

# 混沌振子的广义旋转数和同步 混沌的 Hopf 分岔\*

马文麒<sup>1)</sup> 杨俊忠<sup>2)</sup> 刘文吉<sup>3)</sup> 包刚<sup>2)</sup> 胡岗<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(吉林师范学院物理系, 吉林 132011)

<sup>2)</sup>(北京师范大学物理系, 北京 100875)

<sup>3)</sup>(郑州轻工学院基础部, 郑州 450002)

(1998 年 9 月 24 日收到)

对应于混沌振子的各个 Lyapunov 指数, 在切空间中定义了广义相位和广义旋转数. 广义旋转数和 Lyapunov 指数相结合, 可以更完整地描述混沌吸引子的各个运动模式的运动特征, 包括伸缩与旋转. 用耦合 Duffing 振子研究了时空混沌系统在同步混沌失稳时发生的分岔行为. 结果表明, 耦合振子的同步混沌态可以发生一种 Hopf 分岔, 在 Hopf 分岔后, 系统的功率谱中出现了特征频率, 其值恰好等于分岔前临界横模的广义旋转数.

PACC: 0545

## 1 引 言

在对低维动力学系统的研究中, Lyapunov 指数描述混沌轨道对初值的敏感程度, 定量地刻画混沌吸引子的伸缩特征, 具有十分重要的物理意义. 对 Lyapunov 指数谱的分析和计算是混沌研究中的重要内容<sup>[1-3]</sup>. 然而, 混沌系统各运动模式的旋转特征却不能在 Lyapunov 指数中得到反映. 近来, 由于 Rosenblum 等人对混沌系统相同步现象的研究<sup>[4]</sup>, 混沌吸引子的相位和旋转问题开始引起广泛的注意<sup>[5-9]</sup>. 要对混沌吸引子的相位给出恰当的定义, 要求吸引子的转动是正规的, 即有唯一的转动中心和不变的转动方向. 但迄今为止, 混沌吸引子的相位和频率都是在相空间中定义的<sup>[5-9]</sup>, 而大多数混沌吸引子在相空间中具有多个转动中心(如 Lorenz 系统在  $x-y$  平面上就有两个转动中心, 而 Duffing 振子可以有两个以上的转动中心), 旋转方向一般也不确定, 这给相位和相频率的定义和计算带来困难.

考虑到 Lyapunov 指数是在切空间中定义的, 每个 Lyapunov 指数对应着切空间中的一个矢量, 这些切矢是轨道上各点 Jacobian 矩阵乘积的本征矢, 当系统演化时, 这些切矢膨胀或收缩, 同时在空间中转动, 构成了系统演化的基本模式, 因此可以用各个切矢量的空间方位和其转动速率定义相位和相频率. 根据这种思想, 本文将对混沌系统的相位和相频率的概念加以推广, 给出广义相位和广义旋转数(generalized winding number)的定义. 广义旋转数和对

\* 国家自然科学基金(批准号:19675008)和吉林省教委科学基金资助的课题.

应的 Lyapunov 指数一起可以比较完整地描述混沌系统各运动模式的运动特征. 应用这些概念, 研究了耦合 Duffing 振子系统同步混沌的分岔现象. 同步混沌的分岔问题也是当前引起广泛兴趣的课题之一<sup>[10-14]</sup>. 在研究中我们发现了一类新的混沌运动的 Hopf 分岔, 分岔后出现的运动频率准确地等于分岔前同步混沌的临界横模的广义旋转数. 这表明, 广义相位和广义旋转数在研究混沌系统状态及状态变化的问题中具有重要意义.

## 2 混沌吸引子的广义相位和广义旋转数

首先讨论混沌系统的切空间中的广义相位和广义旋转数的定义和计算方法.

