

Sine-Gordon 方程的微扰问题^{*}

唐 翌¹⁾ 颜家壬²⁾ 张凯旺¹⁾ 陈振华³⁾

¹⁾(湘潭大学物理系,湘潭 411105)

²⁾(湖南师范大学物理系,长沙 410081)

³⁾(中南工业大学非平衡材料研究所,长沙 410083)

(1997 年 6 月 17 日收到;1998 年 8 月 3 日收到修改稿)

运用经典摄动理论中的多重尺度法和数学物理方法中常用的拉普拉斯变换法,求解了 sine-Gordon 方程的微扰问题,得到了不含长期项的一级修正解和孤子参数随时间的缓慢变化关系.

PACC: 4735; 4325

1 引 言

Sine-Gordon 方程在非线性物理学中具有非常重要的意义,它为许多物理现象提供了理想的数学模型^[1].关于其微扰问题的研究,较为典型的处理方法是采用所谓的“准静态近似”(quasi-stationary assumption).这种近似就是假定线性化的一级近似偏微分方程的解具有谐振形式的时间依赖关系^[2,3],利用它可将线性化的一级近似偏微分方程的求解转化为一个薛定谔方程形式的本征值问题的求解.从关于孤子微扰问题较为普遍的观点来看,微扰对孤子的影响表现为产生一个色散波形式的修正,同时使孤子参数随时间缓慢变化^[4,5].但是,迄今为止,利用直接法研究 sine-Gordon 方程的微扰问题,都是在没有直接考虑参数随时间缓慢变化情况下得到的一级修正解.本文运用研究孤子微扰问题较为有效的多重尺度法将微扰的 sine-Gordon 方程线性化.在这种方法中,孤子参数自然地假定随时间慢变量的函数,这也为消除一级近似解中潜在的长期项提供了条件.利用拉普拉斯变换法求解线性化的一级近似偏微分方程,文中得到了不含长期项的一级修正解和由长期项条件直接给出的参数随时间缓慢变化的关系式.

2 微扰的 sine-Gordon 方程的线性化

考虑一般形式的微扰的 sine-Gordon 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \epsilon R(u). \quad (1)$$

众所周知,在没有微扰影响的情况下,即 $\epsilon=0$,方程(1)具有如下形式的单孤子解:

^{*} 国家自然科学基金(批准号:19775013)资助的课题.

$$u_0(x, t) = 4 \tan^{-1} e^{m[x - \xi(t)]}, \quad (2)$$

其中

$$m = (1 - a^2)^{-1/2}, \quad \xi_t = a. \quad (3)$$

下面利用多重尺度法将方程(1)线性化^[6]. 首先引进一系列时间慢变量 $t_n = \epsilon^n t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 由于微扰的影响, 孤子参数 m, a, ξ 此时都随这些时间慢变量变化. 然后将方程(1)的解展开为

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \dots \quad (4)$$

同时, 根据求导规则, 由于引进了一系列独立的时间慢变量 t_n , 对时间的偏导数相应地展开为

$$\partial_t = \partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \dots \quad (5)$$

将方程(4)和(5)代入方程(1), 令 ϵ 的相同次幂的系数等于零, 得到如下各级近似方程:

$$u_{t_0 t_0}^{(0)} - u_{xx}^{(0)} + \sin u^{(0)} = 0, \quad (6)$$

$$u_{t_0 t_0}^{(1)} - u_{xx}^{(1)} + \cos u^{(0)} u^{(1)} = R[u^{(0)}] - 2u_{t_0 t_1}^{(0)}, \quad (7)$$

.....

很显然, 方程(6)为标准的 sine-Gordon 方程, 它具有形如方程(2)的单孤子解, 并且要求

$$m = (1 - a^2)^{-1/2}, \quad \xi_{t_0} = a. \quad (8)$$

用 $z = m[x - \xi(t)]$ 取代 x 作为新的空间变量, 将方程(7)重新写成如下形式:

$$u_{t_0 t_0}^{(1)} - 2mau_{t_0}^{(1)} - \hat{L}u^{(1)} = F. \quad (9)$$

定义算子

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (2\operatorname{sech}^2 z - 1), \quad (10)$$

