

经典混沌系统在相应于初始相干态的 量子子空间中的随机性

邢永忠^{1)2)†} 徐躬耦²⁾³⁾⁴⁾

¹⁾(天水师范高等专科学校物理系,甘肃天水 741000)

²⁾(南京大学物理系,南京 210093)

³⁾(兰州大学现代物理系,兰州 730000)

⁴⁾(中国科学院兰州近代物理研究所,兰州 730000)

(1998 年 9 月 14 日收到)

Poincare 截面是反映经典系统是否达到混沌的有力手段,无规矩阵理论被看成是显示量子系统规则运动与不规则运动特征的有效方法.那么,当一个经典相点在混沌体系的某一能量面 E_0 上的不变环面被全部破坏后,与这一相点所对应的中心能量 \bar{E}_0 等于 E_0 的相干态波包在它所占据的量子系统的子空间中有什么表现呢?以原子核 Lipkin 模型为例,用重整化约化方法,对 $SU(3)$ 群的广义相干态所占据的量子子空间进行了约化后对其中有关量的随机性作了考察,结果表明,在这样的等效子空间内能级间距的涨落,等效哈密顿量的矩阵元以及从可积体系的子空间到这一等效子空间的一一映射的矩阵元的分布均与无规矩阵理论的预言相符合,从而为进一步研究经典部分可积体系的量子表现奠定了基础.

PACC: 0365; 0240

1 引 言

经典体系的运动,可以用相点在相空间上的运动(或称为流)来描述.因此,由 Poincare 截面或 Lyapunov 指数的行为就可以判断一个给定的经典体系是否达到混沌状态,这已是人们普遍所接受的方法.然而,对于量子系统而言,是否存在纯粹量子意义上的混沌,量子混沌的机制以及用何种方法来显示量子规则运动与混沌运动的区别等是物理学界目前所面临的重大问题^[1].在量子混沌的研究中,人们一方面力图将经典力学的相应方法应用于量子系统,另一方面,又不断地寻求着可以显示量子混沌自身特征的物理量^[2].譬如,根据量子经典对应原理,与经典力学在相平面上的相点对应,量子体系的具有最小不确定性的相干态波包成为人们研究量子可积与不可积特征的候选者.曾在原子核物理中发挥过重要作用的随机矩阵理论,被看作是区别量子规则与不规则运动的较好方法.

1986 年,Haake 等^[3]在研究受周期性外磁场作用的转子的经典与量子动力学行为时

[†]通讯地址:南京大学物理系 1996 级博士生.

指出相干态对于哈密顿本征态的展开系数,在体系是完全可积的情形,具有 Poisson 分布的特征,而在量子系统所对应的经典系统到达混沌状态时,其展开系数呈现出 Gaussian 随机性. 1990 年, Zyczkowski^[4] 在 Haake 工作的基础上,对同一模型计算了相干态对于体系哈密顿量本征态的展开系数的绝对值之和, Shannon 熵等物理量,进一步指出这些展开系数的统计性与体系的对称性有关.

在他们所研究的转子模型中,体系所具有的对称性是由角动量算符 J_{\pm}, J_0 所生成的 $SU(2)$ 群. 为了进一步考察这一现象的普遍性和相干态展开系数所表现出来的随机性的来源,有必要在具有不同对称性的其他系统中作进一步的研究. 为此,以具有 $SU(3)$ 对称性的三能级原子核 Lipkin 模型^[5]为研究对象,分析 $SU(3)$ 群的广义相干态对于规则与混沌的哈密顿系统本征态的展开系数的统计性,并比较当系统由可积向不可积过渡时,相干态展开系数的不同表现特征. 与文献[3,4]不同,我们不是通过比较这些系数绝对值的大小,而是先通过计算相干态在哈密顿量本征态上分布的累积密度,用较为严格的方法确定出其分布范围 $[\mu]$,再经过重整化方法^[6]约化出 $[\mu]$ 在可积体系中对应的子空间,最后在这样一个子空间中研究上述问题.

