

量子混沌系统本征态的统计非遍历性 及其半经典极限

张飞舟¹⁾ 王 矫²⁾ 顾 雁^{1) 2)}

¹⁾(中国科学技术大学天文与应用物理系, 合肥 230026)

²⁾(中国科学技术大学非线性中心, 合肥 230026)

(1998 年 12 月 28 日收到; 1999 年 3 月 23 日收到修改稿)

讨论半经典极限下 circular unitary ensemble (CUE) 系综本征态 $\theta_k(j)$ 的非遍历性质. 为研究量子系统本征态在统计上的非遍历性, 定义了本征态分布 $\rho_k(j)$ 的一对统计函数: $\Phi_N(j)$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k(j)^2 \text{ 和 } \Psi_N(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\rho_k(j)},$$
 以分别体现量子本征态分布的凸起与凹陷. 在随机矩阵理论的框架内, 数值地计算了由正交归一的随机矢量得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$, 发现它们的平均值和涨落随 N 的增大而趋于 0, 并且有明显的标度关系. 与由量子面包师变换的本征态得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的结果相比较, 发现疤痕的存在使得量子面包师变换的本征态的统计函数的涨落比随机矩阵的统计函数的涨落要大, 并且在 $N \rightarrow \infty$ 的半经典极限下, 以较慢的速度趋于 0.

PACC: 0545; 0300

1 引 言

20 年前, Berry^[1] 和 Voros^[2] 根据微正则系综假设认为, 在半经典极限下, 量子混沌系统的本征态的粗粒 Wigner 分布在相空间中是遍历的, 它可以表示为 $\delta[E - H(q, p)]$. 由此可推出, 对于面包师变换和运动场台球这样的硬混沌系统^[3] 而言, 本征态的粗粒 Wigner 分布在相空间应是均匀的. 但 Heller^[4] 计算运动场台球的本征态时发现, 约有半数的本征态在位形空间有明显的结构, 它们会在某些不稳定的经典周期轨道上局域化, 即形成疤痕 (scar). 不过, 随本征态能级的增高, 疤痕将逐渐变细, 最终消失在具有无规起伏的均匀背景中. 即 Berry 的微正则系综假设对于能级极高的不规则态来说仍是正确的. 最初 Heller 是在位形空间观察到量子本征态的疤痕的. 之后, Feingold 等^[5] 指出疤痕也可以在相空间观察到. 文献[6]中指出, 在理论上, 除凸起的疤痕外, 本征态的分布还可能会出现凹陷的疤痕 (antiscar). Waterland 和袁建民等^[7] 在研究二维耦合非线性振子的本征态疤痕时观察到, Husimi 分布的高密度区不仅显示出周期点的位置, 还显示出了过这些周期点的稳定与不稳定流形.

从单个本征态的分布可以观察到偏离于遍历性的凸起与凹陷. 但是, 不可能通过这样的方法来了解本征态在整个相空间的非遍历性质. 因此从统计的角度来研究这一问题是很有意义的. 这样做的实质是完全不考虑系统具体的动力学性质, 而只关心本征态的统计

特征及其在半经典极限下的行为. 这就是所谓“随机矩阵理论”. 随机矩阵理论是 Wigner^[8]和 Dyson 等^[9]于本世纪 60 年代初建立的一种统计理论. 其基本观点是假定所讨论的量子系统的哈密顿量用 $N \times N$ 的厄密矩阵 $\hat{H}$ 表示, 而 $\hat{H}$ 的 N^2 个矩阵元可以看作随机变量, 对系统的统计描述可以通过考虑系统的对称性得到. 随机矩阵理论最初是为了分析复杂核的能谱而建立的. 后来, Porter 等^[10]将其应用于研究本征态的统计性质, 得到了本征态分量的分布性质. 有的作者给出了在周期性冲击下陀螺的演化算符的本征态的几种不同的统计结果, 它们都基本上与随机矩阵理论的结果相符^[11]. 一般而言, 实际的量子混沌系统并不一定完全满足随机矩阵理论所要求的假设, 但是随机矩阵理论可以指导我们去研究有意义的一些量, 从而为对实际系统的研究指明道路. 例如, 对于规则与混沌共存的“软混沌”系统, 根据其本征态分量的统计分布, 可以区分规则谱与混沌谱^[11]. O' Connor 等^[12]计算了量子面包师变换本征态强度(绝对值平方)的累积密度, 并与随机矩阵理论的结果进行了比较. 在同一文献中他研究了函数

$$K(q, p) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{t=-T}^T |\langle q, p | \hat{U}^t | q, p \rangle|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |\langle q, p | \psi_j \rangle|^4$$

在某些 N 下的结果. 其中 $|q, p\rangle$ 取为中心在 (q, p) 的相干态, $|\psi_j\rangle$ 为 $\hat{U}$ 的第 j 个本征态. Heller^[13]曾用这一函数来表示相空间被一初始态“探测”到的相格子的数目. 从作者给出的 $K(q, p)$ ($N=1050$) 的等高图可以看出一些经典低周期(小于等于 5 周期及 R 对称的 6, 8, 10 周期)轨道的凸起. 作者还指出了 $K(q, p)$ 对 N 的依赖性.

尽管已经取得了一些有益的结果, 但与随机矩阵理论在本征谱方面的研究相比, 从随机矩阵理论的角度来研究本征态的统计性质这方面的工作还是比较欠缺的. 而由于本征态具有较本征谱更多的具体物理系统的信息, 从本征态的统计性质这一方面比较随机矩阵理论的预言与实际系统的差别, 可以对后者的非遍历性有深入的了解.

