 1999/ 48(11)/ 1957-05 ACTA PHYSICA SINICA

具有三个任意函数的变系数 KdV-MKdV 方程的精确类孤子解*

闫振亚 张鸿庆
(大连理工大学数学科学研究所, 大连 116024)
(1998 年 10 月 27 日收到)

利用一个新的变换将变系数 KdV-MKdV 方程约化为三阶非线性常微分方程(NODE), 考虑这个 NODE, 获得了变系数 KdV-MKdV 方程的若干精确类孤子解. 这种思路也适合于其他的变系数非线性方程, 如变系数 KP 方程、变系数 sine-Gordon 方程等.

PACC: 0340K; 0290; 1190

1 引 言

近数十年来, 人们对常系数非线性方程的研究很多[1—4], 尤其是在求解方程方面有了很多方法, 如反散射法、Bäcklund 变换、Hirota 变换、Darboux 变换等[1—4]. 但常系数非线性方程只能近似地反映实际物质运动变化的规律, 为了准确地描述物质的属性, 研究相应的变系数非线性方程显得非常重要. 文献[5]用 Miura 方法研究了变系数 KdV 方程

$$q_t = K_0(t)(q_{xxx} + 6qq_x) + 4K_1(t)q_x - h(t)(2q + xq_x) \tag{1}$$

和变系数 MKdV 方程

$$u_t = K_0(t)(u_{xxx} - 6u^2u_x) + 4K_1(t)u_x - h(t)(u + xu_x) \tag{2}$$

的无穷多守恒律. 文献[6]用特殊的函数变换获得了变系数 KdV 方程

$$u_t + 2\beta(t)u + [\alpha(t) + \beta(t)x]u_x - 3c\gamma(t)uu_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0 \tag{3}$$

的钟状孤波解. 本文将考虑更一般的变系数 KdV-MKdV 方程:

$$K_0(t)[u_{xxx} - a_1u^2u_x + 2a_2(u_x^2 + uu_{xx})] + a_3h(t)K_0(t)uu_x + [K_1(t) + K_2(t)x]u_x + K_2(t)u + u_t = 0, \tag{4}$$

其中 a_1, a_2, a_3 为任意常数, $h(t) = \exp\left[-\int_a^t K_2(s)\mathrm{d}s\right]$, $K_0(t), K_1(t), K_2(t)$ 为 t 的任意函数. 受文献[6]的启发, 通过引入一个新的变换将方程(4)约化为三阶非线性常微分方程(NODE), 然后通过这个 NODE 获得(4)式的类孤子解.

方程(4)是数学家和物理学家感兴趣的诸方程的统一和推广. 事实上, 方程(1)—(3)为(4)式的特例. 取 $K_0 = 1, K_1 = K_2 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = -6$, 则(4)式为 KdV 方程, 取 K_0

* 国家自然科学基金(批准号: 19572022)资助的课题.

$=1$, $a_2=a_3=K_1=K_2=0$, 则(4)式为 MKdV 方程, 取 $a_2=a_3=0$, K_0, K_1, K_2 为常数, 则(4)式为具有弛豫效应非均匀介质的 MKdV 方程.

2 变系数 KdV-MKdV 方程(4)的类孤子解

对给定的方程(4), 设有如下形式的解:

$$u(x,t)=f(t)H(\alpha),\quad \alpha=f(t)x+g(t)+\alpha_0, \tag{5}$$

其中 $H(\alpha)$, $f(t)$, $g(t)$ 为待定函数, α_0 为任意常数. 由(5)式易得

$$u_{xxx}=f^4(t)H'''(\alpha),\quad u^2u_x=f^4(t)H^2(\alpha)H'(\alpha),\quad u_x^2=f^4(t)H'^2(\alpha),$$
$$uu_{xx}=f^4(t)H(\alpha)H''(\alpha),\quad u_x=f^2(t)H'(\alpha),\quad uu_x=f^3(t)HH'$$
$$u_t=f_tH(\alpha)+f(t)g_tH'(\alpha)+f(t)f_txH'(\alpha).$$

