

源具有质量多极矩的静态引力场稳定性研究*

彭方志 刘 辽

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(1998 年 2 月 20 日收到; 1998 年 5 月 25 日收到修改稿)

通过对具有质量多极矩的静态黑洞视界附近的 Hawking 辐射的研究, 发现这类黑洞的存在将违背黑洞热力学定律. 对这类引力场进行线性微扰, 发现在尘埃物质扰动下, 这类黑洞是不稳定的. 故宇宙中可能不存在具有质量多极矩的静态黑洞.

PACC: 0420

1 度规与线元

文献[1]中得出了长椭球坐标下具有质量多极矩的静态引力场解:

$$ds^2 = m^2 f^{-1} [e^{2\nu} (x^2 - y^2) (dx^2 (x^2 - 1)^{-1} + dy^2 (1 - y^2)^{-1}) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2] - f dt^2, \quad (1)$$

式中 $x = r/m - 1$, $y = \cos \theta$, 即长椭球坐标 (r, θ) 为普通球坐标,

$$f = \frac{x-1}{x+1} \exp[2Ax(x^2 - 3x^2y^2 + 3y^2 - y^4)(x^2 - y^2)^{-3}], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nu = & \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} + A \frac{1 - y^2}{2(x^2 - y^2)^4} [3(1 - 5y^2)(x^2 - y^2)^2 + 8y^2(3 - 5y^2)(x^2 - y^2) \\ & + 24y^4(1 - y^2)] + A^2 \frac{1 - y^2}{8(x^2 - y^2)^8} [-12(1 - 14y^2 + 25y^4)(x^2 - y^2)^5 \\ & + 3(3 - 153y^2 + 697y^4 - 675y^6)(x^2 - y^2)^4 + 32y^2(9 - 105y^2 + 259y^4 \\ & - 171y^6)(x^2 - y^2)^3 + 32y^4(45 - 271y^2 + 451y^4 - 225y^6)(x^2 - y^2)^2 \\ & + 2384y^6(1 - 4y^2 + 5y^4 - 2y^6)(x^2 - y^2) + 1152y^8(1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6)]. \end{aligned} \quad (3)$$

(1)–(3)式中 m 为质量, A 为由质量多极矩决定的常量,

$$A = \sum_n \frac{1}{n! m^{n+1}} Q_n, \quad Q_n \text{ 代表 } N \text{ 极多极矩.}$$

2 视界温度

由零曲面方程: $g^{\mu\nu} \frac{\partial F(t, x, y, \phi)}{\partial x^\mu} \frac{\partial F(t, x, y, \phi)}{\partial x^\nu} = 0$, 代入

* 国家自然科学基金(批准号: 19773003)资助的课题.

$$g_{00} = -f, g_{11} = m^2 f^{-1} e^{2\nu} (x^2 - y^2)(x^2 - 1)^{-1},$$

$$g_{22} = m^2 f^{-1} e^{2\nu} (x^2 - y^2)(1 - y^2)^{-1}, g_{33} = m^2 f^{-1} (x^2 - 1)(1 - y^2),$$

度规其余分量为 0, 考虑到度规与 t, ϕ 无关, 可知零曲面方程不含变量 t, ϕ , 可得出该黑

洞的视界面方程为 $g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 0$.

由 $g^{11} = g_{11}^{-1}, g^{22} = g_{22}^{-1}$ 可得该方程有解,

$$x - 1 = 0. \quad (4)$$

方程(4)至少是视界之一, (视界面方程可能还有其它解, 但本文不作讨论) 由此式可看出该视界为一闭合球面, 而且, 度规在 $r=0$ 处发散, 计算表明, $r=0$ 处存在本性奇点, 它被视界所包围. 根据文献[2], 黑洞存在并且有 Hawking 辐射. 视界的表面重力为