量子映射在量子混沌研究中起重要的作用, 它使得复杂的量子力学问题简化为较为简单的矩阵本征问题. 其中, 相空间为环面的量子映射(它们是由经典环面自同构映射量子化得到的)演化算符, 具有尤其简单但又不失一般性的优点^[14]: 其状态空间是有限维 Hilbert 空间; $\hbar$ 与 Hilbert 空间的维数 N 有自然的关系, $\hbar = 1/2\pi N$, 以满足周期性边界条件; 演化算符 $\hat{U}$ 为 $N \times N$ 幺正矩阵, 准能态为 N 个 N 维正交矢量, 准能级为 $[0, 2\pi)$ 区间的点. 研究得最多的量子映射是量子面包师变换(Baker's transformation)和量子猫映射(Cat Map). 但量子猫映射比较特殊^[15]: 它的量子演化算符是周期的, 本征态在大多数 N 的情况下是简并的, 本征值是有理数. 因而, 本文以量子面包师变换为模型来研究量子本征态的统计性质, 并考察, 由于量子本征态疤痕的存在, 它与随机矩阵理论预言的结果有哪些相同和不同之处.

2 量子面包师变换本征态的非遍历性

经典面包师变换是单位平面上的保面积变换^[16]

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q - [2q] \\ (p + [2q])/2 \end{bmatrix},$$

其中, $[x] = x$ 的整数部分. 相应的量子演化算符在坐标表象下可写作^[14]

$$U = G_N^{-1} \begin{bmatrix} G_{N/2} & 0 \\ 0 & G_{N/2} \end{bmatrix},$$

其中 N 为偶数, 而 $(G_N)_{j,k} = \langle \tilde{j} | k \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} (j + \alpha_q)(k + \alpha_p) \right]$

是从坐标表象到动量表象的离散傅里叶变换. 其中 $|k\rangle$ 和 $|\tilde{j}\rangle$ 分别为坐标和动量表象的基矢, $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $\alpha_q, \alpha_p \in [0, 1)$ 为任意相因子, 不同的 α_q, α_p 分别对应波函数在坐标和动量表象不同的周期性边界条件^[17]:

$$\langle k + N | \phi \rangle = \exp(i2\pi\alpha_q) \langle k | \phi \rangle, \quad \langle \tilde{j} + N | \phi \rangle = \exp(i2\pi\alpha_p) \langle \tilde{j} | \phi \rangle.$$

最早由 Balazs 和 Voros 给出的表示对应于 $\alpha_q = \alpha_p = 0$. 当 $\alpha_q = \alpha_p = 1/2$ 时, 得到“反周期”边界条件^[18], 即保持经典面包师变换的空间反射对称性: 对变换 $q \rightarrow 1-q, p \rightarrow 1-p$ 不变. 在以下的讨论中, 我们就采取这种表示.

3 混沌本征态的随机矩阵理论

随机矩阵理论的结果与具体量子演化算符满足的系综的对称性有关, 对于 circular unitary ensemble (CUE) 系综, 每个组元是 N 维的幺正矩阵, 矩阵元是随机选取的复数, 而且除唯一的正交归一化条件 $\sum U_{j,k}^\dagger U_{k,l} = \delta_{j,l}$ 外没有其他约束. 本征谱是单位圆上的均匀分布. 本征态的统计性质依赖于坐标系基矢的选取. 一般地, 本征态 $\langle j | \theta_k \rangle$ 是 N 个复的正交归一随机矢量^[19], 其中 $j, k = 0, 1, \dots, N-1$, 分量是复数, 其实部和虚部为相互独立的高斯分布,

$$P(x) = \sqrt{\frac{N}{\pi}} \exp(-Nx^2). \quad (1)$$

根据 x_v^2 分布律^[11], 强度 $\rho_k(j) = |\langle j | \theta_k \rangle|^2$ 的概率密度为

$$P(x) = N \exp(-Nx). \quad (2)$$

如果所采用的基矢是关于时间反演对称的, 那么, 分量 $\langle j | \theta_k \rangle$ 是实数, 满足“圆正交系综”

$$(COE), \quad P(x) = \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp \left[-\frac{N}{2} x^2 \right], \quad (3)$$

本征态强度 $\rho_k(j)$ 的概率密度为所谓的 Porter-Thomas^[10] 分布,

$$P(x) = \sqrt{\frac{N}{2\pi x}} \exp \left[-\frac{N}{2} x \right]. \quad (4)$$

量子面包师变换的演化算符是 $N \times N$ 的幺正矩阵. 其本征态在坐标表象具有空间反射对称性, 也就是说, 它也是空间反射变换 $\hat{R} | j \rangle = | N-1-j \rangle$ 的本征态. $\hat{R}$ 的本征值为 $+1$ 或 -1 , 分别对应 R 对称和 R 反对称本征态. 另一方面, 面包师变换的本征态 $\langle j | \theta_k \rangle$ 具有时间反演对称性^[12], 即 $\langle j | \theta_k \rangle = \langle \tilde{j} | \theta_k \rangle^*$. O'Connor 等^[12] 给出了从坐标表象到时间反演对称表象的变换, 在这样得到的基矢中, 本征态变成实矢量. 因此, 我们可以分别在坐标表象和时间反演对称表象这两种情况下比较面包师变换本征态的统计结果与随机矩阵理论预言的 CUE 和 COE 分布的异同之处.

