

利用相空间压缩实现混沌与超混沌控制^{*}

罗晓曙

(广西师范大学物理与电子科学系, 桂林 541004)
(1998 年 5 月 22 日收到; 1998 年 8 月 31 日收到修改稿)

提出一种通过压缩非线性系统轨道的相空间实现混沌和超混沌控制的方法. 以 Henon 映象、Lorenz 系统和 Rossler 超混沌系统为例, 进行了数值研究. 结果表明: 该方法能有效地控制非线性系统中的混沌和超混沌行为, 并获得 98 P 的高周期稳定轨道.

PACC: 0545

1 引言

由于非线性系统的运动对初值的敏感依赖性及在相空间中的遍历, 它在一定条件下出现的混沌一度被认为是不可捉摸和不可控制的, 实际应用中人们总是设法回避和抵制. 1990 年, Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的原理, 并在电路中实现^[1,2]之后, Ott 等人利用混沌运动对初值的依赖和各态历经, 实现了失稳周期的控制^[3]. 随后各种控制方法应运而生, 而且超混沌的控制也取得了成功^[4].

迄今已有的混沌控制方法一般分为两种: 一种是对混沌系统的参数进行微扰, 达到失稳周期轨道的稳定控制; 另一种是对系统变量实施反馈和微扰, 达到人们期望的目标轨道. 本文提出一种通过限制混沌和超混沌系统奇怪吸引子演化空间, 实现混沌和超混沌控制的方法, 成功地实现了对离散映象混沌系统、连续混沌和超混沌系统的稳定控制. 对 Henon 映象的控制, 获得了 98 P 的高周期稳定轨道.

2 控制方法

考虑如下的 N 维动力学系统:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{X} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$. 设方程(1)在一定的参数空间内的解为混沌解, 则其解的轨线在相空间中表现为奇怪吸引子. 由奇怪吸引子的特性可知, 解的轨线将被限制在一个有界的空间 V 内, 选取 V 的一个非空子集 W, 有 $W \subset V$, 将方程(1)的解限制在空间 W 内, 则对于某个变量 x_i ($x_i \in \mathbf{X}$), 按下式对其轨道演化进行控制:

^{*} 广西壮族自治区教育厅科学基金(批准号: 9816940)资助的课题.

$$x_i = \begin{cases} x_i & x_{\min} < x_i < x_{\max}, \\ x_{\max} & x_i \geq x_{\max}, \\ x_{\min} & x_i \leq x_{\min} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中 $x_{\min}, x_{\max} \in W$.

上述控制方法为什么能有效地对混沌系统甚至超混沌系统进行控制,作者初步分析认为:对混沌和超混沌系统的轨道空间进行压缩,实质上是限制了其相轨道在空间中的自由伸缩和扩张.众所周知,具有正的李雅普诺夫指数 λ 值是非线性系统具有混沌或超混沌解的本质特征,而正的 λ 值反映的是非线性系统的轨道在某个方向或环面上产生的发散或扩张.对非线性系统解的轨道演化空间作限制,限制其自由发散或扩张,就可能影响正的李雅普诺夫指数 λ 值.若 λ 由正值转变为负值,则非线性系统将由混沌或超混沌态转变为周期态或拟周期态.对于 Lorenz 系统,当 $\sigma=16.0$, $r=45.92$, $b=4.0$ 时,其最大李雅普诺夫指数 $\lambda=2.16^{[6]}$,当 W 的边界取为 $x[-20.0, 20.0]$, $y[-25.0, 25.0]$, $z[20.0, 60.0]$ 时,计算得到的最大李雅普诺夫指数 $\lambda=-0.1027$.计算结果证实了上述分析.

3 数值计算结果

用上述控制方法对 Henon 映象、Lorenz 系统和 Rossler 超混沌系统进行控制,系统的初值及各种参数采用双精度型数据,对连续非线性系统,用四阶龙格-库塔算法进行求解. Lorenz 系统积分 8 s, Rossler 超混沌系统积分 16 s 后加入控制,三种模型的方程分别如下:

1. Henon 映象

$$x_{n+1} = p_0 - x_n^2 + 0.3 y_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (3)$$

当 $p_0=1.152$ 时,方程(3)有混沌解^[5].

2. Lorenz 系统

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y - x), \\ dy/dt &= rx - xz - y, \\ dz/dt &= xy - bz. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\sigma=16.0$, $r=45.92$, $b=4.0$ 时, Lorenz 系统的解为混沌解^[5].

