

混沌系统的辅助参考反馈控制

唐 芳 邱 琦

(北京航空航天大学理学院物理系, 北京 100083)

(1998 年 10 月 15 日收到)

研究了保守系统混沌运动的控制问题. 在线性反馈控制方法的基础上提出了一种新的控制方法——辅助参考反馈法, 给出了控制参数的选择原则, 适当调整反馈系数和参考项即可以得到不同的周期轨道. 数值研究证明了该方法能够有效地控制耗散混沌系统和保守系统, 同时周期窗口在弱噪声干扰下具有很强的鲁棒性.

PACC: 0545; 4265

1 引 言

自 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出 OGY 控制法^[1]以来, 混沌控制受到广泛的关注和研究. 迄今, 虽然已有许多控制和跟踪混沌运动的方法, 但几乎所有的控制方法都是围绕耗散系统而设计的, 只有改进的 OGY 法^[3]和 PPSV (Proportional Pulses on System Variables) 法^[4,5]可以有效地控制哈密顿保守系统的混沌运动. 虽然对系统参数作小扰动来达到控制目的已通过实验验证了 OGY 法的有效性, 然而该方法需要依赖作为目标的不稳定不动点 (Unstable Fixed Point, 简称 UFP) 的详细信息, 实际应用时很不方便. 何况对于某些化学、生物系统要寻找一个可改变的系统参数是相当困难的.

本文利用一个简单可调谐的辅助参考项代替 STF 法中的目标轨道或 TDF 法中的延时项, 提出了一种辅助参考反馈控制 (Auxiliary Reference Feedback, 简称 ARF) 方法. 适当选择控制参数就可以使任一非线性系统趋于各种预期的轨道 (不一定是 UFP). 实际应用时只需通过观察系统来确定反馈系数和参考项的选择, 既不要求系统参数的信息, 也不必了解目标轨道的位置. 由于 ARF 法连续地对原系统引进控制作用, 相对于 PPSV 法, 控制速度大幅度提高. 首先介绍 ARF 方法对一维 Logistic 映射的控制原理, 并通过数值研究证明了该方法对二维标准映射控制的有效性, 包括抗噪声能力和控制速度, 最后把该方法与其他方法就控制效果作了比较.

2 控制方法

STF 和 TDF 法^[2]可以简单地实现对目标轨道的控制, 但在实际应用时控制器的设计和反馈系数的选择问题尚未解决. ARF 法在控制器的设计中引入一简单可调的辅助参考信号 (不一定是镶嵌在混沌吸引子中的不稳周期轨道), 可以稳定包括原系统的 UFP 及

其他目标轨道. 由于反馈项最终值不一定为零, 因此受控后的周期轨道不一定都落在原混沌吸引子上. 另外, 利用 Lyapunov 第一方法给出了控制参数的选择依据.

以一维 Logistic 映射

$$x_{n+1} = F(x_n, r) = rx_n(1 - x_n). \quad (1)$$

为例, 分析 ARF 的控制原理和控制参数的选择依据. 其中 r 是系统参数, 当 $r > 3.569945672 \dots$ 时系统出现混沌. (1) 式中引入 ARF 控制项则有

$$x_{n+1} = F(x_n, r) + g(x - x_{\text{ref}}), \quad (2)$$

其中 x_{ref} 为参考项, g 是反馈系数. 由 (2) 式可知当 $x_{\text{ref}} = \bar{x}$ (\bar{x} 是控制目标) 时, (2) 式和 STF 的控制机制一致. 假设该方法已达到控制目标 \bar{x} , 则有

$$\begin{aligned} \bar{x} &= F(\bar{x}, r) + g(\bar{x} - x_{\text{ref}}) \\ &= r\bar{x}(1 - \bar{x}) + g(\bar{x} - x_{\text{ref}}). \end{aligned} \quad (3)$$