从对本征态分量或强度的统计来看, 实际的量子混沌系统的数值结果与随机矩阵理

论预言的结果符合得很好. 如图 1 中的虚线所示. 图 1(a) 和 (b) 分别为在坐标表象中量子面包师变换本征态分量的实部和虚部的统计分布; 图 1(c) 为在时间反演对称表象中的分量的统计分布; 它们(虚线)都与理论预言的高斯分布相符(实线); 图 1(d) 为本征态的强度的对数 $\log(x)$ 的统计分布, 与(2)和(4)式也一致. 从图 1 中可以看到, 量子面包师变换本征态的这几种统计行为都与随机矩阵理论的预言相符.

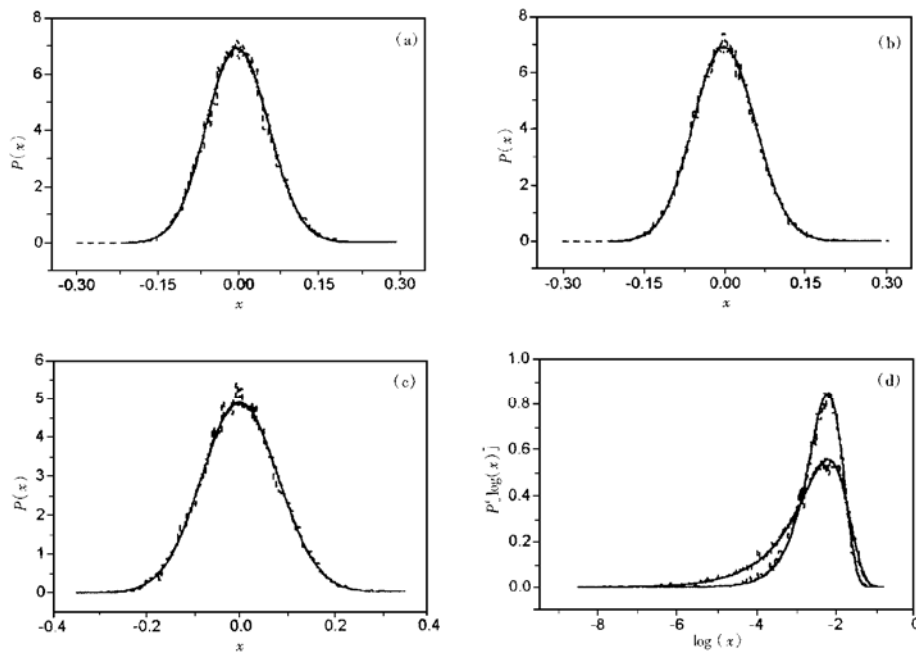


图 1 以矢量分量为统计变量的几种分布($N=150$) 点划线为由数值方法随机选取的正交归一矢量得到的统计结果, 在图中与理论结果基本上重合在一起; 虚线为量子面包师变换的本征态, 实线为理论结果

3.1 统计函数

实际的量子混沌映射的本征态有明显的疤痕结构, 因此我们希望能在统计中体现出疤痕对统计结果的影响. 而上述的统计方法显然对此无能为力, 将所有不同本征态的分量本身作为随机变量来统计这一方法掩盖了本征态太多的信息. 为此我们定义两个统计函数.

$$\Phi_N(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_k^2(j) \quad (5)$$

$$\Psi_N(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\rho_k(j)}, \quad (6)$$

其中函数 $\Phi_N(j)$ 正是 $K(q, p)^{[12]}$ 在坐标表象的表示. 统计函数 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 分别将 $\rho_k(j)$ 中的凸起和凹陷部分体现了出来. 为明确地看出这一点, 考虑到 $\rho_k(j)$ 的平均值为 $1/N$, 令

$$\Lambda_j^+ = \{k^+ | \rho_k^+(j) \rangle \frac{1}{N}\}, \quad \Lambda_j^- = \{k^- | \rho_k^-(j) \rangle \frac{1}{N}\}.$$

当在特定的 j , 对 $k(k=0, 1, 2, \dots, N-1)$ 求 $\rho_k^2(j)$ 的平均时, $\rho_k^+(j)$ 的贡献会比 $\rho_k^-(j)$ 的贡献大. 如果 Λ_j^+ 中的 $\rho_k^+(j)$ “平均起来”在该 j 上比 $1/N$ 大得多, 那么, 尽管 Λ_j^- 中的

