

抽运参数随时间慢变所诱发 Laser-Lorenz 方程的分岔与光学双稳态*

化存才 陆启韶

(北京航空航天大学理学院, 北京 100083)

(1998 年 7 月 29 日收到)

提出了新的简便的方法研究具有入射信号的半经典 Laser-Lorenz 方程. 由于抽运参数随时间慢变, 导致分岔滞后, 并诱发暂态的光学双稳态. 通过量级平衡和用线性化系统的慢变解作近似, 给出了分岔转迁的量级关系和暂态光学双稳态发生的条件, 并通过数值计算给出分岔转迁区间和暂态光学双稳态的滞后环.

PACC: 0547; 4265P; 0260

1 引 言

光学双稳态是激光物理方程中最重要的动力学行为之一, 它是由非线性和反馈引起的非平衡态的一级相变, 在光纤通讯、光计算机和具有记忆效应的双稳器件研制等方面应用广泛. 由半经典 Maxwell-Bloch 方程可导出若干一维光学双稳态方程^[1], 但那里的控制参数(输入光场)是常数. 为了光学理论与实验研究的实际需要, 如观察双稳态、激光输出的不稳定性等, 可让控制参数随时间缓慢变化, 其结果是动态稳定性交换推迟, 分岔值(第一阈值)滞后, 且可诱发暂态的光学双稳态. 在单模共振腔、饱和吸收体、二能级原子情形下, 对饱和吸收激光方程(LSA)及其简化的幅值方程的分岔研究都表明了这一点^[2-5], 并且在 Ar⁺ 激光实验^[6]中得到了证实. 文献[7]也研究了在控制参数随时间慢变时, 白噪声对 Fokker-Planck 方程分岔的滞后影响, 结果类似. 因为慢变参数的引入, 使 LSA 方程变成非自治系统, 以往对 LSA 方程的分岔研究, 大都采用奇异摄动方法(主要是匹配法)和数值方法, 其计算量大, 且对不出现分岔滞后的那些数值结果无法作出解释^[2-5].

本文提出新的简便的方法研究在单模共振腔、饱和吸收体、均匀加宽、二能级原子情形下具有入射信号的半经典 Laser-Lorenz 方程:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -E + AP + f(t), \\ \frac{dP}{dt} &= d(-P + ED), \\ \frac{dD}{dt} &= d_1(-D + 1 - EP),\end{aligned}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19872010)资助的课题.

$$E(0) = E_0 \ll 1, \quad P(0) = D(0) - 1 = 0, \quad (1)$$

其中 $f(t)$ 是入射信号, A 是分岔控制参数, 由抽运产生, 简称抽运参数, E 是归一化透射光场的强度幅值, P 和 D 分别是归一化的原子极化强度与粒子数反转的幅值, d, d_1 分别是由腔损耗常数归一化的原子的横向与纵向衰减率. 当抽运参数 A 随时间慢变时, 导致分岔滞后, 诱发暂态的光学双稳态. 我们通过量级平衡和用线性化系统的慢变解作近似, 给出了分岔转迁的量级关系和暂态光学双稳态发生的条件, 扩展和改进了文献[2]中的结果, 并通过数值计算给出分岔转迁区间和暂态光学双稳态的滞后环.

2 入射信号 $f(t) = e$ 是常数时的半经典 Laser-Lorenz 方程

考虑二能级原子的单模共振腔, 在饱和吸收体、均匀加宽、平均场极限条件下, 且入射信号 $f(t) = e$ 是常数半经典激光方程(以下总称 Laser-Lorenz)^[2,4]为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -E + AP + e, \\ \frac{dP}{dt} &= d(-P + ED), \\ \frac{dD}{dt} &= d_1(-D + 1 - EP). \end{aligned} \quad (2)$$

当(2)式中 A 是常数, 且 $e=0$ 时, (1)式的定常分岔值为 $A_c=1$, 它是产生激光的第一阈值. 当 $A < A_c$ 时, $E=P=0, D=1$ 是(2)式的稳定平衡态解; 当 $A > A_c$ 时, $E=P=0, D=1$ 是(2)式的不稳定平衡态解, 且还分岔出两支新的稳定平衡态解(相当于叉形分岔): $E = \pm\sqrt{A-1}, P = \pm A^{-1}\sqrt{A-1}, D = A^{-1}$. 图 1 给出叉形分岔图.

