

Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵^{*}

罗智坚 朱建阳[†]

(江西师范大学物理系, 南昌 330027)

(1998 年 9 月 21 日收到)

利用 brick-wall 方法计算了 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的自由能和熵, 得出了 Dirac 场的熵与黑洞视界面积成正比的结论, 并进一步指出了 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵为相应 Klein-Gordon 场的熵的 $7/2$ 倍.

PACC: 0470D; 0460

1 引 言

自从 Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞熵与其视界面积成正比以来^[1-3], 人们就一直致力于探求黑洞熵的统计起源, 因而各种求熵的方法应运而生^[4-8], 其中一种用得最多的方法是 't Hooft 提出的 brick-wall 方法^[7]. 't Hooft 利用这种方法研究了 Schwarzschild 黑洞背景下自由标量场的统计性质, 得到了熵关于视界面积的一个表达式, 验证了熵与其视界面积成正比, 并且当截断因子满足一定的关系时, 熵可写成 $S = A_H/4$ 的形式, 而当截断因子趋于零时, 熵会发散. 他认为这一发散是由于视界附近态密度会趋于无穷造成的. 此后, 人们用该方法研究了各种黑洞的熵. 但以往利用 brick-wall 方法只研究了自由标量场的熵, 对 Dirac 旋量场尚未作过任何相关的研究, 因而有必要进一步推广到 Dirac 场的情况.

本文将尝试在 Dirac 旋量场中利用 brick-wall 方法来计算黑洞的自由能和熵, 得到了关于 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的自由能和熵的表达式, 其形式与 de Alwis 等人^[9]利用泛函积分方法得到的结果一致. 结果表明, Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵也与视界面积成正比, 并且当选择与标量场情况相同的紫外截断因子时, 其 Dirac 场的熵 $7/2$ 倍于标量场的熵.

本文将 Schwarzschild 时空中的 Dirac 方程退耦, 然后利用 WKB 方法近似求径向解, 再利用 brick-wall 方法求自由能和熵.

2 Schwarzschild 时空中 Dirac 场方程

弯曲时空中, 旋量粒子的动力学行为可由如下旋标架形式的 Dirac 场方程描述^[10]:

^{*} 江西省自然科学基金(批准号: 961253)资助的课题.

[†] 通讯联系人.

$$\begin{aligned}
(D + \varepsilon - \rho) F_1 + (\bar{\delta} + \pi - \alpha) F_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \mu_0 G_1, \\
(\Delta' + \mu - \gamma) F_2 + (\delta + \beta - \tau) F_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \mu_0 G_2, \\
(D + \varepsilon^* - \rho^*) G_2 - (\delta + \pi^* - \alpha^*) G_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \mu_0 F_2, \\
(\Delta' + \mu^* - \gamma^*) G_1 - (\bar{\delta} + \beta^* - \tau^*) G_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \mu_0 F_1,
\end{aligned} \tag{1}$$

式中 μ_0 为 Dirac 旋量粒子的质量, F_1, F_2, G_1, G_2 为四分量旋量, $D, \Delta', \delta, \bar{\delta}$ 为普通微分算符, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ 等为旋系数, 它们与零标架 ($l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$) 之间的关系定义为

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu), \quad \rho = l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, \\
\beta &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu), \quad \pi = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu, \\
\gamma &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu), \quad \mu = -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu, \\
\varepsilon &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu), \quad \tau = l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$D = l^\mu \partial_\mu, \quad \Delta' = n^\mu \partial_\mu, \quad \delta = m^\mu \partial_\mu, \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu, \tag{3}$$

式中零标架 ($l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$) 构成零矢量并满足伪正交条件和度规条件

$$\begin{aligned}
l^\mu n_\mu &= -m^\mu \bar{m}_\mu = 1, \\
l^\mu l_\mu &= n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \\
l^\mu m_\mu &= l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \\
g_{\mu\nu} &= l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu.
\end{aligned} \tag{4}$$

以 Schwarzschild 黑洞为背景时空

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{5}$$

选取零标架

$$\begin{aligned}
l^\mu &= \frac{1}{\Delta} (r^2, \Delta, 0, 0), \quad n^\mu = \frac{1}{2r^2} (r^2, -\Delta, 0, 0), \\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta}\right), \quad \bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, -\frac{i}{\sin \theta}\right),
\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\Delta = r^2 - 2Mr$, 并根据时空的对称性质引入四分量旋量

$$\begin{aligned}
F_1 &= e^{-iEt} e^{im\varphi} r^{-1} f_1(r, \theta), \\
F_2 &= e^{-iEt} e^{im\varphi} f_2(r, \theta), \\
G_2 &= e^{-iEt} e^{im\varphi} g_1(r, \theta), \\
G_1 &= e^{-iEt} e^{im\varphi} r^{-1} g_2(r, \theta),
\end{aligned} \tag{7}$$