对于  $d$  维非线性动力系统  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ , 在计算 Lyapunov 谱时, 需要给出  $d$  个线性无关的切矢量, 在对系统动力学方程进行积分时, 略去相当长的暂态过程之后, 开始计算这  $d$  个切矢量的演化. 在轨道的每一点, 切矢量的变化取决于系统在该点的 Jacobian 矩阵. 这些切矢量在系统演化过程中膨胀或收缩, 并且不断改变方向, 即在空间中转动. 积分过程中, 要用 Gram-Schmidt 方法经常对这些切矢量进行正交归一, 使 Lyapunov 指数按从大到小的顺序排列, 并与各切矢量一一对应. 设 Lyapunov 指数  $\lambda_i$  对应的切矢量为  $\boldsymbol{\tau}_i$ , 我们可以在投影空间中定义它的相角, 例如在  $x$ - $y$  平面上可定义  $t$  时刻切矢量  $\boldsymbol{\tau}_i(t)$  的相角为  $\theta_i(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\tau_{iy}(t)}{\tau_{ix}(t)} \right)$ , 这里  $\tau_{ix}(t)$ ,  $\tau_{iy}(t)$  为第  $i$  个切矢  $\boldsymbol{\tau}_i(t)$  在状态空间中  $x$  和  $y$  方向的投影. 广义旋转数则为该相角转动速率沿轨道的长时间平均

$$\langle \omega_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_i(t) dt. \quad (1)$$

在实际数值模拟中, 不可能用无穷大的  $T$ , 只要用足够大的  $T$  使  $\langle \omega_i \rangle$  趋于稳定即可.

现在以 Duffing 振子为例来计算混沌系统的广义旋转数. Duffing 振子的动力学方程为

$$\ddot{x} + \nu \dot{x} + x^3 = g \cdot \sin(\omega t). \quad (2)$$

(2) 式中左边第一项表示惯性, 第二项为耗散力, 第三项为非线性恢复力, 右边为强迫力, 参数  $\nu$ ,  $g$ ,  $\omega$  分别代表耗散系数, 强迫力强度和频率.

令  $\mathbf{y} = \dot{x}$ , 把 (2) 式写成二变量微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\nu y - x^3 + g \cdot \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

取  $\nu = 0.3$ ,  $\omega = 1.0$ , 改变参数  $g$ , 计算系统的两个 Lyapunov 指数和对应的两个广义旋转数, 结果如图 1 所示. 图 1(a) 为 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  随参数  $g$  的变化; 在  $\lambda_1 > 0$  的范围内, 振子出现混沌运动. 图 1(b) 为  $g = 12.0$  时系统的混沌轨道在  $x$ - $y$  平面上的投影. 图 1(c) 为与  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  对应的广义旋转数  $\langle \omega_1 \rangle$  和  $\langle \omega_2 \rangle$  随  $g$  的变化. 在计算广义旋转数时, 用了三种不同的方法: (1) 计算切矢  $\boldsymbol{\tau}_1$ ,  $\boldsymbol{\tau}_2$  在  $x$ - $y$  平面上的投影的转动速率; (2) 计算  $\tau_{1x}$ ,  $\tau_{2x}$  的振动频率 (即  $x$  分量平均穿零频率的  $\pi$  倍); (3) 计算  $\tau_{1y}$ ,  $\tau_{2y}$  的振动频率 (即  $y$  分量平均穿零频率的  $\pi$  倍); 结果表明, 三种方法计算的广义旋转数在所取参数范围内都相等. 这说明 Duffing 振子的切空间中的模矢量在  $x$ - $y$  平面上的投影的转动是正规转动. 而且对于单个 Duffing 振子, 在所取参数范围内两个广义旋转数也总相等. 和自治系统不

同的是, Duffing 振子没有一个总等于零的 Lyapunov 指数. 两个 Lyapunov 指数之和  $\lambda_1 + \lambda_2$  等于  $-\nu$ , 为相体积收缩率. 值得特别指出的是, 广义旋转数在状态变量的频谱中并不出现, 因为它仅代表混沌轨道切空间中系统的特征模的平均转动速率, 并不代表状态空间中混沌轨道的旋转速率. 后面会看到, 当同步混沌失稳, 分岔出现时, 失稳的横向模的广义旋转数开始具有物理意义, 成为可观测的特征频率, 出现在状态变量的频谱中.