从上式可知 \bar{x} 既是 (1) 式的不稳定不动点 x^* , 也是系统 (3) 式的稳定不动点. 首先考虑 (3) 式存在两有限实根的必要条件

$$r \neq 0, \quad (1 - r - g)^2 - 4rgx_{\text{ref}} > 0. \quad (4)$$

从 (4) 式知, x_{ref} 的范围依赖于反馈系数 g 和系统参数 r . 例如 $r = 3.9$ (映射出现混沌), g 取 0.3 , 则 (4) 式给出 $0 < x_{\text{ref}} < 2.2$. 这个范围比实现控制的 x_{ref} 要大得多, 但可以根据这一范围来限制辅助参考项的选择. 假设控制目标 \bar{x} 必须是映射 (1) 式的不稳定不动点 x^* , 也即当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\bar{x} = x^*$, 则以下两式必须同时满足

$$r\bar{x}^2 + (1 - r)\bar{x} = 0, \quad (5)$$

$$r\bar{x}^2 + (1 - r - g)\bar{x} + gx_{\text{ref}} = 0. \quad (6)$$

为了实现控制目标 x^* , 把 x^* 代入 (5) 式, 要使 (6) 式成立 x_{ref} 必须被选为 x^* , 这一结论说明若控制目标是 UPF, 辅助参考项 x_{ref} 必须是系统不稳定不动点.

采用 Lyapunov 第一方法进一步分析 ARF 法实现控制的充分条件. 令 $z_n = x_n - \bar{x}$ 并代入 (2) 式得

$$z_{n+1} = -rz_n^2 + (g + r - 2\bar{x})z_n = z_n(g + r - 2\bar{x} - rz_n). \quad (7)$$

由此可见, 当 $z = 0$ 是系统 (7) 式的稳定不动点时, 即可实现控制目标. 分析 (7) 式在不动点 0 处的 Jacobi 矩阵

$$J = \left. \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} \right|_{z_n=0} = g + r - 2\bar{x}. \quad (8)$$

其一维 Jacobi 矩阵的本征值 $\lambda = g + r - 2\bar{x}$, 因此被控系统稳定的充分条件为

$$|g + r - 2\bar{x}| < 1. \quad (9)$$

系统 (7) 式稳定时, $z_n \rightarrow 0$ 成立, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow \bar{x}$.

从以上分析可知 ARF 既可以把系统轨道引导到 UFP, 也可以利用 (4) 式给出的 x_{ref} 的范围, 根据系统选择的特定的 x_{ref} , r 及 g , 调谐得到一系列需要的控制输出. 由 (4) 式知, 确定 x_{ref} 的范围不要求目标轨道的信息. 尽管该式中含有系统参数 r , 但在实际应用时只需通过对系统的观察来确定 x_{ref} 的范围, 合理选择反馈系数就可以达到控制目的.

图 1 显示了 $g \in [0.1, 0.9]$ 时随辅助参考项变化所出现的 $P-1$, $P-2$ 等不同的控制

结果.从图中可以看出,加上控制器后的控制系统是以控制参数为系统参数的一个不同于原系统的新动力学系统,改变控制参数就可以观察到分岔现象.显然,适当选择控制参数就可以获得各种所需的目标动力学行为.同时从图中可知反馈系数 g 越小可控的动力学行为越丰富.