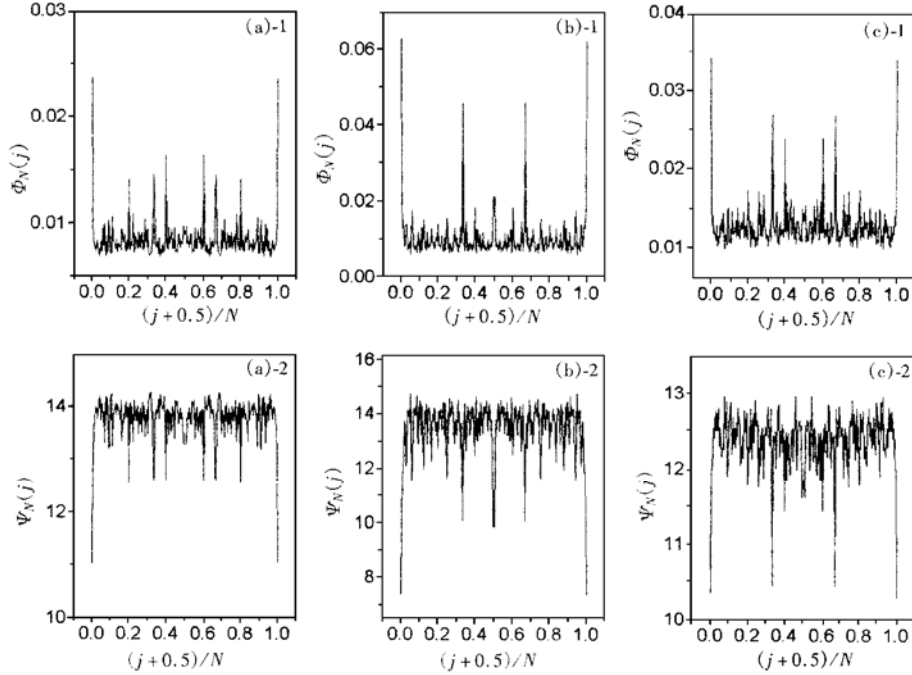


图 2 由量子面包师变换的本征态得到的 $\phi_N(j)$ 和 $\psi_N(j)$ (坐标表象) 随 $(j+0.5)/N$ 变化的关系. 可以看出它们都局域化在经典周期轨道或其流形上, $\psi_N(j)$ 在 $\phi_N(j)$ 高起的位置凹陷

$\rho_k^-(j)$ “平均起来”比 $1/N$ 小得多, 在 $\phi_N(j)$ 的这个 j 的位置仍会形成很高的凸起. 如果 Λ_j^+ 中的 $\rho_k^+(j)$ “平均起来”在该 j 上比 $1/N$ 大不了多少, 那么 $\phi_N(j)$ 在这个 j 的位置上就只取在平均值附近. 对于 $\psi_N(j)$ 情况则完全相反. 如果 Λ_j^- 中的 $\rho_k^-(j)$ 在某个 j “平均起来”比 $1/N$ 小得多, $\psi_N(j)$ 在该 j 的位置就会有有很深的凹陷. 否则就只是在平均值附近.

如图 2 为由量子面包师变换的本征态在坐标表象得到的 $\phi_N(j)$: 图 2(a)-1, 图 2(b)-1; 和 $\psi_N(j)$: 图 2(a)-2, 图 2(b)-2. 可以看出它们都局域化在经典周期轨道或其流形上. 图 2(c)-1 和图 2(c)-2 为在时间反演对称表象的 $\phi_N(j)$ 和 $\psi_N(j)$. 它们共同的特征都是都在周期 1 的位置 0(和 1)局域化. 此外, 在图 2(a)-1 和图 2(a)-2 中 ($N=246$), 可以看到它们在周期 2 和周期 4 上分别凸起或凹陷; 在图 2(b)-1 和图 2(b)-2 中 ($N=256$), 除在周期 2 有明显的局域化外, 还可以看到在 0.5, 0.25 和 0.75 的位置的凸起与凹陷, 它们是周期 1 轨道的稳定流形. 由于面包师变换的坐标与动量有明显的对称性, 在图 2(c)-1 和图 2(c)-2 ($N=244$) 也可看到在周期 1 和周期 2 的局域化. $\phi_N(j)$ 和 $\psi_N(j)$ 有很好的对称性:

$\Psi_N(j)$ 在 $\Phi_N(j)$ 高起的位置凹陷.

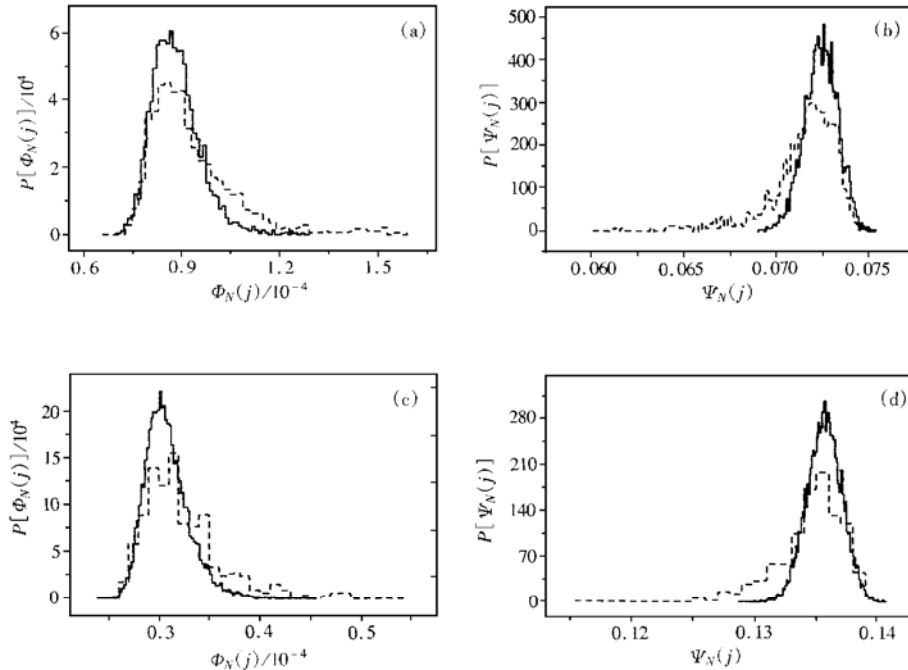


图 3 由随机正交归一矢量(实线)和量子面包师变换(虚线)得到的 $P[\Phi_N(j)]$ 和 $P[\Psi_N(j)]$ 随 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的分布 (a) 和 (b) 是在坐标表象 ($N = 150$); (c) 和 (d) 是在时间反演对称表象 ($N = 650$)

3.2 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的统计性质

从随机矩阵理论出发, 很难解析地得到 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的统计分布, 因此我们用数值的方法来研究这一问题. 选取 N 个满足“相同”高斯分布的随机数, 作为一个 N 维矢量. 不难理解, 它是 N 维空间的一个随机矢量: 在 N 维极坐标中, 它的每一个辐角都是在 $[0, 2\pi)$ 区间均匀分布的. 取 N 个这样的随机矢量并对它们进行正交归一化, 就得到满足 COE 分布的一组随机正交归一矢量. 对于 CUE 系统, 矢量的实部和虚部构成 $2N$ 维空间, 用与 COE 类似的方法可以得到正交归一的复随机矢量.