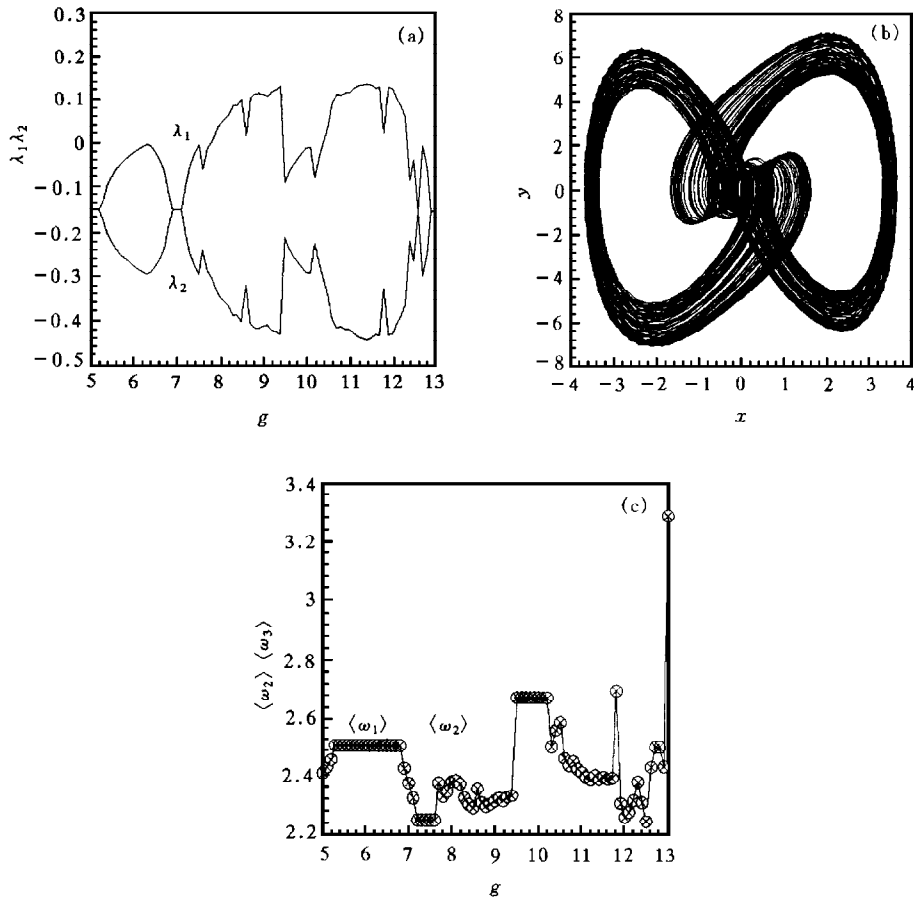


图1 Duffing 方程(2)取  $\nu=0.3$ ,  $\omega=1.0$  (a) Lyapunov 指数  $\lambda_1, \lambda_2$  随  $g$  的变化.  $\lambda_1 + \lambda_2 = -\nu = -0.3$ , 为相体积收缩率,  $\lambda_1 > 0$  的参数范围内系统出现混沌运动 (b) Duffing 方程(2)当  $g=12.0$  时的混沌吸引子(在  $x$ - $y$  平面上的投影) (c)用三种不同的方法计算的与  $\lambda_1, \lambda_2$  对应的广义旋转数  $\langle \omega_2 \rangle, \langle \omega_3 \rangle$  随  $g$  的变化. 实线表示切矢  $\tau_1, \tau_2$  在  $x$ - $y$  平面上的投影的转动速率, 符号  $\circ$  表示  $\tau_{1,x}, \tau_{2,x}$  的振动频率, 符号  $\times$  表示  $\tau_{1,y}, \tau_{2,y}$  的振动频率

### 3 耦合 Duffing 振子同步混沌的 Hopf 分岔

高维时空动力学系统经常具有一个比系统维数低的不变曲面, 而在这个不变子空间上存在一个混沌吸引子. 这种现象存在于带有空间对称性的系统和耦合非线性振子系统.

处于同步混沌状态的耦合振子系统的轨道就处在这种不变流形上, 它的维数和一个振子的维数相同. 最近, 这种系统在对称性破缺时发生的同步混沌的分岔现象引起了广泛的兴趣. 在耦合非线性振子系统的混沌同步和混沌分岔的研究中, 相位和转动的概念很重要. 对耦合 Duffing 振子的研究结果表明, 在切空间中定义的混沌系统的广义相位和广义旋转数的概念在这类问题的研究中具有重要的应用.