当(2)式中 $A = A(t) = A_0 + \epsilon t$ (其中 $0 < A_0 < 1, 0 < \epsilon \ll 1$ 是变化率)随时间慢变, 且 $e \neq 0$ 时, 考虑激光器在(2)式的定常分岔值 $A_c=1$ 附近的工作情况. 文献[2]利用摄动方法分析并预测此时的第一阈值(记为 A_{nc}), 得到第一阈值滞后(亦即 $A_{nc} > A_c$), 且诱发暂态光学双稳态的结果, 并作出物理解释, 认为这是由于“稳定性积累与不稳定性积累达到平衡”所产生的. 文献[4]则将(2)式经过摄动分析简化为较简单的幅值方程去研究. 本文尝试用新的简便的方法研究(2)式发生分岔转迁的量级关系和条件, 然后进行具体的分岔转迁与滞后现象的理论分析与数值计算.

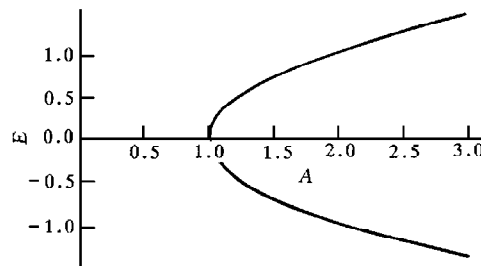


图1 (2)或(3)式的定常分岔图(叉形分岔)

作线性变换 $D = \bar{D} + 1$, 将(2)式化为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -E + A(t)P + e, \\ \frac{dP}{dt} &= d(E - P + E\bar{D}), \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = -d_1(\bar{D} + EP). \quad (3)$$

(3)式的线性化近似系统为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -E + A(t)P + e, \\ \frac{dP}{dt} &= d(E - P). \end{aligned} \quad (4)$$

本节研究(3)式,给出:

结论 1 当(3)式的线性化近似系统(4)式的慢变解在有限时间内适当小时,(3)式的慢变解可由线性化近似系统的解近似给出,只要它们的初始条件一致.

证明 记 $(E_1(t), P_1(t), \bar{D}_1(t)), (E_2(t), P_2(t))$ 分别为(3)与(4)式满足同样初始条件 $E_1(0) = E_2(0) = E_0, P_1(0) = P_2(0) = P_0, \bar{D}_1(0) = \bar{D}_0$ 的解,将它们分别代入(3)与(4)式,相减,化为等价的积分方程,得

$$\begin{aligned} E_1(t) - E_2(t) &= \int_0^t [- (E_1(t) - E_2(t)) + A(t)(P_1(t) - P_2(t))] dt, \\ P_1(t) - P_2(t) &= d \int_0^t [(1 + \bar{D}_1(t))(E_1(t) - E_2(t)) - (P_1(t) - P_2(t)) + E_2(t)\bar{D}_1(t)] dt. \end{aligned}$$

据条件,存在适当小的常数 m 和某个时刻 $\bar{t}$, 使

$$|E_2(t)| \leq m \quad 0 \leq t \leq \bar{t},$$

再据解对时间 t 的连续性^[8]和闭区间上连续函数的最大最小值定理,存在常数 M , 使

$$|\bar{D}_1(t)| \leq M \quad 0 \leq t \leq \bar{t},$$

又记 $L = \max\{1 + d(1 + M), |A(\bar{t})| + d\}$, 于是有

$$\begin{aligned} &|E_1(t) - E_2(t)| + |P_1(t) - P_2(t)| \\ &\leq \int_0^t [1 + d(1 + |\bar{D}_1(t)|)] |E_1(t) - E_2(t)| + (|A(t)| + d) |P_1(t) - P_2(t)| + d |E_2(t)| |\bar{D}_1(t)| dt \\ &\leq \int_0^t [L(|E_1(t) - E_2(t)| + |P_1(t) - P_2(t)|) + dmM] dt, \end{aligned}$$

最后据 Gronwall 不等式^[8], 有

$$|E_1(t) - E_2(t)| + |P_1(t) - P_2(t)| \leq dmM \exp Lt \leq dmM \exp L\bar{t}.$$

这表明当 m 适当小时,(3)与(4)式的解之差适当小,故结论 1 成立.