利用方程(2)和(8), 可得

$$\begin{aligned} F &\equiv R - 2u_{t_0 t_1}^{(0)} \\ &= R + 4m^3 a_{t_1} \phi_1(z) + 4m^2 a \xi_{t_1} \phi_2(z), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= (1 - a^2 z \tanh z) \operatorname{sech} z, \\ \phi_2(z) &= \tanh z \operatorname{sech} z. \end{aligned} \quad (12)$$

为了方便起见, 引进 $\tau = t/ma$ 作为新的时间变量, 将方程(9)重新写成

$$-\frac{1}{m^2 a^2} u_{\tau\tau}^{(1)} + 2u_{\tau z}^{(1)} + \hat{L}u^{(1)} = -F. \quad (13)$$

3 线性化方程的求解

下面采用数学物理方法中常用的拉普拉斯变换法求解方程(13). 对方程(13)实行拉普拉斯变换后, 得

$$-\frac{1}{m^2 a^2} s^2 \bar{u}^{(1)} + 2 s \bar{u}_z^{(1)} + \hat{L} \bar{u}^{(1)} = -\bar{F}(z, s). \quad (14)$$

为了将方程(14)转化为较为标准的形式求解,对其实行如下的变换:

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{V} e^{-sz}. \quad (15)$$

这样,将问题化成了一种可运用常用的本征展开法求解的形式

$$\hat{L} \bar{V} - \frac{s^2}{a^2} \bar{V} = -\bar{F}(z, s) e^{sz}. \quad (16)$$

前面定义的算子 $\hat{L}$ 为自共轭算子,其本征函数系构成一组正交完备化的基矢,方程(16)的求解,可将 $\bar{V}$ 按照这组正交完备化的基矢作傅里叶展开来进行.算子 $\hat{L}$ 的本征函数系在前人关于 **sine-Gordon** 方程微扰问题的研究工作也都被涉及到,并被作为展开基矢而应用^[7].通过计算,很容易得

$$\hat{L} \psi = \lambda \psi, \quad (17)$$

$$\psi(z, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(k^2 + 1)}} (\tanh z - i k) e^{i k z},$$

$$\lambda = -(k^2 + 1) \quad -\infty < k < +\infty, \quad (18)$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} z, \quad \lambda = 0. \quad (19)$$

现将 $\bar{V}$ 按照这组正交完备化基矢展开为

$$\bar{V}(z, s) = \int dk \bar{V}(k, s) \psi(z, k) + \bar{V}_0(s) \psi_0(z). \quad (20)$$

将方程(20)代入方程(16),经过一些简单的运算,不难求得

$$\bar{u}^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{s^2/a^2 + k^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \bar{F}(z', s) e^{-s(z-z')} \psi(z, k) \psi^*(z', k)$$

$$+ \frac{a^2}{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \bar{F}(z', s) e^{-s(z-z')} \psi_0(z) \psi_0(z'). \quad (21)$$

为了简单起见,考虑在 (t, z) 坐标系中非含时微扰的情形,在这种情形下,有

$$\bar{F}(z', s) = F(z')/s. \quad (22)$$

这样,方程(21)变为

$$\bar{u}^{(1)} = \frac{a^2}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{s^2 + a^2(k^2 + 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \bar{F}(z') e^{-s(z-z')} \psi(z, k) \psi^*(z', k)$$

$$+ \frac{a^2}{s^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \bar{F}(z') e^{-s(z-z')} \psi_0(z) \psi_0(z'). \quad (23)$$

对方程(23)实行拉普拉斯逆变换,可得

$$L^{-1}(\text{项 } 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' [\cos a\sqrt{(k^2 + 1)}(\tau - z + z') - 1] F(z') \psi(z, k) \psi^*(z', k), \quad (24)$$

$$L^{-1}(\text{项 } 2) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' (\tau - z + z')^2 F(z') \psi_0(z) \psi_0(z'). \quad (25)$$

4 参数随时间的变化关系与一级修正解

将解的第二项, 即(25)式展开后, 发现其中包含正比于 τ , τ^2 的项, 这样的项随时间增大而增大, 直至无穷大, 这就是通常所说的长期项. 显然要得到具有物理意义的解, 必须消除这样的项, 通常直接要求其等于零, 这样将得到如下条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz F(z) \phi_0(z) = 0, \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz F(z) z \phi_0(z) = 0. \quad (27)$$