2 模型哈密顿量和重整化子空间简介

三能级原子核 Lipkin 模型的哈密顿量为^[5]

$$H(\lambda) = H^0 + \lambda V, \quad (1a)$$

$$H^0 = \varepsilon_1 b_1^\dagger b_1 + \varepsilon_2 b_2^\dagger b_2 - \kappa_2 \left(b_2^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} b_2^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} + \text{H. c.} \right), \quad (1b)$$

$$V = -\kappa_1 \left(b_1^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} b_1^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} + \text{H. c.} \right) \\ + \mu_1 \left(b_2^\dagger b_1 b_2^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} + \text{H. c.} \right) + \mu_2 \left(b_1^\dagger b_2 b_1^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} + \text{H. c.} \right). \quad (1c)$$

其中 $i=1,2$;算符 b^\dagger, b 为玻色子的产生和消灭算符,它们满足

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2)$$

若令

$$b_i^\dagger = \sqrt{\frac{\Omega}{2}}(q_i - i p_i), \quad b_i = \sqrt{\frac{\Omega}{2}}(q_i + i p_i), \quad (3)$$

有

$$[q_i, p_j] = \frac{i}{\Omega} \delta_{ij},$$

$$H_c(\lambda) = H_c^0 + \lambda V_c, \quad (4a)$$

$$H_c^0 = \frac{\varepsilon_1'}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\varepsilon_2'}{2}(q_2^2 + p_2^2) - \kappa_2'(p_2^2 - q_2^2) \left[1 - \frac{G}{2}\right], \quad (4b)$$

$$V_c = -\kappa_1'(p_1^2 - q_1^2) \left[1 - \frac{G}{2}\right] + \frac{\mu_1'}{\sqrt{2}}(p_2^2 - q_2^2) p_1 + 2 p_1 p_2 q_2 \left[1 - \frac{G}{2}\right]^{1/2}$$

$$+ \frac{\mu_2'}{2} (\dot{p}_1^2 - q_1^2) \dot{p}_1 + 2 \dot{p}_1 \dot{p}_2 q_1 \left[1 - \frac{G}{2} \right]^{1/2}. \quad (4c)$$

其中 $G = (q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)$,

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 \Omega, \varepsilon_2' = \varepsilon_2 \Omega, \kappa_1' = \kappa_1 \Omega^2, \kappa_2' = \kappa_2 \Omega^2, \mu_1' = \mu_1 \Omega^2, \mu_2' = \mu_2 \Omega^2, \quad (5)$$

由这些关系式可见, 在 $\frac{1}{\Omega} \rightarrow 0$, 并保持其系数参量(5)式中的各量一定的条件下, (4)式是与(1)式相对应的经典极限.

这里 $i=1, 2$, $\varepsilon_1=1.10$, $\varepsilon_2=1.60$, $\kappa_1=0.43$, $\kappa_2=0.71$, $\mu_1=0.73$, $\mu_2=0.683$, $\Omega=20$. 在 $\lambda=0.78$ 时的 Poincare 截面在图 1 中给出, 从图 1 可以看出, 在 $\lambda=0.78$ 时经典极限已完全混沌.

此系统具有 $SU(3)$ 动力对称性, 它的相干态可以表示为

$$|\Phi\rangle = \exp \left[z_1 b_1^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} + z_2 b_2^\dagger \sqrt{\Omega - \sum_i b_i^\dagger b_i} \right] |0\rangle, \quad (6)$$

其中 z_1, z_2 为参数, 态 $|0\rangle$ 为 $SU(3)$ 群表示的最低权态. 取 $z_1=1.0$, $z_2=1.0$ 可得到一个中心能量 \bar{E}_0 与图 1 中 Poincare 截面的能量面相同的相干态波包.

在利用拓扑途径来研究量子混沌时, 我们提出了在不同能区进行重整化处理的研究方法^[6]. 其主要精神如下: 经典系统由规则向混沌的过渡是正则变换的不断被破坏的过程, 如果根据动力对称性的存在与否来判断量子体系的规则与不规则性, 由于动力对称性是对一个系统整体而言的, 不能反映出部分空间的不同变化, 必然要在不同的子空间中分别进行研究. 然而, 同一系统的各子空间并不是相互独立的, 而是相互影响的. 因而, 必须要对它们进行重整化处理.