图 2 给出结论 1 的数值验证,表示光场 $E(t)$ 与慢变抽运参数 $A(t)$ 之间的关系,其中上支是(3)式的线性化近似系统(4)式的数值解,下支是(3)式的数值解,初值和参数值取为 $E_0 = 0.13, P(0) = 0, \bar{D}(0) = 0, d = d_1 = 0.38, e = 10^{-4}, A(t) = 0.3 + 0.1t$. 从图 2 看出,当 $0 \leq A(t) \leq 2.8$ 时,(3)与(4)式的慢变解几乎一致,且若 e 越小,线性化近似有效的区间越大.

从结论 1 得出,当(3)式的线性化近似系统的慢变解适当小时,存在临界时间 $t_{nc} > 0$,

$A(t_{nc}) = A_{nc} > A_c$ 使得当 $t \leq t_{nc}$, $A(t) \leq A_{nc}$ 时, (3) 式的慢变解趋于定常稳定平衡零解 $E = P = 0, \bar{D} = 0$; 当 $t > t_{nc}$, $A(t) > A_{nc}$ 时, (3) 式的慢变解很快趋于定常稳定平衡态非零解 $E = \pm \sqrt{A-1}, P = \pm A^{-1} \sqrt{A-1}, D = A^{-1}$ 这一过程称为 (3) 式的分岔转迁, 分岔转迁值 A_{nc} 也就是抽运参数随时间慢变所诱发的暂态光学双稳态的阈值, 且存在某个分岔转迁区间 $(A_{nc}, A_{nc} + a)$ (a 为某个常数), 在此区间内 (3) 式的解发生较大变化。

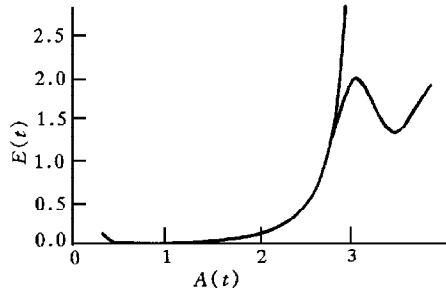


图 2 (3) 式与其线性化近似系统 (4) 式的慢变解比较

结论 2 (3) 式发生分岔转迁应满足下列量级关系:

$$E = O(\epsilon^{1/2}), \quad A(t) - 1 = O(\epsilon^{1/2}), \quad e = O(\epsilon), \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dE} = \frac{\epsilon}{-E(t) + A(t)P(t) + e} \leq O(\epsilon^{1/2}). \quad (6)$$

如果取如下的量级关系: $\frac{dA_1}{dE_1} \leq O(1), \frac{dA_1}{dP_1} \leq O(1)$, 即可由量级平衡得到 $1 + \eta_1 - \eta_2 = \eta_1 + \eta_2, \eta_3 = \eta_1 + \eta_2, 1 + \eta_1 - \eta_2 = 2\eta_1$, 从而 $\eta_1 = \eta_2 = 1/2, \eta_3 = 1$, 由此得 $E = O(\epsilon^{1/2}), A(t) - 1 = O(\epsilon^{1/2}), e = O(\epsilon)$ 和 $\frac{dA}{dE} \leq O(\epsilon^{1/2})$, 这就是 (5) 和 (6) 式, 注意到后者近似于定常分岔的条件: $\frac{dA}{dE} = 0$. 换言之, 要使 (3) 式发生分岔转迁, 必须分岔曲线 $E(t) - A(t)$ 与直线 $A = A_{nc}$ 近似相切, 即斜率的极限 $\lim_{A \rightarrow A_{nc}} \left. \frac{dA(t)}{dE(t)} \right|_{(3)} \approx 0$. 所以 (5) 和 (6) 式反映了 (3) 式发生分岔转迁的量级关系。

下面利用结论 1 和结论 2 进一步具体分析 (3) 式的分岔转迁和滞后现象。

(3) 式的线性化近似系统 (4) 式的近似解为

$$E = \sum_{j=1}^2 C_{1j} \exp \left[\int_0^t g_j(A(\tau)) d\tau \right], \quad P = \sum_{j=1}^2 C_{2j} \exp \left[\int_0^t g_j(A(\tau)) d\tau \right], \quad (7)$$