在给定 N 下, 计算满足 CUE 和 COE 的随机正交归一矢量的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$, 并对不同样本求系综平均, 可以得到 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的概率分布曲线. 如图 3 的实线所示. 图 3 中的虚线是由量子面包师变换的本征态得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的分布. 很明显, 无论是在坐标表象还是在时间反演对称表象, 二者都与由随机正交归一矢量得到的分布有较大的差别: $\Phi_N(j)$ 和峰显得向大的方向“摊开”, 而 $\Psi_N(j)$ 则偏向小的方向. 两个峰都比由随机矩阵得到的分布有较大的宽度. 也就是说, 在相同的 N 下, 它们有比完全随机的系统较大的涨落.

上述讨论都是在给定的 N 进行的. 与此相比, 我们对本征态在半经典极限下的行为更感兴趣. 为此我们计算 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值 $z_{\Phi, N}$ 和 $z_{\Psi, N}$

$$z_{\Phi, N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Phi_N(j), \quad z_{\Psi, N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_N(j)$$

以及涨落 $\sigma_{\Phi, N}$ 和 $\sigma_{\Psi, N}$

$$\sigma_{\Phi, N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Phi_N(j)^2 - \frac{1}{N} z_{\Phi, N}^2, \quad \sigma_{\Psi, N} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_N(j)^2 - \frac{1}{N} z_{\Psi, N}^2,$$

并看它们随 N 变化的关系.

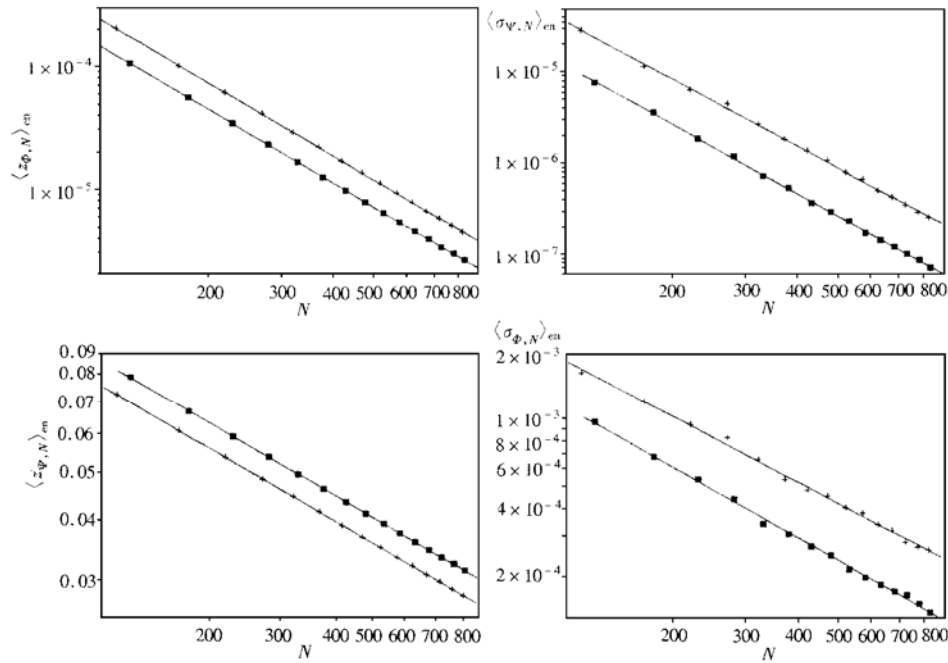


图4 由随机正交归一矢量得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值 $\langle z_{\Phi, N} \rangle_{\text{en}}$ 和 $\langle z_{\Psi, N} \rangle_{\text{en}}$ 以及涨落 $\langle \sigma_{\Phi, N} \rangle_{\text{en}}$ 和 $\langle \sigma_{\Psi, N} \rangle_{\text{en}}$ 随 N 变化的关系 ■ 为 CUE, + 为 COE

图4给出了随机正交归一矢量的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值 $\langle z_{\Phi, N} \rangle_{\text{en}}$, $\langle z_{\Psi, N} \rangle_{\text{en}}$ 和涨落 $\langle \sigma_{\Phi, N} \rangle_{\text{en}}$, $\langle \sigma_{\Psi, N} \rangle_{\text{en}}$ 随 N 变化的关系(下标 en 表示对系综求平均). 在双对数坐标中, 不难看出它们的标度规律

$$\langle z_{\Phi, N} \rangle_{\text{en}} \approx C \Phi N^{\beta_{\Phi}}, \quad \langle z_{\Psi, N} \rangle_{\text{en}} \approx D \Psi N^{\beta_{\Psi}}, \quad \langle \sigma_{\Phi, N} \rangle_{\text{en}} \approx C_{\Psi} N^{\mu_{\Psi}}, \quad \langle \sigma_{\Psi, N} \rangle_{\text{en}} \approx D_{\Psi} N^{\mu_{\Psi}}.$$

表1和2分别给出了对CUE和COE进行数值直线拟合的结果.