则(1)式可具体表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0 f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_{1/2}^+ f_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} i \mu r g_1, \\
\Delta \mathcal{D}_{1/2}^+ f_2 - \sqrt{2} \mathcal{L}_{1/2} f_1 &= -\sqrt{2} i \mu r g_2, \\
\mathcal{D}_0 g_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}_{1/2} g_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} i \mu r f_2, \\
\Delta \mathcal{D}_{1/2}^+ g_1 + \sqrt{2} \mathcal{L}_{1/2}^+ g_2 &= -\sqrt{2} i \mu r f_1,
\end{aligned} \tag{8}$$

式中定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n &= \partial_r - i E \frac{r^2}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\
\mathcal{D}_n^+ &= \partial_r + i E \frac{r^2}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\
\mathcal{L}_n^+ &= \partial_\theta + \frac{m}{\sin \theta} + n \operatorname{ctg} \theta, \\
\mathcal{L}_n &= \partial_\theta - \frac{m}{\sin \theta} + n \operatorname{ctg} \theta.
\end{aligned}$$

进一步分离变量

$$\begin{aligned}
f_1(r, \theta) &= R_{-1/2}(r) \Theta_{-1/2}(\theta), \\
f_2(r, \theta) &= R_{+1/2}(r) \Theta_{+1/2}(\theta), \\
g_1(r, \theta) &= R_{+1/2}(r) \Theta_{-1/2}(\theta), \\
g_2(r, \theta) &= R_{-1/2}(r) \Theta_{+1/2}(\theta)
\end{aligned} \tag{9}$$

后, 可得关于 $R_{\pm 1/2}$, $\Theta_{\pm 1/2}$ 的退耦方程 (为简单起见, 令 $\mu_0 = 0$, 即只考虑无质量的 Dirac 旋量场.)

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{D}_{1/2}^+ \mathcal{D}_0 R_{-1/2} &= \lambda^2 R_{-1/2}, \\
\mathcal{D}_0 \Delta \mathcal{D}_{1/2}^+ R_{+1/2} &= \lambda^2 R_{+1/2}, \\
\mathcal{L}_{1/2} \mathcal{L}_{1/2}^+ \Theta_{+1/2} + \lambda^2 \Theta_{+1/2} &= 0, \\
\mathcal{L}_{1/2}^+ \mathcal{L}_{1/2} \Theta_{-1/2} + \lambda^2 \Theta_{-1/2} &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

将(10)式展开, 得

$$\Delta \frac{d^2 R_{-1/2}}{dr^2} + (r-M) \frac{dR_{-1/2}}{dr} + \left[\frac{E^2 r^4}{\Delta} - 2iEr + \frac{iEr^2(r-M)}{\Delta} - \lambda^2 \right] R_{-1/2} = 0, \tag{11}$$

$$\Delta \frac{d^2 R_{+1/2}}{dr^2} + 3(r-M) \frac{dR_{+1/2}}{dr} + \left[\frac{E^2 r^4}{\Delta} + 2iEr - \frac{iEr^2(r-M)}{\Delta} + 1 - \lambda^2 \right] R_{+1/2} = 0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \lambda^2 \right) \Theta_{\pm 1/2} + \left[\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \theta \mp \frac{m \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \right] \Theta_{\pm 1/2} = 0. \tag{13}$$

关于径向方程可利用 WKB 方法近似求解, 而角向方程只需要作适当的角坐标变换则可化为 Legendre 方程, 使得 Dirac 方程的角向解为 $e^{im\varphi} \Theta_{\pm}(\theta') = Y_{lm}(\theta', \varphi)$. 至此, 可以构造 Dirac 场的四分量波函数为

$$\phi = [F_1, F_2, G_1, G_2]^T \sim [r^{-1}R_-, R_+, R_+, r^{-1}R_-]^T Y_{lm}(\theta', \varphi) e^{-iEt}. \quad (14)$$

3 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵

由于 Dirac 场的波函数为四分量波函数, 为了求 Dirac 场的熵, 可分别计算出每一个分量所对应的熵, 再利用熵的可加性将各个分量所对应的熵相加, 即得 Dirac 场的总熵. 基于这种思想, 首先对 F_1 分量求熵. 利用 brick-wall 方法, 假设波函数在靠近视界 h 范围内消失, 即

$$F_1(r) = 0 \quad \text{当 } r \leq r_H + h, \quad (15)$$

且波函数在远离视界 L 处也消失, 即

$$F_1(r) = 0 \quad \text{当 } r \geq L, \quad (16)$$

式中 $r_H = 2M$ 为黑洞的事件视界位置, h 为一非负小量的紫外截断因子, L 为红外截断因子, 且 $L \gg r_H$.