$$\kappa = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1, y \neq \pm 1} \left(\sqrt{\frac{-g^{11}}{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{1}{4m} \exp\left[\frac{A}{2}\right] \exp\left[-\frac{A^2}{8} \left(\frac{-12(1-14y^2+25y^4)}{(1-y^2)^2} + \frac{3(3-153y^2+697y^4-675y^6)}{(1-y^2)^3} \right. \right.$$

$$+ \frac{32y^2(9-105y^2+259y^4-171y^6)}{(1-y^2)^4} + \frac{32y^4(45-271y^2+451y^4-225y^6)}{(1-y^2)^5}$$

$$\left. + \frac{2384y^6(1-4y^2+5y^4-2y^6)}{(1-y^2)^6} + \frac{1152y^8(1-3y^2+3y^4-y^6)}{(1-y^2)^7} \right) \Bigg]. \quad (5)$$

由(5)式可看出, 当 $y \rightarrow \pm 1$ 时, $\kappa \rightarrow \infty$. 根据文献[3, 4]可知, 这类黑洞的 Hawking 温度在视界面上不是常量, 而且在两极: $\theta=0, \pi$, 即 $y = \cos \theta = \pm 1$ 处发散.

考虑到度规与时间无关, Hawking 温度在视界面上应该是常量, 而有意义的温度应该是非发散的. 因此这类黑洞违背了热力学第零定律, 可能是不存在的. 然而, 有质量多极矩的星体, 即质量多极矩的引力场源却是存在的.

3 尘埃物质扰动

根据文献[5], 如果引力场受到微小扰动, 度规 $g_{\mu\nu}$ 成为: $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$ 是一级微量. 在线性近似下, 设场方程对未受扰动的度规 $g_{\mu\nu}$, 能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 成立, 对扰动后的 $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ 和 $T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$ 也成立, $\delta T_{\mu\nu}$ 是一微量, 代表能量动量张量在扰动下的变化. 可得到下列方程组:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [h_{\alpha\beta;\mu;\nu} - h_{\beta\mu;\nu;\alpha} - h_{\beta\nu;\mu;\alpha} + h_{\mu\nu;\beta;\alpha}], \quad (6)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\pi \left\{ \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} \delta T_{\rho\sigma} - h_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma}) + h_{\mu\nu} T^{\rho\sigma}] \right\}, \quad (7)$$

式中“;”表示由未受扰动的联络构造的协变微分, 重复指标表示求和(以下同例), $\delta R_{\mu\nu}$ 表示里奇张量在扰动下的变分.

根据文献[1], 本文所研究的引力场, 源外为真空, 即能量动量张量 $T_{\mu\nu} = 0$. 当扰动是由尘埃物质引起时, 易知

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [h_{\alpha\beta;\mu;\nu} - h_{\beta\mu;\nu;\alpha} - h_{\beta\nu;\mu;\alpha} + h_{\mu\nu;\alpha;\beta}],$$

$$\delta T_{ij} = \delta T_{0i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \delta T_{00} = -\rho,$$

ρ 为尘埃物质的密度. 按文献[6]可设

$$h_{ij} = T_1(t)\delta_{ij}Q + T_2(t)Q_{;i;j}. \quad (8)$$

(8)式等号右端中的 Q 为一纯空间谐和标量^[7], 满足零阶谐和张量方程

$$g^{ij}Q_{;i;j} + k^2 Q = 0. \quad (9)$$

将(1)式代入(9)式, 并令 x 足够大, 考虑到 $y \ll x$, 可得方程(9)的渐进解为

$$Q = [We^{i\lambda\phi} + Be^{-i\lambda\phi}] \left[C \frac{1}{x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{imkx} + D \frac{1}{x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{imkx} \right] \\ \times [E(1-y^2)^{\lambda/2} P_n^{(\lambda)}(y) + F(1-y^2)^{\lambda/2} Q_n^{(\lambda)}(y)], \quad (10)$$

式中 W, B, C, D, E, F 为任意常数; λ, n 为正整数; $P_n^{(\lambda)}(y), Q_n^{(\lambda)}(y)$ 为伴随勒让德函数. 为计算方便, 取 W, B, C, D, E, F 的值, 使 Q 的虚部为零, 不影响所讨论问题的本质.