计算不同 N 时量子面包师变换的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值和涨落, 我们发现, 它们与 N 的关系非常复杂. 如图5所示为在坐标表象 $\sigma_{\Phi, N}$ 和 $\sigma_{\Psi, N}$ 随 N 连续变化的关系. 虽然大体上它们都随 N 增大而逐渐减小, 但在某些 N 时它们会有很大的起伏. 这些 N 大多是2的幂 2^m 或2的幂的和 $2^m + 2^n$. 这一结果其实是由面包师变换演化算符在不同 N 时的数论性质造成的.

要得到具有一般性的结果, 需要消除数论性质的影响. 为此, 我们计算 $z_{\Phi, N}$, $z_{\Psi, N}$ 以及 $\sigma_{\Phi, N}$, $\sigma_{\Psi, N}$ 对 N 的“局域”平均,

$$\langle z_{\Phi, N} \rangle_{\text{loc}} = \frac{1}{2\delta N + 1} \sum_{N' = N - \delta N}^{N + \delta N} z_{\Phi, N'}, \quad \langle z_{\Psi, N} \rangle_{\text{loc}} = \frac{1}{2\delta N + 1} \sum_{N' = N - \delta N}^{N + \delta N} z_{\Psi, N'},$$
$$\langle \sigma_{\Phi, N} \rangle_{\text{loc}} = \frac{1}{2\delta N + 1} \sum_{N' = N - \delta N}^{N + \delta N} \sigma_{\Phi, N'}, \quad \langle \sigma_{\Psi, N} \rangle_{\text{loc}} = \frac{1}{2\delta N + 1} \sum_{N' = N - \delta N}^{N + \delta N} \sigma_{\Psi, N'},$$

表 1 CUE

CUE	随机正交归一矢量	面包师变换	估计值
β_Φ	- 1. 995	- 2. 003	- 2
$\log C_\Phi$	0. 242	0. 343	$\log 2 \approx 0. 301$
μ_Φ	- 2. 508	- 2. 212	- 2. 5
$\log D_\Phi$	0. 196	0. 267	$\log 2 \sqrt{5} \approx 0. 651$
β_Ψ	- 0. 501	- 0. 501	- 0. 5
$\log C_\Psi$	- 0. 043	- 0. 055	$\log(\sqrt{\pi}/2) \approx - 0. 052$
μ_Ψ	- 1. 035	- 0. 802	- 1
$\log D_\Psi$	- 0. 835	- 0. 828	$\log(\sqrt{4 - \pi}/2) \approx - 0. 334$

表 2 COE

COE	随机正交归一矢量	面包师变换	估计值
β_Φ	- 1. 988	- 1. 999	- 2
$\log C_\Phi$	0. 444	0. 506	$\log 3 \approx 0. 471$
μ_Φ	- 2. 434	- 2. 236	- 2. 5
$\log D_\Phi$	0. 522	0. 469	$\log \sqrt{94} \approx 0. 987$
β_Ψ	- 0. 502	- 0. 503	- 0. 5
$\log C_\Psi$	- 0. 093	- 0. 094	$\log \sqrt{2/\pi} \approx - 0. 098$
μ_Ψ	- 0. 968	- 0. 800	- 1
$\log D_\Psi$	- 0. 762	- 0. 868	$\log \sqrt{\pi - 2/\pi} \approx - 0. 22$

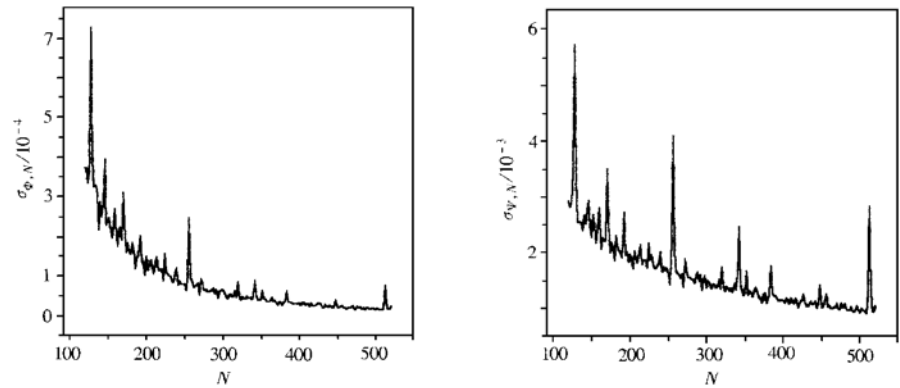


图 5 由量子面包师变换的本征态得到的 $\sigma_{\Phi, N}$ 和 $\sigma_{\Psi, N}$ (坐标表象)随 N 变化的关系图

其中下标 loc 表示对 N 求局域平均. 适当选取 δN 的大小使得所求得的“局域”平均不再有大的变化. 这样就得到 $\langle z_{\Phi, N} \rangle_{\text{loc}}$, $\langle z_{\Psi, N} \rangle_{\text{loc}}$, $\langle \sigma_{\Phi, N} \rangle_{\text{loc}}$ 和 $\langle \sigma_{\Psi, N} \rangle_{\text{loc}}$ 随 N 的变化(如图 6). 直线拟合可以得到标度率

$\langle z_{\Phi_N} \rangle_{\text{loc}} \approx C_{\Phi} N^{\beta_{\Phi}}, \quad \langle z_{\Psi_N} \rangle_{\text{loc}} \approx D_{\Psi} N^{\beta_{\Psi}}, \quad \langle \sigma_{\Phi_N} \rangle_{\text{loc}} \approx C_{\Psi} N^{\mu_{\Psi}}, \quad \langle \sigma_{\Psi_N} \rangle_{\text{loc}} \approx D_{\Phi} N^{\mu_{\Phi}},$
 在坐标表象和时反演对称表象的不同数值结果分别列在表 1 和 2 中.