3. Rossler 超混沌系统

$$\begin{aligned} dx/dt &= -(y + z), \\ dy/dt &= x + ay + w, \\ dz/dt &= b + xz, \\ dw/dt &= cw - dz. \end{aligned} \quad (5)$$

当 $a=0.25$, $b=3.0$, $c=0.05$, $d=0.5$ 时,方程(5)有两个李氏指数 $\lambda > 0$,即 $\lambda_1=0.16$, $\lambda_2=0.03$.所以在上述参数下,方程(5)处于超混沌状态^[6].三种模型的控制结果分别示于图 1—图 3.

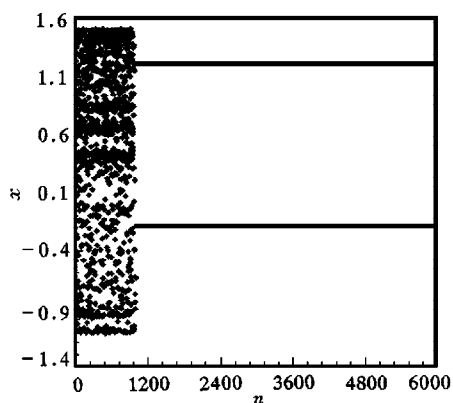
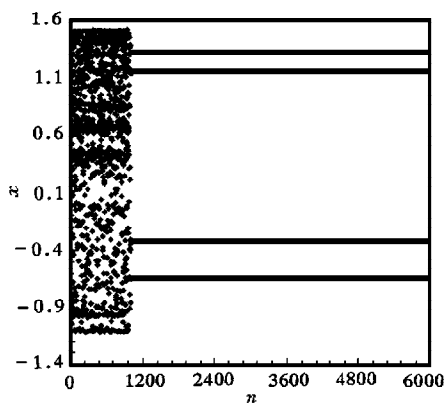
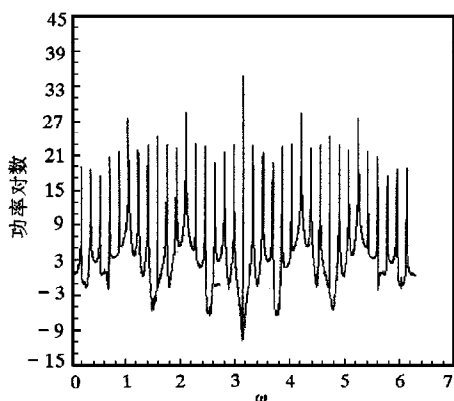
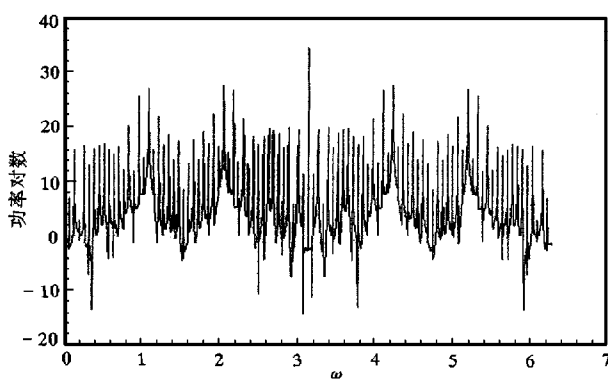
(a) 稳定 $2P$ 的控制结果 W 的边界: $x[-0.2, 1.2], y[-0.2, 1.2]$ (b) 稳定 $4P$ 的控制结果 W 的边界: $x[-0.8, 1.3], y[-0.8, 1.3]$ (c) 稳定 $36P$ 频谱图 W 的边界: $x[-1.0, 1.47], y[-1.0, 1.47]$ (d) 稳定 $98P$ 频谱图 W 的边界: $x[-1.0, 1.48], y[-1.0, 1.48]$