将上述式子代入(4)式, 得

$$\begin{aligned}&K_0(t)[u_{xxx}-a_1u^2u_x+2a_2(u_x^2+uu_{xx})]+a_3h(t)K_0(t)uu_x+[K_1(t)\\&+K_2(t)x]u_x+K_2(t)u+u_t=K_0(t)[f^4H'''-a_1f^4H^2H'+2a_2(f^4H'^2\\&+f^4HH'')]+a_3h(t)K_0(t)f^3HH'+[K_1(t)f^2+fg_t+(K_2(t)f^2+ff_t)x]H'\\&+(K_2(t)f+f_t)H=0.\end{aligned} \tag{6}$$

为了求解方程(6), 设

$$K_2(t)f+f_t=0, \tag{7}$$

$$K_1(t)f^2+fg_t=D_0K_0(t)f^4, \tag{8}$$

其中 D_0 为任意常数. 对方程(7)通过分离变量并且积分, 易得

$$f(t)=A\exp\left[-\int_a^tK_2(s)\mathrm{d}s\right], \tag{9}$$

其中 $A\neq0$ 为积分常数, a 为某一常数. 将(9)式代入(8)式, 整理积分, 可得

$$g(t)=\int_a^t\left[D_0A^3K_0(t)\exp\left[-3\int_a^tK_2(s)\mathrm{d}s\right]-AK_1(t)\exp\left[-\int_a^tK_2(s)\mathrm{d}s\right]\right]\mathrm{d}t+B, \tag{10}$$

其中 B 为积分常数. 又因为 $h(t)=\exp\left[-\int_a^tK_2(s)\mathrm{d}s\right]=f(t)/A$, 将此及(7)和(8)式代入方程(6), 并结合 $f(t)\neq0$, 得

$$H'''-a_1H^2H'+2a_2(H'^2+HH'')+\frac{a_3}{A}HH'+D_0H'=0. \tag{11}$$

对方程(11)两边积分, 并令积分常数为零, 得

$$H''-\frac{a_1}{3}H^3+2a_2HH'+\frac{a_3}{2A}H^2+D_0H=0. \tag{12}$$

设(12)式有如下形式的解:

$$H(\alpha)=\frac{M\mathrm{e}^{\lambda\alpha}}{1+\mathrm{e}^{\lambda\alpha}}=\frac{M}{2}\left[1+\tanh\frac{\lambda}{2}\alpha\right], \tag{13}$$

其中 M, λ 为待定常数, 则

$$H'(\alpha) = \frac{\lambda M e^{\lambda\alpha}}{(1+e^{\lambda\alpha})^2}, \tag{14}$$

$$H''(\alpha) = \frac{\lambda^2 M e^{\lambda\alpha} - \lambda^2 M e^{2\lambda\alpha}}{(1+e^{\lambda\alpha})^3}. \tag{15}$$

将(13)—(15)式代入(12)式, 并令 $e^{\lambda\alpha}$, $e^{2\lambda\alpha}$, $e^{3\lambda\alpha}$的系数为零,

$$\begin{aligned} &\lambda^2 M + D_0 M = 0, \\ &-\frac{a_1}{3}M^3 + \frac{a_3}{2A}M^2 + D_0 M = 0, \\ &-\lambda^2 M + 2a_2\lambda M^2 + \frac{a_3}{2A}M^2 + 2D_0 M = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

从方程组(16)采用吴文俊消元法[7, 8], 得

(1) $D_0 = -\lambda^2$, $\lambda = \dfrac{a_2 a_3 \pm a_3\sqrt{9a_2^2+6a_1}}{6a_1 A + 8Aa_2^2}$,

$$M = \frac{3a_3(a_2 \pm \sqrt{9a_2^2+6a_1})^2}{(6a_1A+8Aa_2^2)(3a_1+6a_2^2\pm 2a_2\sqrt{9a_2^2+6a_1})}.$$

(2) 当 $a_1 = -\dfrac{4}{3}a_2^2$ 时

$$D_0 = -\lambda^2, \quad \lambda = -\frac{a_3}{2Aa_2}, \quad M = -\frac{3a_3}{2Aa_2^2}.$$

根据(5)—(16)式, 得如下定理:

定理 1　(1) 当 $3a_1 + 4a_2^2 \neq 0$, $D_0 = -(a_2a_3 \pm a_3\sqrt{9a_2^2+6a_1})^2/(6a_1A+8Aa_2^2)^2$ 时, 方程(4)有类扭状孤子解:

$$\begin{aligned} u_\pm(x,t)_1 = &\frac{3a_3(a_3 \pm \sqrt{9a_2^2+6a_1})^2 A\exp\left[-\int_a^t K_2(s)\,ds\right]}{(12a_1A+16Aa_2^2)(3a_1+6a_2^2\pm 2a_2\sqrt{9a_2^2+6a_1})}\left\{1\right. \\ &\left.+\tanh\left[\frac{a_2a_3\pm a_3\sqrt{9a_2^2+6a_1}}{4A(3a_1+4a_2^2)}\left(A\exp\left[-\int_a^t K_2(s)\,ds\right]x + g(t) + \alpha_0\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

(2) 当 $3a_1 + 4a_2^2 = 0$ 时, $D_0 = -\dfrac{a_3^2}{4A^2a_2^2}$, 方程(4)有另一组类扭状孤子解:

$$\begin{aligned} u_\pm(x,t)_2 = &-\frac{3a_3A}{4Aa_2^2}\exp\left[-\int_a^t K_2(s)\,ds\right]\left\{1\right. \\ &\left.+\tanh\left[-\frac{a_3}{4Aa_2}\left(A\exp\left[-\int_a^t K_2(s)\,ds\right]x + g(t) + \alpha_0\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

其中 $g(t)$满足(10)式. 当 a_1, a_2, a_3 都不为零时, 方程(4)不存在类钟状孤波解(sech$x$ 型). 从 $u_\pm(x,t)_1$ 和 $u_\pm(x,t)_2$ 可以得出: 1) 当$|\alpha| = |f(t)x + g(t) + \alpha_0| \to \infty$时, $u_\pm(x,t)_1 \to 0$ 或者 $\dfrac{3a_3(a_2 \pm \sqrt{9a_2^2+6a_1})^2 A}{(6a_1A+8Aa_2^2)(3a_1+6a_2^2\pm 2a_2\sqrt{9a_2^2+6a_1})}\exp\left[-\int_a^t K_2(s)\,ds\right]$ (此式仅与时间 t 有关, 若对某一固定时间 t_0, 则此时 $u_\pm(x,t)_1$ 趋于常数); 2) 当$|\alpha| \to \infty$

时, $u_{\pm}(x,t)_2\to 0$ 或者 $-\frac{3a_3}{2a_2^2}\exp\left[-\int_a^t K_2(s)\,\mathrm{d}s\right]$.

下面寻找方程(12)其他形式的解,设有如下的解:

$$H(\alpha)=\frac{M\exp(\lambda\alpha)}{\exp(2\lambda\alpha)+N\exp(\lambda\alpha)+1}=\frac{M\operatorname{sech}^2\frac{\lambda}{2}\alpha}{(N-2)\operatorname{sech}^2\frac{\lambda}{2}\alpha+4},\tag{17}$$

其中 M, N, λ 为待定常数. 将(17)式代入(12)式,并令 $\exp(i\lambda\alpha)(i=1,2,3,4,5)$ 的系数为零,得

$$\lambda^2M+D_0M=0,$$

$$-NM\lambda^2-2a_2M^2\lambda+2D_0MN+\frac{a_3}{2A}M^2=0,$$

$$-6M\lambda^2-\frac{a_1}{3}M^3+D_0MN^2+2D_0M+\frac{a_3}{2A}M^2N=0,$$

$$-MN\lambda^2+2a_2M^2\lambda+2D_0MN+\frac{a_3}{2A}M^2=0.$$

解其得(用吴文俊消元法较简单)

$$a_2=0,\quad \lambda=\pm\sqrt{-D_0}\ (D_0<0),$$

$$M=\mp\frac{12AD_0}{\sqrt{6a_1A^2D_0+a_3^2}},\ N=\pm\frac{2a_3}{\sqrt{6a_1A^2D_0+a_3^2}}.$$

定理 2 当 $a_2=0$ 时,方程(4)成为变系数组合 KdV 方程:

$$K_0(t)(u_{xxx}-a_1u^2u_x)+a_3h(t)K_0(t)uu_x+[K_1(t)+K_2(t)x]u_x+K_2(t)u+u_t=0.\tag{18}$$