$N$  个振子的耦合系统的动力学方程可一般地表示为

$$\dot{\mathbf{u}}_j = f(\mathbf{u}_j, t) + \sum_{l=1}^m (\epsilon_l + r_l) \Gamma(\mathbf{u}_{j-l} - \mathbf{u}_j) + (\epsilon_l - r_l) \Gamma(\mathbf{u}_{j+l} - \mathbf{u}_j), \quad (4)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

这里  $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^n$ , 即  $\mathbf{u}_j = (u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jn})^T$  为  $n$  维矢量, 表示第  $j$  个振子的态矢, 采用周期性边界条件, 有  $\mathbf{u}_{N+j} = \mathbf{u}_j$ ,  $f(\mathbf{u}, t) = (f_1(\mathbf{u}, t), f_2(\mathbf{u}, t), \dots, f_n(\mathbf{u}, t))^T$  表示单个振子的动力学规律,  $f_i(\mathbf{u}, t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) 中包含有非线性函数.  $m$  表示耦合范围,  $\epsilon_l$  和  $r_l$  分别为

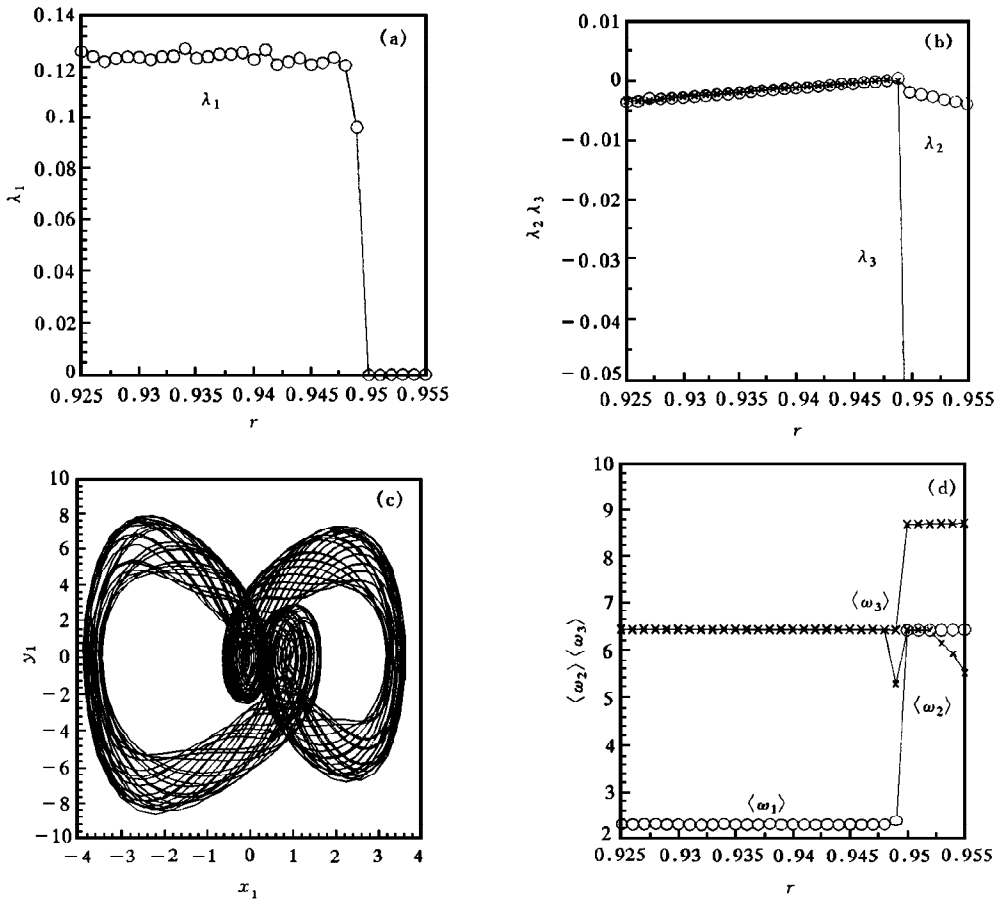


图2 耦合 Duffing 方程(5)取  $N=4$ ,  $\nu=0.3$ ,  $g=12.0$ ,  $\omega=1.0$ ,  $c=17.0$  时, Lyapunov 指数  $\lambda_1$ (a),  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ (b) 随  $r$  的变化, (c)  $r > r_c$  时的准周期轨道和 (d) 广义旋转数随  $r$  的变化. 在分岔点  $r = r_c = 0.948$ , 在  $r < r_c$  时,  $\langle \omega_2 \rangle = \langle \omega_3 \rangle \cong 6.43$