首先, 通过直接对角化得到 $H(\lambda)$ 的本征态完备集 $\{|\phi_i(\lambda)\rangle\}$, 选出所要研究的子空间 $\{|\phi_i(\lambda)\rangle\} (i \in [\mu])$, 由于向这一子空间的投影算符为

$$P(\lambda) = \sum_{(i \in [\mu])} |\phi_i(\lambda)\rangle \langle \phi_i(\lambda)|, \quad (7)$$

再在可积的 H^0 的本征空间中找出一组正交归一矢量 $\{|\phi_i^0\rangle\} (i \in [\mu])$, 要求经(7)式投影后仍能保持正交归一性. 即

$$|\xi_i(\lambda)\rangle = c_i P(\lambda) |\phi_i^0\rangle \quad (i \in [\mu]). \quad (8)$$

其中 c_i 为归一化常数. 于是, 得到从可积的 H^0 的本征子空间到 $H(\lambda)$ 的本征子空间 $\{|\phi_i(\lambda)\rangle\} (i \in [\mu])$ 之间的一一映射

$$U_c(\lambda) = \sum_{i \in [\mu]} |\xi_i(\lambda)\rangle \langle \phi_i^0|, \quad (9)$$

有关系式

$$|\eta_i(\lambda)\rangle = U_c(\lambda, 0) |\phi_i^0\rangle \quad i \in [\mu(\lambda)]. \quad (10)$$

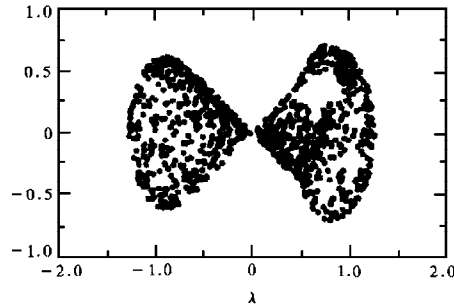


图 1 经典极限下的 Poincare 截面 $\lambda=0.78$

这样,可得这一子空间的等效哈密顿量

$$H(\lambda)_{\text{eff}} = \sum_{i,j \in [\mu]} |\eta_i(\lambda)\rangle \langle \eta_j(\lambda) | H(\lambda) | \eta_j(\lambda)\rangle \langle \eta_i(\lambda) | \dots \quad (11)$$

下面我们通过数值计算来考察 $U_c(\lambda)$ 和 $H(\lambda)_{\text{eff}}$ 的随机性.

3 计算与讨论

通过下列方法来确定相干态对于不同 λ 的分布范围 $[\mu]$. 首先, 计算累积密度 $M_l = \sum_{i=1}^l |\langle \phi_i(\lambda) | \Phi \rangle|^2$. 作出 M_l 随 E_l 或 l 变化的曲线图(见图 2), 从图 2(a) 可见, 当 E_l 较小时, M_l 近似为零. 随 E_l 增大, 曲线开始逐渐升高. 中间一段斜率最大, 当 E_l 继续增大时, 曲线平滑地接近于 1, 表明相干态主要分布在这一斜率最大的区间之内. 然后, 过相干态的中心能量 \bar{E}_0 拟合出一条直线 ab , 要求直线 ab 对曲线 M_l 的偏差为最小. 于是可得到相干态的主要分布区间 $[\mu]$ 的大小 $\Delta M = M_b - M_a$ 以及平均能级密度 $\frac{1}{\Delta M}$. 这样, 对 λ 取不同值时相干态的分布区间作了估计, 结果描绘于图 2(b) 中. 从图 2(b) 可见: 可积体系 H^0 具有 $SU(3)$ 对称性, $SU(3)$ 群的广义相干态对 H^0 展开系数的分布范围与对于 $H(\lambda)$ 的分布范围, 有着明显的差别, 随着破坏体系对称性的微扰强度的增强, 这一分布范围很快增大, 但当 λ 增大到一定程度时, 分布范围的扩大速度会越来越慢, 最后达到一饱和值.