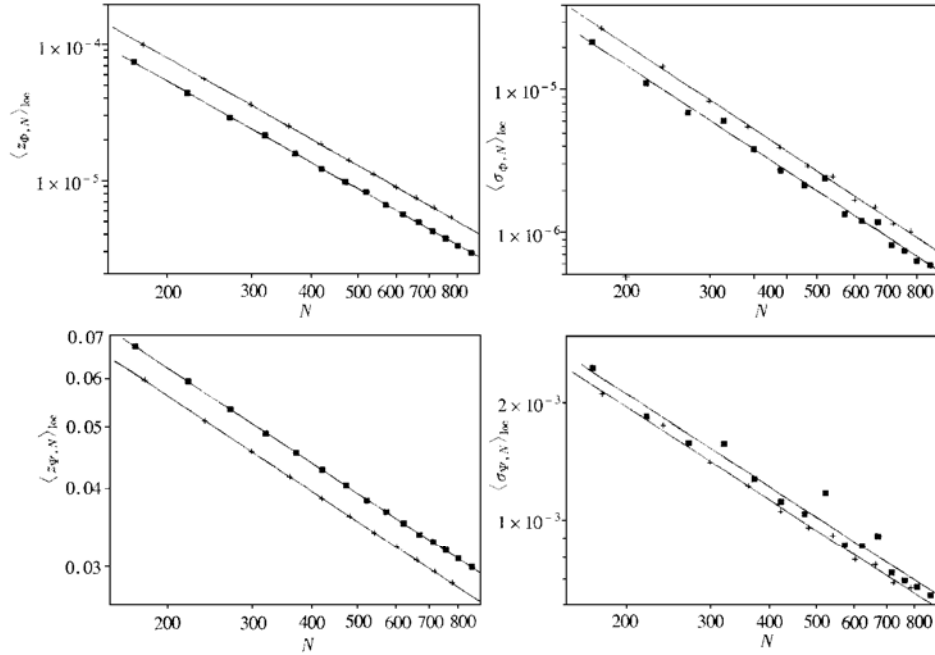


图 6 由量子面包师变换的本征态得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值 $\langle z_{\Phi_N(j)} \rangle_{\text{loc}}$ 和 $\langle z_{\Psi_N(j)} \rangle_{\text{loc}}$ 以及涨落 $\langle \sigma_{\Phi_N} \rangle_{\text{loc}}$ 和 $\langle \sigma_{\Psi_N} \rangle_{\text{loc}}$ 随 N 变化的关系 ■ 在坐标表象; + 在时间反演对称表象

3.3 讨论

从表 1 给出的数据可以看到, 由随机系综得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值与由面包师变换得到的结果基本相符. 另一方面, 它们的涨落, 尽管都与 N 有明显的标度关系, 但标度系数却有相当大的差异; 量子面包师变换比随机系综要大. 也就是说, 量子面包师变换的本征态的统计涨落随 N 的增大以较慢的速度趋于 0.

由随机矩阵理论可知, 随机正交归一矢量表示的是完全随机的态, 在 $N \rightarrow \infty$ 时, 其粗粒化 Wigner 分布趋于均匀分布, 因此是遍历性的. 由量子面包师变换本征态得到 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的涨落比由随机正交归一矢量得到的结果较大, 这正是量子本征态疤痕影响的结果. 疤痕的存在使得量子本征态偏离了遍历性, 而在经典周期轨道的位置有较大的起伏. 而且可以验证, 对于不同的模型系统, 由于其本征态疤痕的结构不同, 尽管其统计函数的涨落随 N 变化都满足一定的标度规律, 但标度系数却并不相同. 例如我们计算广义面包师变换^[20],

$$\begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q/w \\ wp \end{bmatrix} \quad \text{当 } 0 \leq q < w; \quad \begin{bmatrix} q' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q-w)/(1-w) \\ wp+w \end{bmatrix} \quad \text{当 } w \leq q \leq 1,$$

其中 $0 < w < 1$. 相应的量子演化算符为

$$U = G_N^{-1} \begin{bmatrix} G_{N'} & 0 \\ 0 & G_{N-N'} \end{bmatrix},$$

其中取 N' 使得 $N'/N = w$. 在坐标表象计算不同 w 时的 μ_Φ , 结果如表 3.

表 3 广义面包师变换

w	2/5	1/3	2/7	1/4	1/5	1/6	1/7
μ_Φ	- 2. 28	- 2. 25	- 2. 17	- 2. 19	- 2. 20	- 2. 24	- 2. 18

如果忽略矢量组的正交归一性, 只考虑 $\rho_k(j)$ 满足 (2) 或 (4) 式, 可以估算 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 平均值及其涨落 (如表 1 和 2 的第 4 列所示). 可以看到, 由随机矩阵得到的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均值与这一估算符合得很好; 而对于涨落来说, 尽管标度系数相符, 但涨落的大小则比估计值小得多. 可以看到, 正交归一条件的约束使得涨落的大小有所改变, 但并未改变涨落在 $N \rightarrow \infty$ 增大时趋向于 0 的速率,

4 结 语

为了深入地了解随机矩阵理论对量子混沌系统统计性质的预言, 我们数值地构造了“满足”随机矩阵理论的一些基本结果的随机正交归一矢量. 严格地讲, 这样得到的结果并不能保证是随机矩阵理论的一般结论, 但是, 在取足够多的样本作平均的情况下, 可以认为这样作是在随机矩阵理论的框架内的. 数值方法也使我们可以从更多的方面考察随机理论和实际系统的统计性质以及它们之间的关系, 从而对量子混沌系统的特征有进一步的了解.