其中 $C_{1j}, C_{2j} (j=1, 2)$ 由初值条件确定, g_j 满足特征方程

$$g^2 + (d+1)g + d(1-A(t)) = 0. \quad (8)$$

现假设 $(d+1)^2 + 4d(A_0 - 1) > 0$, 以保证 (8) 式在 $A = A(t) = A_0 + \epsilon t$ 随时间的慢变过程中有实特征值. 根据结论 1, 当 $E(t), P(t)$ 适当小时, 可将 (7) 式代入 (6) 式以分析 (3) 式的分岔转迁现象. 有

$$\frac{dA}{dE} = \frac{\epsilon}{-\sum_{j=1}^2 C_{1j} \exp \left[\int_0^t g_j(A(\tau)) d\tau \right] + A(t) \sum_{j=1}^2 C_{2j} \exp \left[\int_0^t g_j(A(\tau)) d\tau \right] + e}.$$

下面仅考虑 $\frac{dA}{dE} \geq 0$ 的情形, 分三种情况讨论, 以便得出具体结果。

(1) 当 $e \geq O(\epsilon^{1/2}), A(t) < A_c = 1, \exp \left[\int_0^t g_j(A(\tau)) d\tau \right] \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{dA}{dE} \approx \frac{\epsilon}{e} \leq O(\epsilon^{1/2}),$$

(3)式的分岔转迁提前于定常分岔发生;

(ii) 当 $O(\epsilon) \leq e < O(\epsilon^{1/2})$, $A(t) - 1 \leq O(\epsilon^{1/2})$, $\exp \left[\int_0^t g_1(A(\tau)) d\tau \right] < O(1)$ 时,

$$\frac{dA}{dE} \approx \frac{\epsilon}{(A(t) - 1) C_{21} \exp \left[\int_0^t g_1(A(\tau)) d\tau \right]} \approx O(\epsilon^{1/2}),$$

(3)式的分岔转迁几乎与定常分岔一致, 几乎没有滞后现象, 其中

$$g_1(A(\tau)) = \frac{-(d+1) + \sqrt{(d+1)^2 + 4d(A(\tau) - 1)}}{2};$$

(iii) 当 $0 \leq e < O(\epsilon)$, $\exp \left[\int_0^t g_1(A(\tau)) d\tau \right] \rightarrow O(1)$, $O(\epsilon^{1/2}) < A(t) - 1 \leq O(1)$ 时,

$$\frac{dA}{dE} \approx \frac{\epsilon}{A(t) C_{21} \exp \left[\int_0^t g_1(A(\tau)) d\tau \right]} \leq O(\epsilon^{1/2}),$$

(3)式的分岔转迁有滞后现象, 最大分岔转迁值 A_{nc} (即暂态光学双稳态的阈值) 可由

$\int_0^t g_1(A(\tau)) d\tau = 0$ 计算出来, 经简单运算, 有

$$\begin{aligned} & [(d+1)^2 + 4d(A-1)]^{3/2} - 3(d+1)(A-1) \\ &= [(d+1)^2 + 4d(A_0-1)]^{3/2} - 3(d+1)(A_0-1) \equiv \phi(A_0), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & 64d^3(A-1)^3 + (d+1)^2(48d^2-9)(A-1)^2 + 6(d+1)[2d(d+1)^3 \\ & - \phi(A_0)](A-1) + (d+1)^6 - \phi(A_0)^2 = 0. \end{aligned}$$

据文献[8]可得, 上述方程存在根 $A > 1$ 的必要条件是至少有一个系数小于零, 即

$$48d^2 - 9 < 0 \quad \text{或} \quad 2d(d+1)^3 - \phi(A_0) < 0 \quad \text{或} \quad (d+1)^6 - \phi(A_0)^2 < 0. \quad (9)$$

这也是关于 d, A_0 的必要条件. 例如取 $d = 0.38$, $A_0 = 0.3$, 则 $48d^2 - 9 < 0$ 成立, 通过 Mathematica 程序计算得 $A_{nc} = 2.7803 > A_c = 1$, 这表明分岔转迁值出现滞后, 且 A_{nc} 是 (3)式的分岔转迁区间 (2.7, 2.95) 的一个值, 见图 3. 图 3 分岔转迁区间按 (6) 式要求计算得到, 其中初值和参数值同图 2. 此外, 计算表明^[2], A_{nc} 与 $A_0 - 1$ 成正比, 与 d 成反比.