图 1 Henon 映象的控制结果

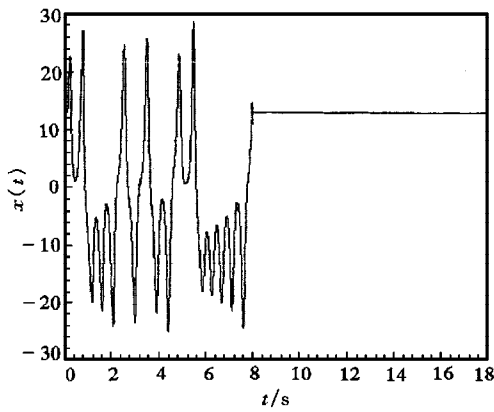
控制结果表明:被控制的周期轨道十分稳定.叠代运算或积分到 20 万步,周期轨道显示了长期高度稳定性,且控制结果与系统所取初值、起控点时刻等均无关.只要调整 V 的子空间 W 的边界,就可获得不同的控制结果.一般地,子空间 W 的边界靠近空间 V 的边界,可获得较高的周期轨道. W 的边界越缩小,只能获得较低的周期轨道.此外,从控制结果看,该控制方法的控制效率很高,加入控制后,只要几十步叠代就能稳定到周期状态.

4 结 论

本文提出的这种混沌和超混沌控制方法有以下特点:

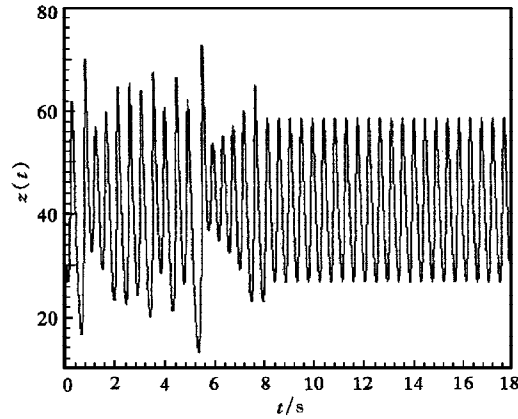
1. 这种控制方法不需要知道系统的方程,实际系统中,只要用一个门限检测器或限

幅器就可实施对混沌和超混沌系统的控制.也不用获取截面映象不稳定周期轨道的某些线性化特征,避免了繁琐和复杂的数学计算.



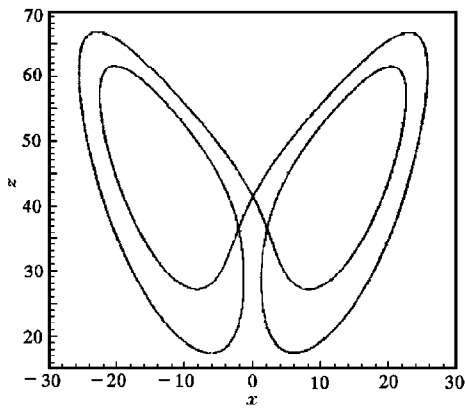
(a) 平衡点的控制结果 W 的边界:

$x[10.0, 13.2], y[10.0, 13.2], z[40.0, 50.0]$



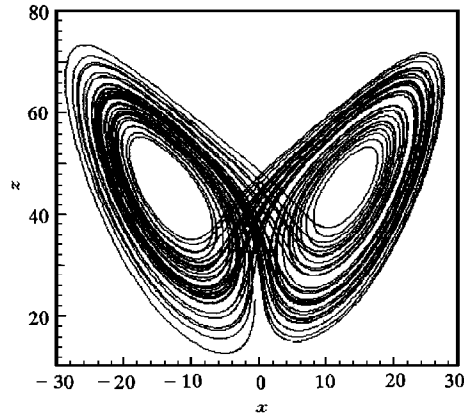
(b) 1P的控制结果 W 的边界:

$x[-20.0, 20.0], y[-25.0, 25.0], z[20.0, 60.0]$



(c) 4P的控制结果($x-z$ 相图) W 的边界:

$x[-28.0, 28.0], y[-32.0, 32.0], z[16.0, 70.0]$

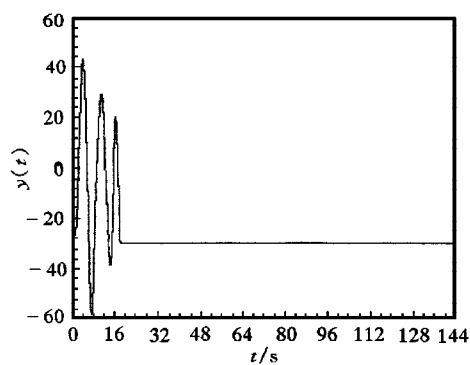


(d) 未控制的奇怪吸引子($x-z$ 相图)