其一组类孤子解为

$$u_{\pm}(x,t)=\frac{\mp\frac{12AD_0}{\sqrt{6a_1A^2D_0+a_3^2}}\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{-D_0}}{2}\left[A\exp\left[-\int_a^tK_2(s)\,\mathrm{d}s\right]x+g(t)+\alpha_0\right]}{\left[-2\pm\frac{2a_3}{\sqrt{6a_1A^2D_0+a_3^2}}\right]\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{-D_0}}{2}\left[A\exp\left[-\int_a^tK_2(s)\,\mathrm{d}s\right]x+g(t)+\alpha_0\right]+4},$$

其中 $D_0<0$, $g(t)$ 满足(10)式,并且当 $|\alpha|=|f(t)x+g(t)+\alpha_0|\to\infty$ 时, $u_{\pm}(x,t)\to\frac{1}{4}$(常数). 表明波在运动的过程中能量是集中的.

对方程(12),令 $H'=y$, 则 $yy'(H)=H''$, 因此方程(12)为

$$yy'=-2a_2Hy+\frac{a_1}{3}H^3-\frac{a_3}{2A}H^2-D_0H.\tag{19}$$

此方程为第二类阿贝耳方程. 若又令 $y=1/\omega$, 则方程(19)改写为

$$\omega'=2a_2H\omega^2+\left[-\frac{a_1}{3}H^3+\frac{a_3}{2A}H^2+D_0H\right]\omega^3.$$

此方程为第一类阿贝耳方程的特例. 若 $a_2=0$, 则方程(12)变为方程(18)对应的常微分方程,并积分,得

$$H'^2=\frac{a_1}{6}H^4-\frac{a_3}{3A}H^3-D_0H^2+c,$$

其中 c 为积分常数. 此方程的解可用 Jacobi 椭圆函数表示.

3 结　　论

利用一个变换将变系数 KdV-MKdV 方程约化为常系数常微分方程, 并给出几种变形, 这大大简化了求解难度. 这种思路也适合于其他的方程, 如变系数 sine-Gordon 方程, 变系数 KP 方程等[6, 9]或许它还可用于化简变系数耦合非线性方程组.

[1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution and Inverse Scattering (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[2] R. K. Dodd *et al.*, Solitons and Nonlinear Wave Equations (Academic Press, London, 1982).

[3] 谷超豪等, 孤立子理论与应用(浙江科学技术出版社, 杭州, 1990) [Gu Chao-hao *et al.*, Soliton Theory and its Application (Zhejiang Science Technology Press, Hangzhou, 1990) (in Chinese)].

[4] 郭柏灵等, 孤立子(科学出版社, 北京, 1987) [Guo Bo-ling *et al.*, Soliton (Science Press, Beijing, 1987) (in Chinese)].

[5] 楼森岳等, 物理学报, **42**(1992), 182 [Lou Sen-yue *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **42**(1992), 182(in Chinese)].

[6] X. Q. Liu, *Appl. Math. -J. Chinese University*, **B13**(1998), 25.

[7] 吴文俊, 科学通报, **31**(1986), 1 [Wu Wen-jun, *Chinese Science Bulletin*, **31**(1986), 1(in Chinese)].

[8] W. Wu, Polynomial Equations-Solving and its Applications, Algorithms and Computation (Springer-Verlag, Berlin, 1994).

[9] Z. N. Zhu, *Phys. Lett.*, **A182**(1993), 277.

EXACT SOLITON SOLUTIONS OF THE VARIABLE COEFFICIENT KdV-MKdV EQUATION WITH THREE ARBITRARY FUNTIONS*

YAN ZHEN-YA　ZHANG HONG-QING

(Institute of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

(Received 27 October 1998)

ABSTRACT

In this paper, first, by using a new transformation, the variable coefficient KdV-MKdV equation is reduced to a third-order nonlinear ordinary differential equation (NODE), and then several exact soliton-solutions for the variable coefficient KdV-MKdV equatioin are obtained through considering this NODE. The method can be also used to solve other nonlinear equations, such as the variable coefficient KP equation, sine-Gordon equation and so on.

PACC: 0340K; 0290; 1190

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19572022).