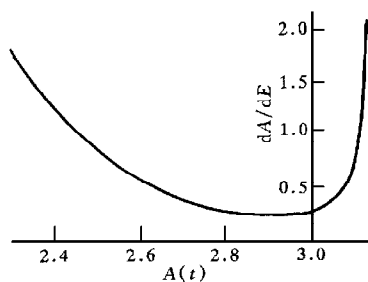


图 3 (3)式的分岔转迁区间

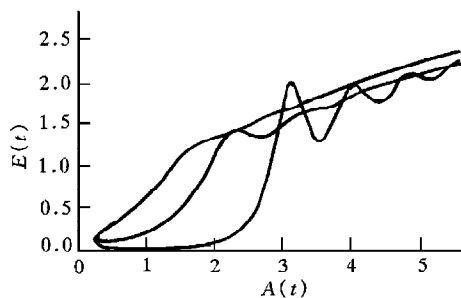


图 4 入射信号 e 对 (3) 式分岔的影响

文献[2]用解析方法和物理解释预测的结果相当于(iii), 但文献[2]得不到(i)(ii), 且无必要条件(9)式等. 此外这里的分析方法更为简便、一般. 上述分析的结果与数值结果一致, 见图 4. 图 4 上、中、下支分别取 $e = \epsilon^{1/2}$, $e = \epsilon$, $e = 10^{-4} \ll \epsilon$, 初值和参数值仍同图 1.

3 入射信号 $f(t) = e \cos \omega t$ 随时间周期变化时的半经典 Laser-Lorenz 方程

入射信号 $f(t) = e \cos \omega t$ 随时间周期变化时的半经典 Laser-Lorenz 方程为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -E + A(t)P + e \cos \omega t, \\ \frac{dP}{dt} &= d(E - P + E\bar{D}), \\ \frac{d\bar{D}}{dt} &= d_1(-\bar{D} - EP). \end{aligned} \quad (10)$$

通过数值计算讨论频率 ω 对分岔转迁滞后的影响, 给出分岔转迁区间和暂态光学双稳态的滞后环. 对低频情形, $\omega \ll O(\epsilon)$, 且慢变时间 ωt 很小时, $e \cos(\omega t) \approx e$, 结果同第 2 节; 对高频情形, 由于(10)式的线性化近似解不易解析地求出, 这里通过数值方法讨论. 分岔转迁区间按

$$\frac{dA}{dE} = \frac{\epsilon}{-E(t) + A(t)P(t) + e \cos \omega t} \quad (11)$$

计算得到. 计算中取 $\epsilon = 0.1$, $d = d_1 = 0.38$, $A_0 = 0.3$, $e = 10^{-4}$, 但初值不同, 见图 5.

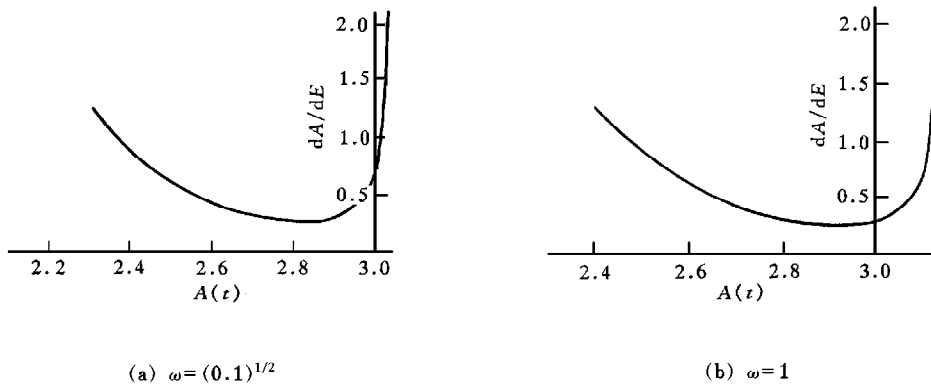


图 5 频率 ω 不同时(10)式的分岔转迁区间

上述计算表明, 最大分岔转迁滞后值与频率有关. 随 ω 由小变大, 分岔转迁区间依次为 $(2.60, 2.95)$, $(2.8, 3.05)$, 相应的暂态光学双稳态的阈值分别为 2.6, 2.8.