同时, 方程(25)简化为

$$L^{-1}(\text{项 } 2) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' F(z') (z')^2 \phi_0(z) \phi_0(z'). \quad (28)$$

将方程(11)代入方程(26)和(27)后, 得到孤子参数随时间慢变量的变化关系为

$$a_{t_1} = -\frac{(1-a^2)^{3/2}}{4(2-a^2)} \int R[u^{(0)}(z)] \operatorname{sech} z dz, \quad (29)$$

$$\xi_{t_1} = -\frac{1-a^2}{4a} \int R[u^{(0)}(z)] z \operatorname{sech} z dz. \quad (30)$$

最后, 由方程(24)和(28), 得到微扰引起的对孤子的一级修正解为

$$u^{(1)}(z, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(k^2+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left[\cos a \sqrt{(k^2+1)} \left(\frac{t_0}{ma} - z + z' \right) - 1 \right] \\ \times F(z') \phi(z, k) \phi^*(z', k) + \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' F(z') \phi_0(z) (z')^2 \phi_0(z'). \quad (31)$$

5 讨 论

在前人利用直接法研究 sine-Gordon 方程微扰问题的工作中, 实际上并没有得到一个一致的结论^[2,3]. Kaup^[8]试图对这种分歧作出一些解释, 他认为解中包含长期项, 限制了微扰展开式的有效性, 是这种分歧的主要原因. Fernandez 等人^[9]并不同意这种观点, 但是我们认为采用“准静态近似”法, Kaup 提出的这种局限性难以克服. 基于这种原因, 本文开始就考虑了孤子参数对时间慢变量的依赖关系, 从而能在最后得到的解中直接消除存在的长期项, 并由此给出孤子参数随时间的演化关系. 另外, sine-Gordon 方程在微扰影响下孤子参数随时间的演化关系通常是由“绝热近似”(adiabatic approximation)法导出, 这种方法忽略了色散波形式的一级修正^[10-12]. 本文导出的孤子参数随时间的演化关系由于没有采用任何近似, 与“绝热近似”法导出的关系式不相同, 我们认为本文所导出的结果是严格的, 通过将本文所得到的一级修正解直接代入线性化的一级近似方程, 严格证明了本文结果的正确性.

[1] A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, S. E. Trullinger, *Physica*, **D1**(1980), 1.

- [2] M.B. Fogel, S.E. Trullinger, A.R. Bishop *et al.*, *Phys. Rev.*, **B15**(1977), 1578.
- [3] G. Reinisch, J.A. Krumhansl, *Phys. Rev.*, **B24**(1977), 835.
- [4] R.L. Herman, *J. Phys.*, **A23**(1990), 2327.
- [5] J.R. Yan, Yi Tang, *Phys. Rev.*, **E54**(1996), 6816.
- [6] A. Jeffrey, T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Thoery* (Boston Pitman, 1982).
- [7] R.J. Flesch, S.E. Trullinger, *J. Math. Phys.*, **28**(1987), 1619.
- [8] D.J. Kaup, *Phys. Rev.*, **B29**(1984), 1072.
- [9] J.C. Fernandez, J.P. Leon, G. Reinisch, *Phys. Rev.*, **B29**(1984), 1075.
- [10] D.W. McLaughlin, A.C. Scott, *Phys. Rev.*, **A18**(1978), 1652.
- [11] D.J. Bergmann *et al.*, *Phys. Rev.*, **A27**(1983), 3345.
- [12] P.J. Pascual, L. Vázquez, *Phys. Rev.*, **B32**(1984), 8305.

PERTURBATION THEORY FOR SINE-GORDON EQUATION *

TANG YI¹⁾ YAN JIA-REN²⁾ ZHANG KAI-WANG¹⁾ CHEN ZHEN-HUA³⁾

¹⁾(*Department of Physics, Xiangtan University, Xiangtan 411105*)

²⁾(*Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081*)

³⁾(*Institute of Nonequilibrium Materials, Center-South University of Technology, Changsha 410083*)

(Received 17 June 1997; revised manuscript received 3 August 1998)

ABSTRACT

Making use of the method of multiple scales from the classical perturbation theory and the general method of Laplace transformation from the mathematical physics methods, we have solved the perturbation problem for sine-Gordon equation, and obtained the first-order correction containing no secular terms, as well as the parameters slowly varied with time.

PACC: 4735; 4325

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19775013).