

广义相对论中加速电荷的辐射

唐智明 王永久

(湖南师范大学物理研究所, 长沙 410081)

(1998 年 7 月 7 日收到; 1998 年 8 月 13 日收到修改稿)

得到了广义相对论加速电荷的电磁场的严格表达式, 并计算了它的能量辐射.

PACC: 0314

1 广义 Møller 变换

我们在文献[1]中, 解任意加速参考系中的 Einstein 引力场方程, 得到一个新的度规:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 + g(t)x/c^2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

在特殊情况下, 当 $g(t) = g = \text{const}$ 时, 度规(1)式退化为 Møller 度规.

度规(1)式描述任意加速参考系中的引力场, 与度规(1)式相对应的自加速系向惯性系的变换为

$$\begin{aligned} X(x, t) &= c \int_{t_0}^t \text{sh} \left[\int_{t_0}^t \frac{g(t)}{c} dt \right] dt + x \text{ch} \int_{t_0}^t \frac{g(t)}{c} dt, \\ Y &= y, \quad Z = z, \\ T(x, t) &= \int_{t_0}^t \text{ch} \left[\int_{t_0}^t \frac{g(t)}{c} dt \right] dt + \frac{x}{c} \text{sh} \int_{t_0}^t \frac{g(t)}{c} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

当 $g(t) = g = \text{const}$ 时, 变换(2)式退化为 Møller 变换,

$$\begin{aligned} X &= \frac{c^2}{g} \left(\text{ch} \frac{gt}{c} - 1 \right) + x \text{ch} \frac{gt}{c}, \\ Y &= y, \quad Z = z, \\ T &= \frac{c}{g} \text{sh} \frac{gt}{c} + \frac{x}{c} \text{sh} \frac{gt}{c}. \end{aligned} \quad (3)$$

本文首先讨论参考系原点作相对论振动的情况, 得到相应的时空坐标变换, 然后讨论广义相对论中 Maxwell 场方程的解, 从而得到相对论加速电荷的电磁场表达式和它的辐射能流密度的表达式. 本文不考虑电荷电磁场对时空弯曲的贡献和进而再对电磁场产生的影响, 因为它们过于微小^[2,3].

2 参考系原点作相对论振动的情况

当参考系原点作相对论振动时, (1)和(2)式中的 $g(t)$ 应表为^[4-6]

$$g(t) = -\frac{k^2 G_0}{m_0} \operatorname{sn}(u, w). \quad (4)$$

这时由(3)式可得

$$\begin{aligned} X &= G_0 \operatorname{sn}(u, w) + \left[\frac{G_0 \omega}{wc} \operatorname{dn}^2(u, w) - 1 \right] x, \\ Y &= y, \quad Z = z, \\ T &= \frac{G_0}{wc} E(u, w) - t + \frac{G_0 \omega}{wc} x \operatorname{cn}(u, w) \operatorname{dn}(u, w), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\operatorname{cn}(u, w)$, $\operatorname{sn}(u, w)$, $\operatorname{dn}(u, w)$, $E(u, w)$ 都是椭圆函数, 其中自变量

$$\begin{aligned} u = \omega t &= \left[\frac{k^2}{m_0} \left(1 + \frac{k^2 G_0}{4 m_0 c^2} \right) \right]^{1/2} t, \\ w &= \frac{k G_0}{w \sqrt{m_0} c} \left(1 + \frac{k^2 G_0}{4 m_0 c^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

当 $c \rightarrow \infty$, 即 $w \rightarrow 0$ 时, $\omega \rightarrow k/m_0^{-1/2}$, (6)式退化为非相对论的情况, 即当系统作经典振动时的情况,

$$\begin{aligned} X &= x + G_0 \sin \frac{k}{\sqrt{m_0}} t, \\ Y &= y, \quad Z = z, \\ T &= t_0. \end{aligned} \quad (7)$$

3 广义相对论加速电荷的电磁场

在任意曲线坐标系中, Maxwell 方程组具有如下形式:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}_{;\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (8)$$

用度规表示即

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{A}_\lambda}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \tilde{A}_\sigma}{\partial x^\lambda} \right) \right] = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (9)$$

Lorentz 条件可写为

$$\tilde{A}^{\mu}_{;\mu} = 0, \quad (10)$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\sigma} \tilde{A}_\sigma) = 0. \quad (11)$$

(8) — (11) 式中的 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{A}_\mu$ 表示任意曲线坐标系中的量, 以便与下面的平直时空中的量 $F^{\mu\nu}$ 和 A_μ 相区别.

将度规(3)式代入(9)和(11)式, 积分后得到

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 0, \quad \tilde{A}_3 = -\frac{eg}{c^2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^{-1}, \quad (12)$$

$\tilde{A}_0$ 满足方程

$$\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{1 + gx/c^2} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial z^2} = -4\pi c \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (13)$$

采用文献[4]中的方法, 可以给出(13)式的解

$$\tilde{A}_0 = \frac{eg}{c^2} \frac{(x + c^2/g)^2 + y^2 + z^2 + c^4/g^2}{\{[(x + c^2/g)^2 + y^2 + z^2 - c^4/g^2]^2 + 4c^4(y^2 + z^2)/g^2\}^{1/2}}. \quad (14)$$

下面用另外的方法给出(12)和(14)式. 将方程(9)和(11)的解写为

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{e}{c} g^{\alpha\lambda} h_{\alpha; \sigma; \lambda}, \quad (15)$$

式中

$$h_\mu = \frac{\frac{\partial s}{\partial x^\mu}}{\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial^2 s^2}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} - \Gamma_{\sigma\lambda}^\tau \frac{\partial s^2}{\partial x^\tau} \right)}. \quad (16)$$