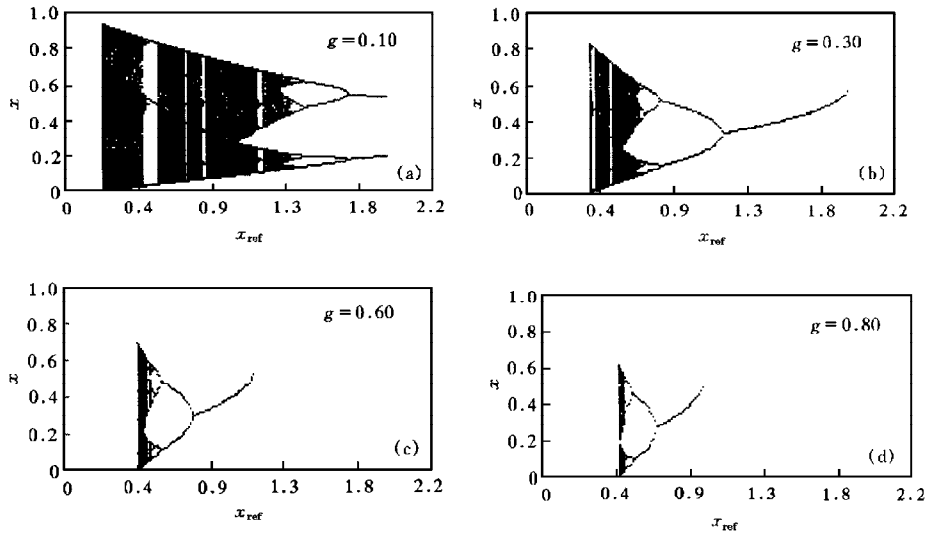


图1 反馈系数 $g \in [0.1, 0.9]$ 时引入 ARF 控制器的 Logistic 方程(2)随参考项变化的分岔图

3 标准映射的控制

现在研究上文给出的 ARF 法对表现全局混沌时标准映射的控制效果.

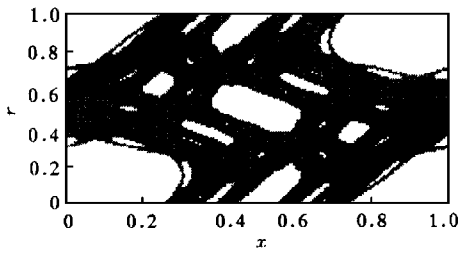


图2 $K=1.176354$ 时标准映射的相图

标准映射是一种单参数的二维非线性映射,描述了一不可积系统非线性谐振分界线内的局部运动.标准映射为考查 Hamilton 混沌的很多细节及引起混沌的因素提供了一个极好的例子.逐步增大参量 K 的数值将观察到由可积运动逐步过渡到混沌运动的过程.并且还存在着一个临界在 K 值 $K_{\text{crit}}=0.971635\dots$,当 $K=K_{\text{crit}}$ 时,可积系统保持的 KAM 环面被破坏; $K>K_{\text{crit}}$ 时系统的混沌运

动从局部范围扩展到整个相空间,系统表现全局混沌.图 2 显示了参数 $K=1.176354$ 时的相图.

3.1 ARF 控制标准映射的原理

由于保守系统的相空间体积不变,因此 Hamilton 系统不可能有耗散型的低维吸引子,即没有渐近地约束运动的任何较低相空间维数的子区域.但非耗散 Hamilton 系统也

会表现混沌. ARF 对保守系统的控制就是把保守系统转化为离散系统, 适当选择 g 和 x_{ref} 使系统稳定到不同的周期轨道.

考虑标准映射

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1}, \\ x_{n+1} &= x_n + r_{n+1} \pmod{1}. \end{aligned} \quad (10)$$

上式中引入 ARF 控制项

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n + g(x_n - x_{\text{ref}}) \pmod{1}, \\ x_{n+1} &= x_n + r_{n+1} \pmod{1}, \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式的 Jacobi 矩阵为 $J_n = \begin{pmatrix} 1+g & -K\cos 2\pi x_n \\ 1+g & 1-K\cos 2\pi x_n \end{pmatrix}$, $\text{Det}(J_n) = 1+g$, $-1 < g < 0$ 时系统

(11) 式为耗散系统. 由周期性条件知

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} r_n \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

当 J 的本征值都为负值时, 系统(11)式就可以得到稳定的周期窗口.