扩散耦合和梯度耦合系数,  $\Gamma$  为  $n \times n$  耦合矩阵, 取决于耦合方式. 这里取  $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 代表振子势类型的耦合. 采用最近邻耦合,  $N$  个 Duffing 振子耦合系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= y_j, \\ \dot{y}_j &= -\nu y_j - x_j^3 + g \cdot \sin(\omega t) + (\epsilon + r)(x_{j-1} - x_j) + (\epsilon - r)(x_{j+1} - x_j), \quad (5) \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

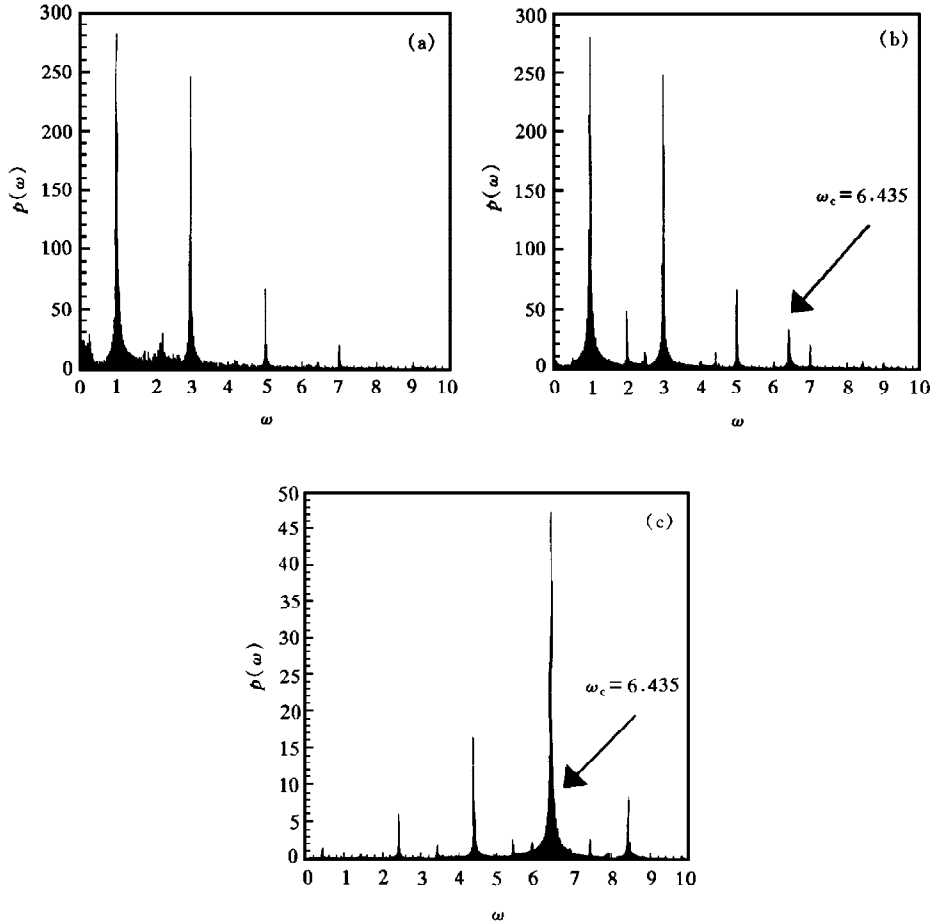


图3 耦合 Duffing 方程(5)取  $N=4$ ,  $\nu=0.3$ ,  $g=12.0$ ,  $\omega=1.0$ ,  $c=17.0$  时, 系统状态变量的功率谱