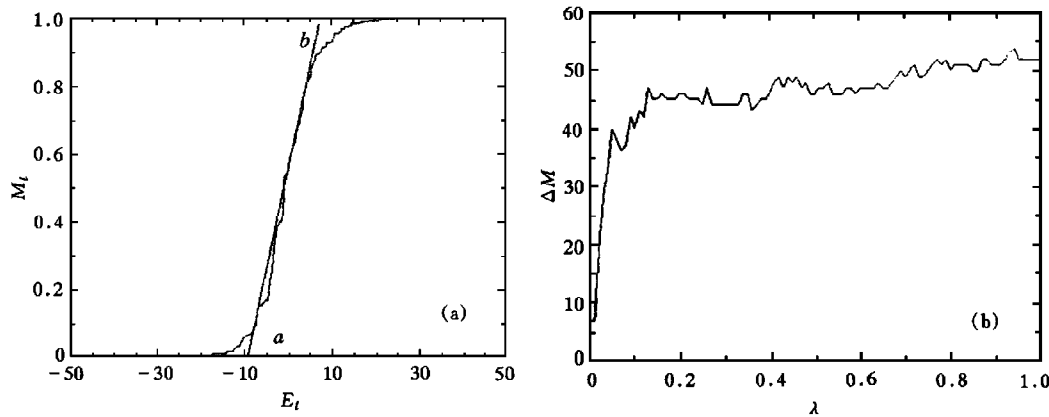


图 2 相干态波包的分布 (a) 在 $\lambda=0.78$ 的系统中, M_l 随 E_l 变化; (b) 分布区间的大小 ΔM 随 λ 的变化

对于可积体系 H^0 而言, 由于存在着足够多的运动积分和守恒量, 体系的状态可以用除能量以外的其他好量子数来区分. 当体系的可积性被破坏后, 其能谱的分布出现无规性. 根据无规矩阵理论, 当体系达到完全混沌状态时, 对于具有时间反演不变的系统, 其能谱间距的分布具有 GOE 统计律, 即

$$p(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left[-\frac{\pi s^2}{4}\right]. \quad (12)$$

将完全混沌状态下,相干态所对应的子空间内的能级间距的统计分析结果用图 3 来显示;对经重整化所得到的等效哈密顿量矩阵 H_{eff} ,在子空间 μ 内的作 unfolding 处理之后,其矩阵元的分布在图 4 中给出.

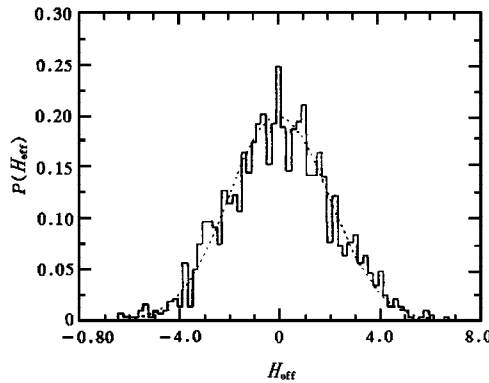
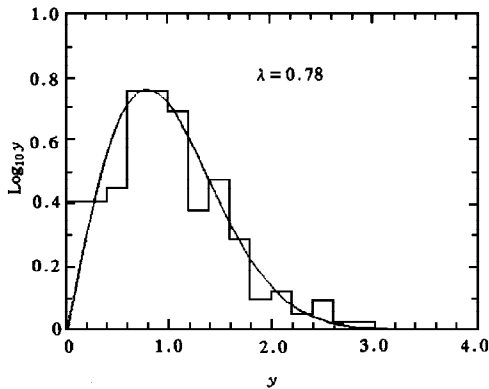


图 3 能级间距的统计分析结果(实线是 GOE 分布线)

图 4 重整化等效哈密顿量矩阵 H_{eff} 的矩阵元分布

变换 $U_c(\lambda, 0) = \sum_{i \in I_\mu} |\xi_i(\lambda)\rangle \langle \phi_i^0(\lambda=0)|$ 是不可积体系 $H(\lambda)$ 的约化子空间 $[\mu(\lambda \neq 0)]$ 与可积的 H^0 的子空间 $[\mu(\lambda=0)]$ 之间的满足正交性的一一映射. 对这一变换在可积体系 H^0 中的本征态之间的矩阵元作的统计分析结果见图 5.

图中光滑曲线为 Porter-Thomas 分布曲线, 即

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle y \rangle y}} \exp\left[-\frac{y}{2\langle y \rangle}\right], \quad (13)$$

其中 $y = \chi^2_{\nu=1}$. 由图可见, 这一变换矩阵的矩阵元很好地与 GOE 分布相符合.