3.2 数值模拟

标准映射加上控制器后可以观察到周期吸引子, 这正是因为(11)式已成了耗散型系统. 图 3 给出了控制结果为周期轨道的典型例子. 显然控制结果由控制参数 g , x_{ref} 决定, 只要(11)式的 $|J| < 1$, 即 g 取负值, 被控系统就有可能收敛, 再适当调整辅助参考项就可以获得不同的控制结果.

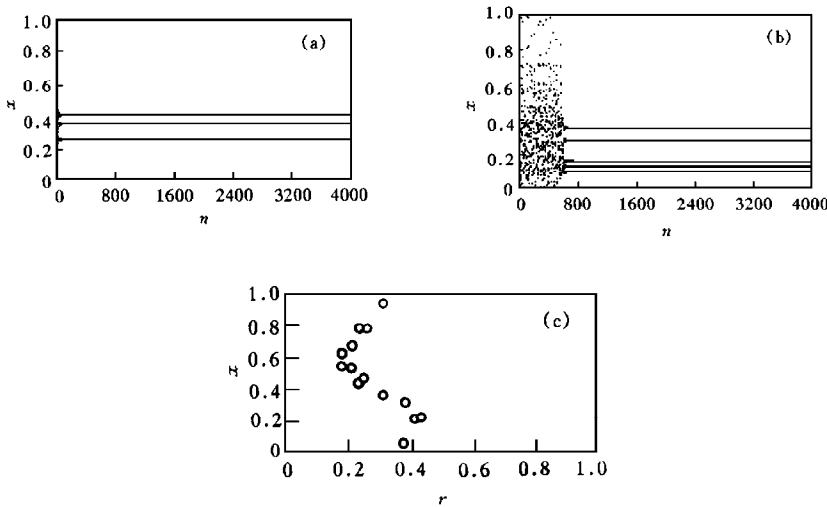


图 3 一些典型的控制结果 (a) $g = -0.1$, $x_{\text{ref}} = 0.4$ 时控制结果周期 3 变量 x 的时序图; (b) $g = -0.1$, $x_{\text{ref}} = 0.2$ 时控制结果周期 5 变量 x 的时序图; (c) $g = -0.1$, $x_{\text{ref}} = 0.3$ 时, 去掉瞬态后的控制结果周期 14 的相图 $r-x$

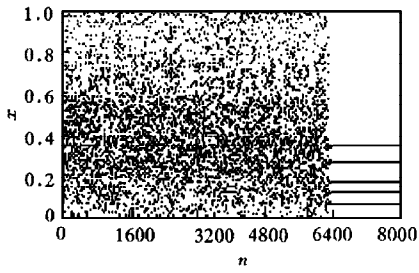


图4 标准映射加上 PPSV 控制器($\Delta n=5, \lambda=-0.33$)的控制结果(周期 5)变量 x 的时序图

3.3 噪声的影响

为了进一步验证 ARF 法的实用性,有必要研究外部噪声对控制性能的影响.采用高斯白噪声 $\rho \cdot \sigma$, σ 均值为 0 方差为 1,由 Box-Muller 算法产生, ρ 代表噪声强度.引入加法形式的噪声