数值结果表明, 将本征态的分量或分量的模方作为统计对象不能充分地反映出量子本征态的疤痕性质. 即便是求分量的模的 4 次方或开平方的涨落, 尽管单个统计变量可以具有疤痕的信息, 但统计起来也就消失了. 因此我们引入分别可以使本征态的凸起与凹陷得以保留的统计函数 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$, 并把它们作为统计变量, 从而使得疤痕的信息在统计中得以保留. 于是得到与随机矩阵理论不同的结果.

从统计的角度来研究量子混沌系统的优点在于可以得到一些普适性的规律. 由 (5) 和 (6) 式定义的 $\Phi_N(j)$ 和 $\Psi_N(j)$ 的平均涨落在半经典极限下的标度规律说明, 在半经典极限下, 量子混沌映射系统的本征态尽管并不保持相空间的遍历性质, 但非遍历的“程度”指数地下降. 文献 [21] 曾经研究了猫映射的粗粒熵在系综运动中对时间的平均值对遍历性的偏离随 N 变化 (对 N 求“局域”平均的意义下) 的标度规律, 这与本文的结果无疑是一致的.

- [1] M. V. Berry, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **A287**(1977), 237; *J. Phys.*, **A10**(1977), 2083.
- [2] A. Voros, in *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian System*, edited by G. Casati and G. Ford, *Lecture Notes in Physics Vol. 93*(Springer, Berlin, 1979), p. 326.
- [3] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum* (Springer Verlag, New York, 1992).
- [4] E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1515.
- [5] M. Feingold, R. G. Littlejohn, S. B. Solona, J. S. Pehling and O. Piro, *Phys. Lett.*, **A146**(1990), 199.
- [6] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian System: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, Cambridge,

- 1988); Gu Yan, Quantum Chaos (Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai, 1996) (in Chinese).
- [7] R. L. Waterland, J-M Yuan, C. C. Martens, R. E. Gillilan and W. P. Reinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 2733.
- [8] E. P. Wigner, *Soc. Indust. Appl. Mathem. Rev.*, **9**(1967), 1.
- [9] F. J. Dyson and M. L. Mehta, *J. Math. Phys.*, **4**(1963), 701.
- [10] C. E. Porter and G. Thomas, *Phys. Rev.*, **104**(1956), 483.
- [11] Xu Gongou, Chaotic Motions in Quantum Systems (Shanghai Scientific and Technological Publishing House, Shanghai, 1995) (in Chinese).
- [12] P. W. O' Connor and S. Tomsovic, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **207**(1991), 218.
- [13] E. J. Heller, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 1360.
- [14] N. L. Balazs and A. Voros, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **190**(1989), 1.
- [15] J. H. Hannay and M. V. Berry, *Physica*, **D1**(1980), 267.
- [16] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, Regular and Chaotic Dynamics (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [17] M. Saraceno and A. Voros, *Physica*, **D79**(1994), 206.
- [18] M. Saraceno, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **199**(1990), 37.
- [19] T. A. Brody, J. Flores, P. A. Mello, A. Pandey and S. S. M. Wong, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 385.
- [20] L. Kaplan, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **264**(1998), 171.
- [21] Y. Gu, J. Wang, *Phys. Lett.*, **A229**(1997), 208.

THE STATISTICAL NON-ERGODICITY OF THE EIGENSTATES OF THE QUANTUM CHAOTIC SYSTEMS AND ITS SEMI-CLASSICAL LIMIT

ZHANG FEI-ZHOU^{a)} WANG JIAO^{b)} GU YAN^{a)b)}

^{a)} (Department of Astronomy and Applied Physics, University of Science and
Technology of China, Hefei 230026)

^{b)} (Center for Nonlinear Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 28 December 1998; revised manuscript received 23 March 1999)

ABSTRACT

In the semi-classical limit, the non-ergodicity of the eigenstates, $\theta_k(j)$, of circular unitary ensemble (CUE) are investigated. To study statistically the non-ergodicity of the eigenstates of a quantum system, a pair of statistical functions, $\Phi_N(j) = \sum_{k=0}^{N-1} |\theta_k(j)|^4$ and $\Psi_N(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{|\theta_k(j)|^2}$, are defined to show the scars and anti-scars respectively. In the frame of Random Matrix Theory, $\Phi_N(j)$ s and $\Psi_N(j)$ s for random orthohormal unit vectors are calculated. It is shown that their averages and fluctuations will tend to zero with the increase of N , while they follow the scaling laws. Compared with $\Phi_N(j)$ s and $\Psi_N(j)$ s obtained from the eigenstates of the quantum baker's transformation, it is found that, with the presence of scars (or antiscars), the fluctuations of the statistical functions of the eigenstates of the quantum baker's transformation will be greater than those of the random matrices, and tend to zero much slower in the semi-classical limit of $N \rightarrow \infty$.

PACC: 0545; 0300