(15) 式是平直空间中任意运动点电荷的推迟势的推广. 式中 s 为有限间隔, 它的表达式可由

$$s^2 = c^2 (\tilde{T} - T)^2 - (\tilde{X} - X)^2 - (\tilde{Y} - Y)^2 - (\tilde{Z} - Z)^2 = 0$$

借助于 Møller 变换(3)式得到

$$s^2 = 2 \frac{c^4}{g^2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) \operatorname{ch} \frac{g(\tilde{t} - t)}{c} - \frac{c^4}{g^2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 - \frac{c^4}{g^2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 - (\tilde{y} - y)^2 - (\tilde{z} - z)^2, \quad (17)$$

式中 $\tilde{T}$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ 和 $\tilde{Z}$ 是电荷的坐标; T , X , Y 和 Z 是观察点的坐标.

假定电荷位于 (x, y, z, t) 系的原点: $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z} = 0$, 可以得到 h_μ 的表达式

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{g}{4c} \left\{ \left[\frac{c^4}{g^2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) + y^2 + z^2 - \frac{c^4}{g^2} \right]^2 + 4 \frac{c^4}{g^2} (y^2 + z^2) \right\}^{1/2}, \\ h_1 &= -\frac{y}{2}, \quad h_2 = -\frac{z}{2}, \\ h_3 &= \frac{g}{4c(1 + gx/c^2)} \left[-\frac{c^4}{g^2} \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)^2 + y^2 + z^2 + \frac{c^4}{g^2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

将(18)式代入(15)式, 得到(12)和(14)式.

在平直空间(伽利略系)中, 矢量 A_μ 由下式确定:

$$A_\mu = \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\mu} \tilde{A}_\tau. \quad (19)$$

将(12)和(14)式代入上式,最后得到

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{c(x + c^2/g)[(x + c^2/g)^2 + Y^2 + Z^2 - c^2 T^2 + c^4/g^2]}{R[(x + c^2/g)^2 - c^2 T^2]} - \frac{ceT}{(x + c^2/g)^2 - c^2 T^2}, \\ A_y &= A_z = 0, \\ A_x &= \frac{ceT[(x + c^2/g)^2 + Y^2 + Z^2 - c^2 T^2 + c^4/g^2]}{R[(x + c^2/g)^2 - c^2 T^2]} - \frac{e(x + c^2/g)}{(x + c^2/g)^2 - c^2 T^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$R = \{[(x + c^2/g)^2 + Y^2 + Z^2 - c^2 T^2 - c^4/g^2] + 4c^4 g^{-2}(Y^2 + Z^2)\}^{1/2}.$$

将(20)式变换到柱坐标系 (t, ρ, z) 中,然后得到电磁场的表达式.令

$$cT = t, Y^2 + Z^2 = \rho^2, c^2/g = \lambda, x + c^2/g = z, \quad (21)$$

得到电磁场的表达式

$$\begin{aligned} E_\rho &= 8e\lambda^2 \frac{\rho z}{\eta^{3/2}}, \\ E_z &= -4e\lambda^2 \frac{\rho^2 - z^2 + t^2 + \lambda^2}{\eta^{3/2}}, \\ H_\varphi &= 8e\lambda^2 \frac{\rho t}{\eta^{3/2}}, \quad E_\varphi = H_\rho = H_z = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

式中

$$\eta = (\rho^2 + z^2 - t^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \rho^2.$$

4 相对论电荷的能量辐射

单位时间内,相对论加速电荷辐射的能量表示为

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (23)$$

式中积分区域是半径为 ρ 的圆柱面,将(22)式代入上式,得到^[4,5]

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} H_\varphi E_z \rho dz, \quad (24)$$

即

$$-\frac{dU}{dt} = 16ce^2 \rho^2 \lambda^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho^2 - z^2 + t^2 + \lambda^2) t dz}{[(\rho^2 + z^2 - t^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \rho^2]^3}. \quad (25)$$

时间坐标与空间坐标之间有推迟关系式

$$t = t' + \sqrt{\rho^2 + (z - \sqrt{\lambda^2 + t'^2})^2}. \quad (26)$$

在(26)式中令 $t' = 0$,代入(25)式,得到

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{ce^2 \rho^2}{2\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^2 - \lambda(z - \lambda)}{[(z - \lambda)^2 + \rho^2]^{5/2}} dz, \quad (27)$$

积分(27)式,最后得到能流密度

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} g^2.$$

此即相对论加速运动的点电荷所辐射的能流密度.

- [1] Tang Zhiming, *Chinese Science Bulletin*, **32**(1987), 237.
- [2] 王永久、彭秋和, 中国科学, **27A**(1984), 935.
- [3] 胡宁, 电动力学(人民教育出版社, 1963), § 17; 72.
- [4] Л. Л. 伊凡宁柯和 A. A. 索柯洛夫, 经典场论(科学出版社, 1961), § 12; 137.
- [5] Tang Zhiming *et al.*, *Chinese Science Bulletin*, **34**(1989), 964.
- [6] Tang Zhiming *et al.*, Proc. of Marcel Grossman Meet (Italy, 1995), 07:291.

RADIATING OF ACCELERATING CHARGE IN GENERAL RELATIVITY

TANG ZHI-MING WANG YONG-JIU

(Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081)

(Received 7 July 1998; revised manuscript received 13 August 1998)

ABSTRACT

Based on the previous paper, for accelerating charge in general relativity, we obtained the exact expressions of electromagnetic field and radiating energy.

PACC: 0314