$$r'_n = r_n + \rho \cdot \sigma, \quad (13)$$

或乘法形式的噪声

$$r'_n = r_n(1 + \rho \cdot \sigma). \quad (14)$$

每次迭代,噪声均作用于控制系统.图 5(a)显示了控制目标为图 3(b)所示的周期——5

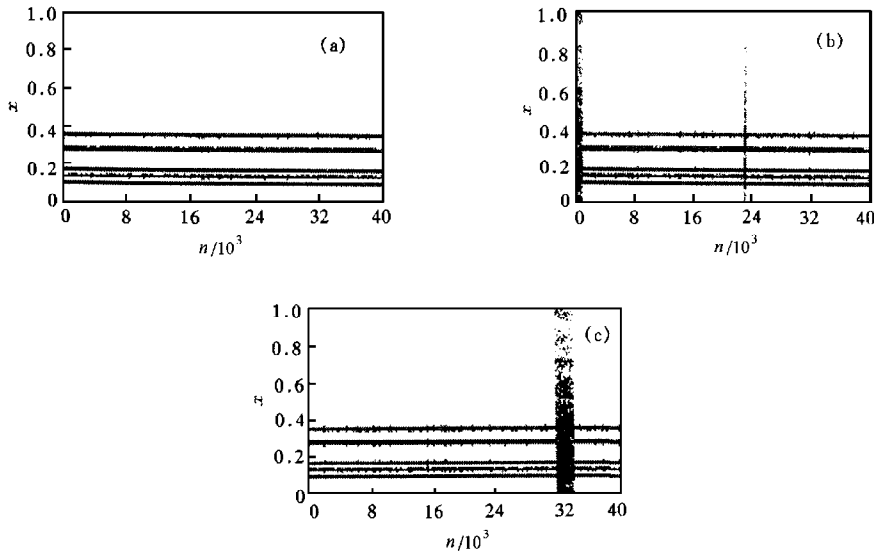


图5 加法噪声的影响 $g=-0.10, x_{ref}=0.20$ 时,(a) 噪声强度 $\rho=0.00025$;
(b) 噪声强度 $\rho=0.00028$;(c) 噪声强度 $\rho=0.0003$

时考虑加法噪声存在取 $\rho=2.5 \times 10^{-4}$ 的控制结果,与图 3(b)相比达到控制的时间缩短了,并且加噪声后所得轨迹变粗糙了,但仍是稳定的周期轨道.图 5(b)显示噪声强度进一步增大的结果,当外噪声强度增加到 3×10^{-4} 时,突发间隙,周期性被短时间的随机性打断,一段时间后系统又呈现周期性,并且噪声越强出现间隙的时间越长.这一现象表明噪声会引起间隙,最终导致不可控.乘积形式的噪声影响的数值研究表明,系统抗噪声能力

是加法噪声存在时的三倍,这一结论也适用于其他周期窗口.

4 结 论

在连续反馈的基础上引进一辅助参考项,产生一新的动力学系统,通过调谐反馈系数和辅助参考项可以获得各种所需的目标轨道,其中包括原系统的不稳定周期轨道或其他周期轨道.实际应用时,ARF 法只需对系统作短时间的观察来确定控制参数,因此控制器的设计与 OGY 法相比更简单,而 OGY 法需要知道鞍型不稳定不动点(用延时坐标镶嵌法寻找)的位置.并且 ARF 可以对任何一个非线性系统(包括存在多个混沌吸引子)或非鞍型不动点实现成功的控制.

对于保守系统,以经典的标准映射为例的一系列数值研究表明,与 PPSV 法相比,ARF 控制器连续地作用于被控系统,所以控制时间更短,抗干扰能力更强.利用 ARF 法实现复杂的实际系统的控制是我们下一步研究的方向.

[1] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1196.

[2] K. Pyragas, *Phys. Lett.*, **A170**(1992), 421.

[3] Y. C. Lai, M. Ding and C. Grebogi, *Phys. Rev.*, **E47**(1993), 86.

[4] M. A. Matias and J. Guemez, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 1455.

[5] Z. Liu and S. Chen, *Phys. Lett.*, **A232**, (1997), 55.

AUXILIARY REFERENCE FEEDBACK CONTROL FOR CHAOTIC SYSTEMS

TANG FANG QIU QI

(Department of Physics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

(Received 15 October 1998)

ABSTRACT

The problem of controlling conservative chaotic systems is investigated in this paper. Based on time delay feedback (TDF), a novel control method named auxiliary reference feedback (ARF) is presented. Different from TDF method, the basis to choose controlling parameters has been given. Only by appropriately adjusting feedback parameters and reference term, any periodical orbit can be reached by ARF. Numerical simulation results show that, ARF method is effective to control both dissipative and conservative systems. Moreover, we find that periodic windows controlled by ARF are stable in the presence of weak external noise.

PACC: 0545; 4265