将(10), (8), (1)式代入方程组(6), (7), 令 x 足够大, 并略去 $O(1/x^4)$ 及其以上小量, 可得

$$\begin{cases} T_1' = T_2' \left[\frac{1}{x^3}(3 + i2mk) - \frac{1}{x^2}(imk) \right], \\ \left[-k^2 + \frac{3}{m^2 x^3} - i(k/mx^2 - 4k/mx^3) \right] T_2'' = \left[\frac{4k^2}{m^2 x^3} - i \frac{k^2}{m^2} (1/x^2 - 4/x^3) \right] T_2 \\ = Q^{-1} 8\pi\rho. \end{cases} \quad (11)$$

解此方程组可得

$$\begin{cases} T_1(t) = T_2(t) [3/x^3 - imk(1/x^2 - 2/x^3)] + C_5, \\ T_2(t) = C_1 e^{-iGt} + C_2 e^{iGt} + Zt^2 + i(C_3 e^{-kt} + C_4 e^{kt}), \end{cases} \quad (12)$$

式中 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 为常数, 而

$$G = \sqrt{\left(k^2 - \frac{3}{m^2 x^3} \right)^{-1} \frac{4k^2}{m^2 x^3}}, \quad Z = \left(k^2 - \frac{3}{m^2 x^3} \right)^{-1} Q^{-1} 8\pi\rho.$$

故此, 由文献[6]: $H = h_i^j h_j^i$, 将(8), (12)式代入即可求得 H , 为避免繁杂的计算, 考虑 x, t 足够大的情况, 最后可得

$$H \rightarrow a(x) [t^4 - Ce^{2kt}],$$

$a(x)$ 为一有界函数, 其有界性由谐和标量函数 Q 的有界性保证, C 为一常数. 由此可知, 在尘埃物质扰动下, 由度规的微小变分构造的标量随时间的增加而无限增加, 这将导致度规本身的改变. 因此本文所讨论的引力场是不稳定的.

4 讨 论

具有质量多极矩的静态黑洞的存在, 会引起诸如温度发散, 温度不平衡, 奇点裸露等困难; 并且, 这种引力场在尘埃物质扰动下是不稳定的. 因此具有质量多极矩的静态黑洞

很可能是 not 存在的. 当然, 这里的讨论很大程度上依赖于线性微扰理论的有效性.

感谢赵峥教授、李翔硕士, 吴小宁硕士的帮助.

- [1] Ts I. Gutsnaya and V. S. Manko, *Gen. Relat. Grav.*, **17**(1985), 1025.
- [2] L. Liu, *J. Phys. Apr.*, (1982), 519(in Chinese).
- [3] Z. Zhao, X. X. Dai, *J. Beijing Normal University (Natural Science)*, **27**(2)1991, 26(in Chinese).
- [4] Z. Zhao, Y. X. Gui, *J. Astro-physics*, **3**(1983), 10(in Chinese).
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*(Science Publishing House, Beijing, 1980), p. 355(in Chinese).
- [6] J. M. Xu, L. Liu, L. X. Li, *Phys. Rev.*, **D50**(1994), 4886.
- [7] J. M. Bardeen, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 1882.

THE STABILITY OF A STATIC BLACK-HOLE WITH MASS MULTIPOLE MOMENT^{*}

PENG FAN-ZHI LIU LIAO

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

(Received 20 February 1998; revised manuscript received 25 May 1998)

ABSTRACT

By studying the Hawking radiation near the horizon of a static black-hole with a multipole moment, we find that its existence would violate thermodynamic laws of black-hole. Under a perturbation of dust, this kind of gravitational field is unstable. So we guess that this kind of black-hole does not likely exist in the universe.

PACC: 0420

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19773003).