前面讨论的是 $A(t)$ 增大 ($A = A(t) = A_0 + \epsilon t$, $0 < A_0 < 1$), 且经过 $A_c = 1$ 时的情形 (下半稳定分支). 反之, 当 A 减小 ($A = A(t) = A_0 - \epsilon t$, $A_0 > 1$), 且经过 $A_c = 1$ 时可类似地讨论 (上半稳定分支). 因此计算得到与(10)式相应的暂态光学双稳态的滞后环, 见图 6.

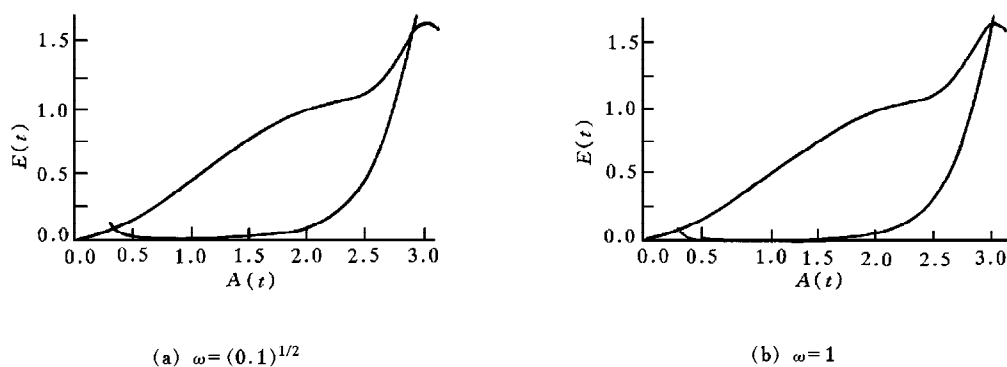


图 6 频率 ω 不同时(10)式的暂态光学双稳态滞后环

4 结论与讨论

本文提出新的简便的方法研究在单模共振腔、饱和吸收体、均匀加宽、二能级原子情形下,具有入射信号的半经典 Laser-Lorenz 方程.抽运参数随时间慢变,导致分岔滞后,诱发暂态光学双稳态.通过量级平衡和用线性化系统的慢变解作近似,给出了分岔转迁的量级关系和暂态光学双稳态发生的条件,扩展和改进了文献[2]的结果.通过数值计算给出分岔转迁区间和暂态光学双稳态滞后环.本文的方法具有一般性,可应用于其他的问题.由于能很方便地计算出发生分岔转迁区间,从而确定出发生暂态光学双稳态的阈值,这对实验研究会有帮助.

- [1] Li Fu-li, *Advanced Laser Physics* (Press of University of Science and Technology of China, Hefei, 1992) (in Chinese).
- [2] P. Mandel, T. Erneux, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1818.
- [3] T. Erneux, P. Mandel, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 1902.
- [4] T. Erneux, P. Mandel, *SIAM J. Appl. Math.*, **46**(1986), 1.
- [5] P. Mandel, T. Erneux, *J. Stat. Phys.*, **48**(1987), 1059.
- [6] W. Scharpf *et al.*, *Opt. Commun.*, **63**(1987), 344.
- [7] G. Broggi, A. Colombo, L. A. Lugiato *et al.*, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 3635.
- [8] Lu Qi-shao, *Qualitative Methods and Bifurcations for Ordinary Differential Equations* (Press of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 1989) (in Chinese).

BIFURCATION AND OPTICAL BISTABILITY OF LASER-LORENZ EQUATIONS INDUCED BY A PUMP PARAMETER SLOWLY VARYING WITH TIME^{*}

HUA CUN-CAI LU QI-SHAO

(*College of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083*)

(Received 29 July 1998)

ABSTRACT

In this paper, a new and simple method is presented for studying the semi-classical Laser-Lorenz equations with an injected signal. The pump parameter varies slowly with time, thus it induces delayed bifurcation and transient optical bistability. By scale balancing and approximating to the slowly-varying solution by that of the linearized system, a scaling transition relation and a condition for transient optical bistability are given. The intervals of values of bifurcation and transition, and hysteresis loops of the transient optical bistability are given by numerical analysis.

PACC: 0547; 4265P; 0260

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19872010).