取各参数值为  $\nu=0.3$ ,  $\omega=1.0$ ,  $g=12.0$ , 对于单个 Duffing 振子, 参数为上述值时发生混沌运动, 其轨道如图 1(b) 所示. 取振子数  $N=4$ , 扩散耦合系数  $\epsilon=17.0$ , 从零开始逐渐增大梯度耦合系数  $r$ , 发现系统在开始时处于稳定的同步混沌状态, 到  $r=r_c=0.948$  时同步混沌态失稳. 这时有两个特别值得注意的问题是: 失稳后非同步混沌的状态有什么特点, 这一特点又与同步混沌的失稳模有什么关系? 图 2(a), (b) 给出了耦合系统的前 3 个 Lyapunov 指数随  $r$  变化的情况, 在  $r=r_c=0.948$  时,  $\lambda_1$  迅速减小, 到  $r=0.950$  时减小

到零;在  $r < r_c$  时  $\lambda_2, \lambda_3$  相等,从负值逐渐增加,在  $r = r_c$  时增加到零,之后分开并以不同的速率下降.由此看出,  $r = r_c = 0.948$  是同步混沌的一个分岔点.继续增加  $r$ ,系统会转入非同步准周期态,图 2(c)所示为分岔后系统的相轨道在  $x_1 - y_1$  平面上的投影,可看到准周期环面上的旋转运动,图 2(d)给出了耦合系统的前 3 个广义旋转数  $\langle \omega_1 \rangle, \langle \omega_2 \rangle, \langle \omega_3 \rangle$  随  $r$  的变化,在  $r < r_c$  时都近似为恒定值,  $\langle \omega_1 \rangle \cong 2.29, \langle \omega_2 \rangle = \langle \omega_3 \rangle \cong 6.43$ ,在  $r = r_c = 0.948$  附近三个广义旋转数都发生突变.

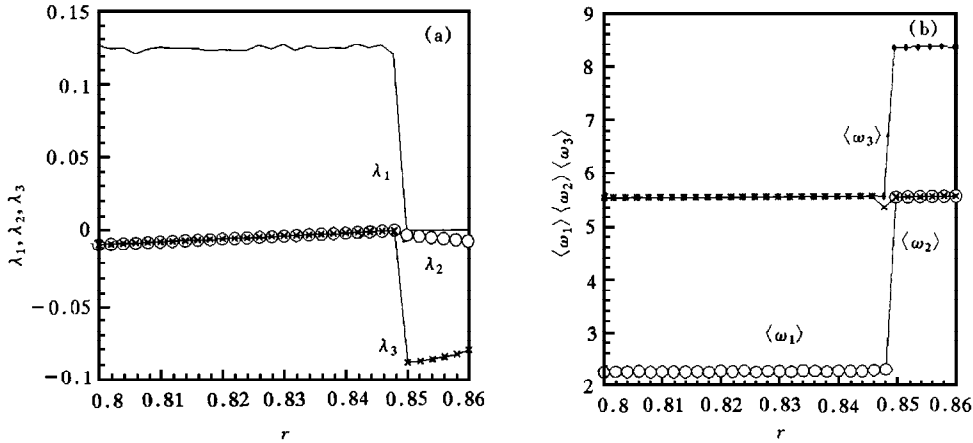


图 4 耦合 Duffing 方程(5)取  $N=5, \nu=0.3, g=12.0, \omega=1.0, c=17.0$  (a) Lyapunov 指数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  随  $r$  的变化,在分岔点  $r = r_c = 0.848$ . (b) 对应的 3 个广义旋转数  $\langle \omega_1 \rangle, \langle \omega_2 \rangle, \langle \omega_3 \rangle$  随  $r$  的变化,在  $r \leq r_c$  时,  $\langle \omega_1 \rangle \cong 2.25, \langle \omega_2 \rangle = \langle \omega_3 \rangle \cong 5.52$

图 3 为分岔点参数  $r = r_c$  两侧系统的状态变量的功率谱.图 3(a)是  $r = 0.946 < r_c$  时  $x_1(t)$  的功率谱,这时系统处于同步混沌状态,图中的谱线为强迫力频率及其谐频.图 3(b)为参数  $r = 0.950 > r_c$  时  $x_1(t)$  的功率谱,箭头所指为分岔产生的特征频率的谱线,其最高谱线值为  $\omega_c = 6.435$ ,此时系统中各振子失去同步.一个非常有意义的结果是分岔后系统状态变量的功率谱中出现的这一谱线正好和分岔前临界横模的广义旋转数  $\langle \omega_2 \rangle$  和  $\langle \omega_3 \rangle$  相等.图 3(c)为分岔后两相邻振子对应变量之差  $x_1(t) - x_2(t)$  的功率谱,由于同步混沌的成分被消除,分岔产生的特征谱线突出显示出来.上述结果表明,耦合 Duffing 振子系统的同步混沌态在临界参数  $r = r_c$  时发生 Hopf 分岔,分岔后产生的特征频率和分岔前临界横模的广义旋转数相等. Matias 等在实验中发现的耦合振子同步混沌失稳时出现的高频旋转波<sup>[15]</sup>正是波数  $K=1$ ,频率等于失稳前临界横模广义旋转数  $\langle \omega_2 \rangle, \langle \omega_3 \rangle$  的行波.