F_1 的径向分量 $R_{-1/2}$ 满足 (10) 式, 即

$$\Delta \frac{d^2 R_{-1/2}}{dr^2} + (r - M) \frac{dR_{-1/2}}{dr} + \left[\frac{E^2 r^4}{\Delta} - 2iEr + \frac{iEr^2(r - M)}{\Delta} - \lambda^2 \right] R_{-1/2} = 0. \quad (17)$$

设解为 $R_{-1/2} = e^{iS_1(r)}$, 运用 WKB 近似可得

$$K_1^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (18)$$

式中 $K_1 = \partial_r S_1(r)$ 为径向波数.

假设所研究的 Dirac 场处于 Hartle-Hawking 真空态^[11], 此时 Dirac 场的温度应该为

Hawking 温度 $T_H = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}$. 根据正则系综理论, 费密体系的自由能可表示为

$$\beta f_1 = - \sum_E \ln(1 + e^{-\beta E}). \quad (19)$$

作为半经典处理, 视能态为连续分布, 因而求和改为积分

$$\sum_E \rightarrow \int_0^\infty dE g(E), \quad (20)$$

式中 $g(E)$ 为态密度, $g(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE}$, $\Gamma(E)$ 为微观态数目, 即

$$\Gamma(E) = \sum_{m, l} n_r(E, l, m) = \sum_l (2l+1) n_r(E, l) = \int_l (2l+1) dl \frac{1}{\pi} \int_r K_r(E, l) dr, \quad (21)$$

式中对角量子数的求和也作积分处理, 并且要求在积分时必须保持 $K_r(E, l) \geq 0$. 于是, 系统的自由能可表示为

$$\beta f_1 = - \int_0^\infty dE g_1(E) \ln(1 + e^{-\beta E})$$

$$\begin{aligned}
&= -\beta \int_0^\infty dE \frac{\Gamma(E)}{e^{\beta E} + 1} \\
&= -\frac{\beta}{\pi} \int_0^\infty dE \int_{2M+h}^L dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \int_l (2l+1) dl \\
&\quad \times (e^{\beta E} + 1)^{-1} \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2}} \\
&= -\frac{2}{3} \frac{\beta}{\pi} \int_{2M+h}^L dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} r^2 \int_0^\infty dE \frac{E^3}{e^{\beta E} + 1}.
\end{aligned} \tag{22}$$

对上式积分可知, 当 $L \gg 2M$ 和 $h \ll 2M$ 时, 自由能的主导项仅有两项, 即

$$f_1 \approx -\frac{7}{2} \frac{\pi^3}{90h} \left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 - \frac{2}{9\pi} L^3 \int_0^\infty dE \frac{E^3}{e^{\beta E} + 1}. \tag{23}$$

式中等号右端第一项为视界的内禀贡献, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 线性发散, 第二项为远距离围绕系统的真空所产生的作用, 相对而言其影响甚微, 可略去. 因此, Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的 F_1 分量所对应的自由能可近似表示为

$$f_1 \approx -\frac{7}{2} \frac{\pi^3}{90h} \left(\frac{2M}{\beta}\right)^4. \tag{24}$$

进一步可算得内能和熵分别为

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta f_1) = \frac{7}{8} \frac{2\pi^3}{15h} \left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{25}$$

$$S_1 = \beta (U_1 - f_1) = \frac{7}{8} \frac{8\pi^3}{45h} 2M \left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{26}$$

下面对 F_2 分量求熵. 利用 brick-wall 方法, 并作同样的截断, 即当 $r \leq r_H + h$, $r \geq L$ 时, 要求

$$F_2(r) = 0. \tag{27}$$

因为 F_2 的径向分量 $R_{+1/2}$ 满足(12)式, 即

$$\Delta \frac{d^2 R_{+1/2}}{dr^2} + 3(r-M) \frac{dR_{+1/2}}{dr} + \left[\frac{E^2 r^4}{\Delta} + 2iEr - \frac{iEr^2(r-M)}{\Delta} + 1 - \lambda^2 \right] R_{+1/2} = 0, \tag{28}$$

同样可设其解为 $R_{+1/2} = e^{iS_2(r)}$, 将其代入(28)式, 并利用 WKB 近似法, 可得

$$K_2^2 = \left[\frac{r^4 E^2}{r^2 - 2Mr} - l(l+1) + 1 \right] \frac{1}{r(r-2M)}, \tag{29}$$