总而言之, 从上述分析结果可以看出, 在体系的可积性不断被破坏的过程中, 可积体系的相干态对于不可积体系本征态的展开的分布范围与体系可积性被破坏的程度有关. 这一过程明显地分为两个阶段: 随不可积微扰强度的逐渐增大, 其分布范围首先是快速扩大, 但

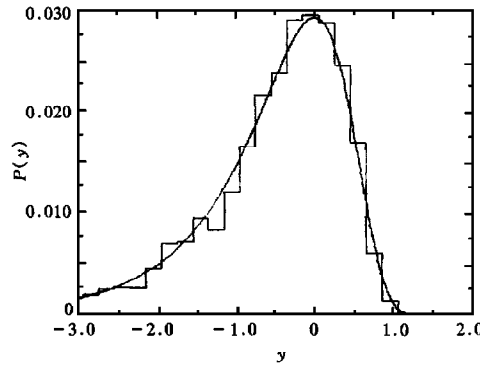


图 5 交换矩阵 $U_c(\lambda, 0)$ 的统计分析结果

这一扩展速度很快会减慢, 最后达到一饱和值. 由于 $\langle \phi_i^0 | \eta_k(\lambda) \rangle = \langle \phi_i^0 | U_c(\lambda, 0) | \phi_j^0 \rangle$, 所以, 对于这一变换矩阵元的统计分析表明, 从可积系统的子空间 $\mu(\lambda=0)$ 到与之相应的不可积体系的子空间 $\mu(\lambda \neq 0)$ 间的映射是一符合 GOE 分布的随机矩阵. 这样的结果告诉我们, 将经典相点与量子的相干态波包相对应, 相点运动所在的能量面与相干态所占据的能区相对应, 并通过重整化约化技术来分析这一能区的量子子空间的方法, 可以很好地反映出经典不可积系统的量子表现. 自然地, 这一方法可以进一步研究部分可积等问题, 将另文讨论. 另外, 由于统计分析是对单一子空间进行的, 虽然其结果不如将各个不同子空间

中的相应量放在一起统一进行分析时的结果好,但这一作法更能充分的显示这些子空间的自相似性.

- [1] 徐躬耦,量子混沌运动(上海科学技术出版社,上海,1993),p.205.
 [2] Yan Gu, *Phys. Lett.*, **A149**(1990), 95; A. K. Pattanayak and P. Brumer, *Phys. Rev.*, **E56**(1997), 5174.
 [3] F. Haake, M. Kus and R. Scharf, *Z. Phys.*, **B65**(1986), 381.
 [4] K. Zyczkowski, *J. Phys.*, **A23**(1990), 4427.
 [5] K. G. Wang, F. M. Izrailev *et al.*, *Phys. Rev.*, **E57**(1997), 323.
 [6] Topological approach to the study of quantum dynamical chaos, By, Xu Gong-ou, Xing Yong-zhong and Yang Ya-tian, submitted to *Phys. Rev. A*.

STOCHASTICITY OF THE EFFECTIVE SUBSPACE TAKEN UP BY A COHERENT STATE IN QUANTUM SYSTEM CORRESPONDING TO CLASSICAL CHAOTIC ONE

XING YONG-ZHONG^{1,2)} XU GONG-OU^{2),3),4)}

¹⁾(Department of Physics, Tianshui Teachers' Collage, Gansu Tianshui 741000)

²⁾(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093)

³⁾(Department of Model Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

⁴⁾(Institute of Model Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000)

(Received 14 September 1998)

ABSTRACT

It is well known that all torus are destroyed in the Poincare' section with a certain energy E_0 when a classical system is in completely chaotic state. But in its quantum counterpart, the features of the subspace taken up by a coherent state with central energy $\bar{E}_0 = E_0$ is not yet clear. In the present paper, taking nuclear Lipkin model as an example, we study the properties of such a subspace taken up by the coherent state of $SU(3)$ group. An effective subspace is obtained by using a new renormalization approach. Our results show that in such an effective subspace the distribution of the nearest level spacings, the elements of effective Hamiltonian matrix, and the one-to-one correspondent map from the subspace of an integrable system to that of nonintegrable one are all consistent with predictions of random matrix theory.

PACC: 0365; 0240