将  $r = r_c$  处的分岔认定为同步混沌的 Hopf 分岔是由于以下三个原因:(1)分岔前的临界模具有两个相等的 Lyapunov 指数;(2)这两个相等的 Lyapunov 指数对应两个相等的广义旋转数;(3)分岔后系统状态变量的功率谱中出现了一个新的特征频率,而这一频率精确地等于分岔前临界模的广义旋转数.所有这些特征正是 Hopf 分岔的典型特征.过去, Hopf 分岔仅在固定点解和周期解的分岔中发现,这里提出的混沌运动的 Hopf 分岔是一个新的概念.

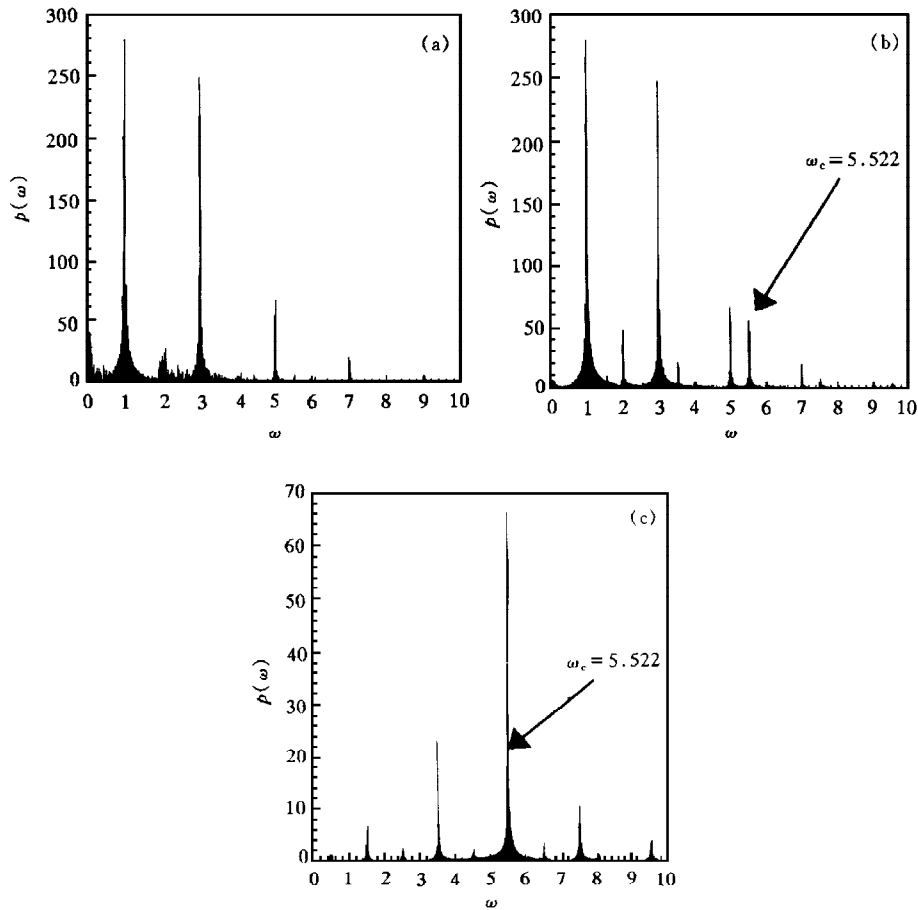


图 5 耦合 Duffing 方程(5)取  $N=5$ ,  $\nu=0.3$ ,  $g=12.0$ ,  $\omega=1.0$ ,  $c=17.0$  (a) 在  $r=0.846 < r_c$  时  $x_1(t)$  的功率谱. (b) 在  $r=0.850 > r_c$  时  $x_1(t)$  的功率谱. 箭头所指为分岔产生的特征频率的谱线  $\omega_c=5.522$ . (c) 在  $r=0.850 > r_c$  时  $x_1(t) - x_2(t)$  的功率谱. 最高谱线  $\omega_c=5.522$