式中 $K_2 = \partial_r S_2(r)$. 于是, F_2 对应的自由能可表示为

$$\begin{aligned}
f_2 &= -\int_0^\infty dE \frac{\Gamma(E)}{e^{\beta E} + 1} \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty dE \int_{2M+h}^L dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \int_l (2l+1) dl \\
&\quad \times (e^{\beta E} + 1)^{-1} \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)-1}{r^2}}
\end{aligned}$$

$$\approx -\frac{7}{2} \frac{\pi^3}{90 \hbar} \left(\frac{2M}{\beta} \right)^4 - \frac{2}{9\pi} L^3 \int_0^\infty dE \frac{E^3}{e^{\beta E} + 1}. \quad (30)$$

基于同样的理由, 可以略去上式的后一部分, 于是

$$f_2 = f_1 \approx -\frac{7}{2} \frac{\pi^3}{90 \hbar} \left(\frac{2M}{\beta} \right)^4, \quad (31)$$

$$U_2 = U_1 = \frac{7}{8} \frac{2\pi^3}{15 \hbar} \left(\frac{2M}{\beta} \right)^4, \quad (32)$$

$$S_2 = S_1 = \frac{7}{8} \frac{8\pi^3}{45 \hbar} 2M \left(\frac{2M}{\beta} \right)^3. \quad (33)$$

同理, 可分别计算出分量 G_1 , G_2 所对应的熵, 利用 brick-wall 方法, 计算表明 G_1 和 G_2 所对应的自由能和熵与 F_1 所对应的自由能和熵分别相等, 都为 f_1 和 S_1 , 因此 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的自由能和熵可分别写为

$$F = 4f_1 \approx -\frac{7}{2} \frac{2\pi^3}{45 \hbar} \left(\frac{2M}{\beta} \right)^4, \quad (34)$$

$$S = 4S_1 = \frac{7}{2} \frac{8\pi^3}{45 \hbar} 2M \left(\frac{2M}{\beta} \right)^3. \quad (35)$$

对于 Schwarzschild 黑洞

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{k} = 8\pi M, \quad (36)$$

若 $\hbar$ 满足下列关系式:

$$\hbar = \frac{1}{720\pi M}, \quad (37)$$

即选择与标量场情况相同的紫外截断因子时^[7], 熵可表为

$$S = \frac{7}{2} 4\pi M^2. \quad (38)$$

又因为 Schwarzschild 黑洞视界面积为

$$A_H = 4\pi R_H^2 = 16\pi M^2, \quad (39)$$

则 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵可写为 $S = \frac{7}{2} \frac{A_H}{4}$, 这与文献[9]得出的结果相符.

4 结 论

本文从 Schwarzschild 背景时空中的 Dirac 场方程出发, 方程退耦后用 WKB 方法近似求径向解, 然后再利用 brick-wall 方法, 计算 Dirac 场的自由能和熵, 其结果与文献[9]利用泛函积分方法得出的结果一致, 表明 Schwarzschild 黑洞背景下 Dirac 场的熵也与视界面积成正比, 并且当选择与标量场情况相同的紫外截断因子时, 熵可表述为 $S = \frac{7}{2} \frac{A_H}{4}$, 即为相应 Klein-Gordon 场的熵的 7/2 倍.

[1] J. Bekenstein, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 2333.

- [2] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**(1975), 199.
- [3] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 2752.
- [4] J. W. York, *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 2929.
- [5] V. Frolov, I. Novikov, *Phys. Rev.*, **D48**(1993), 4545.
- [6] L. Susskind, J. Uglum, *Phys. Rev.*, **D50**(1994), 2700.
- [7] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B256**(1985), 727.
- [8] D. X. Wang, *Phys. Rev.*, **D53**(1996), 5705.
- [9] S. P. de Alwis, N. Ohta, *Phys. Rev.*, **D52**(1995), 3529.
- [10] S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A349**(1976), 571.
- [11] B. Hartle, S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2188.

ENTROPY OF THE DIRAC FIELD IN SCHWARZSCHILD BLACK HOLE *

LUO ZHI-JIAN ZHU JIAN-YANG

(*Department of Physics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027*)

(Received 21 September 1998)

ABSTRACT

By using of the brick-wall method, we calculate the free energy and the entropy of Dirac spinor field in Schwarzschild black hole. It shows that the entropy of Dirac field is proportional to the area of black hole horizon and the entropy of Dirac field is $7/2$ times that of Klein-Gordon field.

PACC: 0470D; 0460

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province (Grant No.961253), China.