图2 Lorenz系统的控制结果 积分步长 $h=0.002$

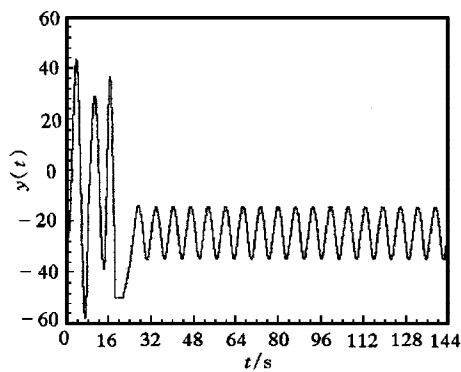
2. 过去人们已知,某些非线性系统只有在一定的参数空间内才出现混沌和超混沌运动,而在其他参数空间内可能出现周期或拟周期运动.从本文的控制结果看,对于一个非线性系统,即使满足了产生混沌或超混沌的参数条件,若不给非线性系统以足够大的演化空间,即限制其轨道的演化范围,则该系统也不会表现出混沌或超混沌行为,而表现出有序的周期行为.

本文所提出的混沌和超混沌控制方法对激光系统、化学反应系统的混沌控制可能具有一定的应用价值.



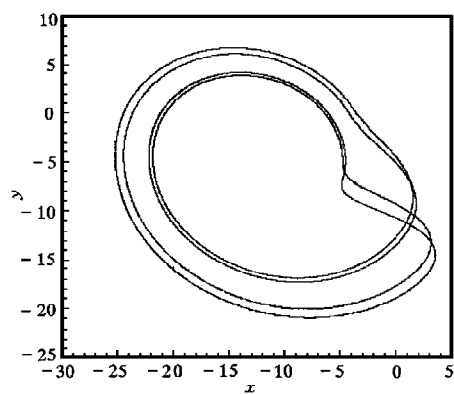
(a) 平衡点的控制结果

W 的边界: $x[-80.0, -20.0]$, $y[-30.0, 30.0]$,
 $z[30.0, 90.0]$, $w[20.0, 40.0]$



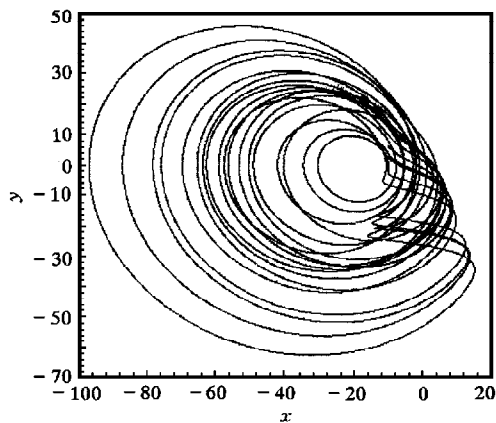
(b) 1 P 的控制结果

W 的边界: $x[-100.0, 1.0]$, $y[-50.0, 40.0]$,
 $z[25.0, 150.0]$, $w[16.0, 45.0]$



(c) 4 P 的控制结果 (x-z 相图)

W 的边界: $x[-105.0, 14.0]$, $y[-66.0, 48.0]$,
 $z[5.0, 260.0]$, $w[13.0, 52.0]$



(d) 未控制的奇怪吸引子 (x-y 相图)

图 3 Rossler 超混沌系统的控制结果 积分步长 $h=0.004$

感谢孔令江教授对本工作的支持和有益的讨论。

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 1196.
- [3] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.
- [4] Fang Jing-qing, *Chinese Science Bulletin*, **4**(1995), 306(in Chinese).
- [5] Hao Bai-lin, *Progress in Physics*, **3**(1983), 329(in Chinese).
- [6] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney *et al.*, *Physica*, **16D**(1985), 285.

USING PHASE SPACE COMPRESSION TO CONTROL CHAOS AND HYPERCHAOS*

LUO XIAO-SHU

(*Department of Physics and Electronics Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004*)

(Received 22 May 1998; revised manuscript received 31 August 1998)

ABSTRACT

A new method is used to control chaos and hyperchaos in nonlinear system by phase space compression. As examples, the Henon map and Lorenz system as well as Rossler hyperchaotic system are researched numerically. The results show that the behavior of chaos and hyperchaos in the nonlinear system can be controlled effectively by phase space compression and 98 P high periodic stable orbits can be obtained.

PACC: 0545

* Project supported by the Science Foundation of Education Bureau of Guangxi Zhuang Autonomous Region (Grant No. 9816940), China.