图 2 和图 3 所示的同步混沌分岔行为及规律普遍存在于同步混沌系统中, 我们对  $N=5$  的耦合 Duffing 振子系统做了同样的计算, 结果在图 4 和图 5 中给出. 由图 4 可以看到, 系统的临界参数为  $r_c=0.848$ , 临界模的广义旋转数  $\langle \omega_2 \rangle = \langle \omega_3 \rangle \cong 5.52$ . 由图 5 可以清楚看到, 分岔后产生的特征频率  $\omega_c=5.522$ , 和分岔前临界横模的广义旋转数精确相等.

## 4 结 论

在切空间中定义了混沌系统的广义相位和广义旋转数, 并用以研究了耦合 Duffing 振子的同步混沌的分岔行为. 结果表明, 从耦合 Duffing 振子的同步混沌态确实可以发生

一种 Hopf 分岔, 由 Hopf 分岔产生的特征频率由分岔前横向临界模的广义旋转数决定. 经 Hopf 分岔后系统的状态逐步由同步混沌转变为准周期行波.

我们认为, 这方面的研究尚存在以下问题有待进一步解决.

(1) 广义相位和广义旋转数的定义和计算依赖于投影面的选择, 对于 Duffing 方程, 选择任一个振子的相平面作为投影面得到同样的结果, 但对于一般的高维混沌系统, 选取不同的投影面得到的结果有可能不同.

(2) 广义相位和广义旋转数在混沌系统状态和状态变化方面研究中的进一步应用值得深入研究.

- [1] J. Eckmann, D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57**(1985), 617.
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [3] J. Z. Yang, G. Hu, J. H. Xiao, *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1998), 496.
- [4] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.*, **76**(1996), 1804.
- [5] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 4193.
- [6] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. Osipov *et al.*, *Physica D*, **104**(1997), 219.
- [7] A. S. Pikovsky, G. Osipov, M. G. Rosenblum *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **79**(1997), 47.
- [8] T. Yalcinkaya, Y. C. Lai, *Phys. Rev. Lett.*, **79**(1997), 3885.
- [9] E. Rosa, E. Ott, M. Hess, *Phys. Rev. Lett.*, **80**(1998), 1642.
- [10] E. Ott, J. C. Sommerer, *Phys. Lett.*, **A188**(1994), 39.
- [11] P. Ashwin, J. Buescu, Stewart, *Phys. Lett.*, **A193**(1994), 126.
- [12] Y. C. Lai, C. Grebogi, *Phys. Rev.*, **E52**(1995), 3313.
- [13] A. S. Pikovsky, *Z. Phys.*, **B55**(1984), 149.
- [14] J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 1140.
- [15] M. A. Matias, V. P. Munuzuri, M. N. Lorenzo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 219.

## GENERALIZED WINDING NUMBER OF CHAOTIC OSCILLATORS AND HOPF BIFURCATION FROM SYNCHRONOUS CHAOS\*

MA WEN-QI<sup>1)</sup> YANG JUN-ZHONG<sup>2)</sup> LU WEN-JI<sup>3)</sup> BAO GANG<sup>2)</sup> HU GANG<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( Department of Physics, Jilin Normal College, Jilin 132011)

<sup>2)</sup>( Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

<sup>3)</sup>( Zhengzhou Light Technology College, Zhengzhou 450002)

(Received 24 September 1998)

### ABSTRACT

In describing various modes of chaotic oscillators, generalized winding numbers are defined in tangent space corresponding to Lyapunov exponents of the chaotic attractor. Bifurcation behaviors from synchronous chaos of coupled Duffing oscillators are investigated using these concepts. The results show that a kind of Hopf bifurcation can take place from the synchronous chaotic state. Analysis of power spectrum indicates that the characteristic frequency created by the Hopf bifurcation is equal to the generalized winding number of the critical transverse modes just before the bifurcation.

PACC: 0545

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19675008), and by the Jilin Provincial Science Foundation.